

1 MATRICES MAGIQUES

CORRIGÉ

Pour $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose :

$$\forall i \lambda_i(M) = \sum_{j=1}^3 a_{i,j}, \quad \forall j \gamma_j(M) = \sum_{i=1}^3 a_{i,j}, \quad \delta(M) = \sum_{k=1}^3 a_{k,k}, \quad d(M) = \sum_{k=1}^3 a_{k,4-k}$$

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite matrice magique d'ordre 3 si et seulement si ces 8 nombres sont égaux. Cette valeur commune est alors appelée somme magique de M et notée $\varphi(M)$. On note Ψ l'ensemble de ces matrices et Ψ_0 le sous-ensemble de Ψ des matrices de somme magique nulle.

1° a) Il vient clairement que

. Ψ est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ contenant la matrice nulle.

. $\forall i \lambda_i(k.M) = k.\lambda_i(M)$, $\forall j \gamma_j(k.M) = k.\gamma_j(M)$, $\delta(k.M) = k.\delta(M)$ et $d(k.M) = k.d(M)$ et donc $k.M \in \Psi$ lorsque $M \in \Psi$ et $k \in \mathbb{R}$.

. $\forall i \lambda_i(M+N) = \lambda_i(M) + \lambda_i(N)$, $\forall j \gamma_j(M+N) = \gamma_j(M) + \gamma_j(N)$, $\delta(M+N) = \delta(M) + \delta(N)$ et $d(M+N) = d(M) + d(N)$ et donc $(M+N) \in \Psi$ lorsque $M \in \Psi$ et $N \in \Psi$.

On a ainsi que Ψ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc un \mathbb{R} -ev.

b) Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a ${}^tM \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus $\forall i, \lambda_i({}^tM) = \gamma_i(M)$, $\forall j, \gamma_j({}^tM) = \lambda_j(M)$, $\delta({}^tM) = \delta(M)$ et enfin $d({}^tM) = d(M)$. Donc si $M \in \Psi$, on a ${}^tM \in \Psi$.

c) $\varphi : \begin{cases} \Psi & \rightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \varphi(M) \end{cases}$ est la restriction de δ à Ψ . δ a été montrée linéaire, donc φ est une forme linéaire sur Ψ .

$\Psi_0 = \text{Ker } \varphi$ donc Ψ_0 est un sous-espace vectoriel de Ψ ; c'est un hyperplan de Ψ puisque φ est non nulle.

d) Soit $U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; on a bien sûr $U_3 \in \Psi$ et $\varphi(U_3) = 3$. Pour $M \in \Psi$, soit $N = M - \frac{\varphi(M)}{3}.U_3$. On a $N \in \Psi$ et

puisque φ est linéaire, $\varphi(N) = 0$. Donc $N \in \Psi_0$ et donc $M \in \Psi_0 + \text{Vect}(U_3)$.

On en déduit $\Psi = \Psi_0 + \text{Vect}(U_3)$. De plus $\Psi_0 \cap \text{Vect}(U_3) = \{O\}$ puisque $\varphi(U_3) = 3 \neq 0$. (on pouvait dire aussi $\dim \Psi = \dim \Psi_0 + \dim \text{Vect}(U_3)$ puisque Ψ_0 hyperplan de Ψ).

On a ainsi $\Psi = \Psi_0 \oplus \text{Vect}(U_3)$.

2° a) Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$, $M \in \Psi$. $\lambda_2(M) + \gamma_2(M) + \delta(M) + d(M) = \lambda_1(M) + \lambda_2(M) + \lambda_3(M) + 3a_{2,2}$. Ainsi $4\varphi(M) = 3\varphi(M) + 3a_{2,2}$ et donc $3.a_{2,2} = \varphi(M)$.

b) M matrice magique d'ordre 3, $M = (a_{ij})$, telle que $a_{1,1} = 67$, $a_{1,3} = 43$ et $a_{3,2} = 73$. Il est nécessaire que $a_{1,2} = \varphi(M) - 110$, $\varphi(M) = 3a_{2,2}$ et $\gamma_2(M) = \varphi(M)$. Ainsi $3a_{2,2} - 110 + a_{2,2} + 73 = 3a_{2,2}$ et donc $a_{2,2} = 37$. Viennent ensuite les conditions nécessaires $\varphi(M) = 111$, $a_{1,2} = 1$, $a_{3,1} = 31$, $a_{2,1} = 13$, $a_{2,3} = 61$ et $a_{3,3} = 7$. On vérifie ensuite que la matrice

$\begin{pmatrix} 67 & 1 & 43 \\ 13 & 37 & 61 \\ 31 & 73 & 7 \end{pmatrix}$ est bien magique de somme magique 111.

3° $M = (a_{ij})$. $M \in \Psi_0$ impose $a_{2,2} = 0$, donc $a_{3,3} = -a_{1,1}$, $a_{3,2} = -a_{2,1}$, $a_{1,3} = -a_{1,1} - a_{1,2}$, $a_{3,1} = a_{1,1} + a_{1,2}$, $a_{2,1} = -2a_{1,1} - a_{1,2}$, $a_{2,3} = 2a_{1,1} + a_{1,2}$. M apparaît donc déterminée par la donnée de $a_{1,1}$ et $a_{1,2}$. En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a donc (A, B) génératrice de Ψ_0 . Or (A, B) libre. Ainsi $\dim \Psi_0 = 2$.

4° De $\Psi = \Psi_0 \oplus \text{Vect}(U_3)$ on tire alors $\dim \Psi = 3$ et (A, B, U_3) en est une base. Soit $L = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ le "lo-shu". On a $L = a.A + b.B + c.U_3$. $\varphi(L) = 15$ impose $c = 5$. $L - 5.U_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in \Psi_0$ et $L - 5.U_3 = -A + 4.B$. Ainsi $L = -A + 4.B + 5.U_3$.

2 DIAGONALISATION

CORRIGÉ

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On définit sur E l'application $u : [P \mapsto (X P' + P'(0)) - 2(P - P(0))]$.

1° u est un endomorphisme de E . Pour $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $u(P) = aX^3 - cX + c$.

2° a) On a immédiatement pour $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $P \in \text{Ker } u \iff a = c = 0$.

b) Une base de $\text{Ker } u$ est donc $(1, X^2)$.

c) $\dim \text{Ker } u = 2$ donc $\text{rg } u = 2$.

d) On a tout aussi immédiatement $\text{Im } u = \text{Vect}(X^3, (-X + 1))$.

e) Puisque la famille $(1, (-X + 1), X^2, X^3)$ est libre, donc une base de E , on a $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ supplémentaires.

f) $u(X) = -X + 1$ et $u(-X + 1) = X - 1 \neq X$. Ainsi $u \circ u \neq u$ et u n'est pas un projecteur de E .

3° a) Les vecteurs non nuls du noyau de u sont vecteurs propres de u , associés à la valeur propre 0.

Un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle doit être dans $\text{Im } u$. Or $\text{Im } u = \text{Vect}(X^3, (-X + 1))$, $u(X^3) = X^3$ et $u(-X + 1) = X - 1$.

Ainsi les valeurs propres de u sont 0, 1 et -1, et les sous-espaces propres associés sont respectivement $\text{Ker } u$, $\text{Vect}(X^3)$ et $\text{Vect}(-X + 1)$. Ces espaces sont en somme directe.

b) $\dim \text{Ker } u = 2$, $\dim \text{Vect}(X^3) = 1$ et $\dim \text{Vect}(-X + 1) = 1$ donc il existe donc une base de E formée de vecteurs propres de u et donc u est diagonalisable.

c) $(1, X^2)$ base de $\text{Ker } u$ et (X^3) base de $\text{Vect}(X^3)$ et $(-X + 1)$ base de $\text{Vect}(-X + 1)$ donc $(1, -X + 1, X^2, X^3)$ est une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 MATRICES STOCHASTIQUES

CORRIGÉ

\mathcal{M} désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels dans lesquelles la somme des termes de chaque colonne vaut 1.

1° Pour $(A, A') \in \mathcal{M}^2$, on a $A = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & 1-b' \\ 1-a' & b' \end{pmatrix}$, et donc

$$A \times A' = \begin{pmatrix} aa' + (1-b)(1-a') & a(1-b') + (1-b)b' \\ (1-a)a' + b(1-a') & (1-a)(1-b') + bb' \end{pmatrix}$$

Or $\begin{cases} (aa' + (1-b)(1-a')) + ((1-a)a' + b(1-a')) = 1 \\ (a(1-b') + (1-b)b') + ((1-a)(1-b') + bb') = 1 \end{cases}$ et donc $(A \times A') \in \mathcal{M}$. Ainsi \mathcal{M} est stable par multiplication.

2° On pose M un élément de \mathcal{M} , $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix}$.

a) Ayant $M \in \mathcal{M}$, on a $\forall n, M^n \in \mathcal{M}$.

Ainsi il existe deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ de réels telles que $\forall n, M^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & 1-\beta_n \\ 1-\alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}$.

b) $M^0 = I_2$ donc $\alpha_0 = \beta_0 = 1$.

c) Le calcul du produit dans \mathcal{M} donne $\forall n, \begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha\alpha_n + (1-\beta)(1-\alpha_n) \\ \beta_{n+1} = (1-\alpha)(1-\beta_n) + \beta\beta_n \end{cases}$

3° a) Dans le cas particulier $\alpha + \beta = 1$ on a $\forall n, \begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha \\ \beta_{n+1} = \beta \end{cases}$ donc $M^n = M$ pour $n \geq 1$.

b) Dans le cas particulier $\alpha + \beta = 2$ on a $\forall n, \begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n + (1-\beta) \\ \beta_{n+1} = \beta_n + (1-\alpha) \end{cases}$ donc $\forall n, \begin{cases} \alpha_n = 1 + n(1-\beta) \\ \beta_n = 1 + n(1-\alpha) \end{cases}$ et donc

$$\forall n, M^n = I_2 + n(\alpha - 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4° On suppose $\alpha + \beta \neq 1$ et $\alpha + \beta \neq 2$; on pose alors $\gamma = \alpha + \beta - 1$.

a) On sait $\forall n, \begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha\alpha_n + (1-\beta)(1-\alpha_n) \\ \beta_{n+1} = (1-\alpha)(1-\beta_n) + \beta\beta_n \end{cases}$ donc $\forall n, \begin{cases} \alpha_{n+1} = \gamma\alpha_n + (1-\beta) \\ \beta_{n+1} = \gamma\beta_n + (1-\alpha) \end{cases}$

On en tire que $\left(\alpha_n - \frac{1-\beta}{1-\gamma}\right)_n$ et $\left(\beta_n - \frac{1-\alpha}{1-\gamma}\right)_n$ sont toutes deux géométriques de raison γ .

b) D'où $\forall n, \begin{cases} \alpha_n = \frac{1-\beta}{1-\gamma} + \gamma^n \left(\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\right) \\ \beta_n = \frac{1-\alpha}{1-\gamma} + \gamma^n \left(\frac{1-\beta}{1-\gamma}\right) \end{cases}$

c) Dans le cas $|\gamma| < 1$ on a $\lim_n \alpha_n = \frac{1-\beta}{1-\gamma}$ et $\lim_n \beta_n = \frac{1-\alpha}{1-\gamma}$.

5° On choisit $p \in]0, 1[$ et on pose $X_0 = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ où la suite $(X_n)_n$ vérifie $\forall n, X_{n+1} = M \times X_n$.

a) De $\forall n, X_{n+1} = M \times X_n$ on tire $\forall n, X_n = M^n \times X_0$ puis $\forall n, \begin{cases} x_n = \alpha_n p + (1-\beta_n)(1-p) \\ y_n = (1-\alpha_n)p + \beta_n(1-p) \end{cases}$ qui permet suivant les

cas précédemment discutés d'avoir, pour n quelconque, x_n et y_n en fonction de p, α, β, γ et n .

b) On a $x_0 + y_0 = 1$. En admettant $x_n + y_n = 1$, ayant $\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \beta) y_n \\ y_{n+1} = (1 - \alpha) x_n + \beta y_n \end{cases}$, on déduit $x_{n+1} + y_{n+1} = 1$. Le théorème de récurrence donne alors $\forall n, x_n + y_n = 1$.

c) Dans le cas particulier $p = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{4}$ donc $\gamma = -\frac{5}{12}$, on a $\forall n \begin{cases} \alpha_n = \frac{9}{17} + \frac{8}{17} \left(\frac{-5}{12}\right)^n \\ \beta_n = \frac{8}{17} + \frac{9}{17} \left(\frac{-5}{12}\right)^n \end{cases}$ et donc $\forall n, x_n = \frac{1}{2}(1 + \alpha_n - \beta_n) = \frac{9}{17} - \frac{1}{34} \left(\frac{-5}{12}\right)^n$.

Ainsi $\lim_n x_n = \frac{9}{17}$.

Ceci se rapporte à l'étude d'un processus stochastique :

Deux urnes, U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et noires. Les proportions de boules blanches dans les deux urnes sont respectivement $1/3$ et $1/4$. On procède à une suite de tirages avec remise, sur le principe : la première boule est prise dans U_1 ou U_2 avec même probabilité $1/2$. Ensuite, pour $n \geq 1$, le $(n + 1)$ ème tirage se fait dans la même urne que le précédent si la n ème boule tirée est blanche, sinon, on change d'urne. x_n est alors la probabilité que le n ème tirage ait eu lieu dans l'urne U_1 .

4 PARABOLES ET CARDIOÏDE

CORRIGÉ

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ ((O, \vec{i}) est pris comme repère polaire). Le réel a est positif et on note $A(a, 0)$. \mathcal{C} est le cercle de centre A et de rayon a .

1° La parabole Γ a pour foyer O et sa directrice est notée \mathcal{D} .

A appartient à Γ si et seulement si son projeté orthogonal sur \mathcal{D} est à la distance OA , et se trouve donc sur le cercle \mathcal{C} . \mathcal{D} est alors tangente à \mathcal{C} en ce point.

2° Soit M un point de \mathcal{C} tel que (\vec{OA}, \vec{AM}) mesure θ . On a ainsi $M(a(1 + \cos \theta), a \sin \theta)_R$ et $\vec{AM} \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \end{pmatrix}_R$. La tangente à \mathcal{C} en M est orthogonale à (AM) et admet donc pour équation $x \cos \theta + y \sin \theta = a(1 + \cos \theta)$.

3° a) Les paraboles passant par A et de foyer O sont d'après ce qui précède les paraboles de foyer O dont la directrice est tangente à \mathcal{C} . Soit l'une d'elles, dont la directrice \mathcal{D} est tangente à \mathcal{C} en M tel que (\vec{OA}, \vec{AM}) mesure θ . O se projette en K sur \mathcal{D} et le sommet S de la parabole est le milieu de $[OK]$. Or \vec{AM} comme \vec{OK} est orthogonal à \mathcal{D} donc (\vec{r}, \vec{OS}) mesure θ . De plus $OK = \frac{|0 \cos \theta + 0 \sin \theta - a(1 + \cos \theta)|}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = a(1 + \cos \theta)$. Ainsi S a pour coordonnées $(\frac{a}{2}(1 + \cos \theta), \theta)$ dans le repère polaire (O, \vec{i}) .

On en déduit que l'ensemble des sommets des paraboles passant par A et de foyer O est la courbe Λ d'équation polaire $2\rho = a(1 + \cos \theta)$.

b) Λ est la cardioïde de référence.

F I N