

**1 DIAMÈTRE DE PARTIES**

CORRIGÉ

$X$  est une partie non vide bornée de  $\mathbb{R}$ . On pose  $D = \{ |x - y| \mid x \in X, y \in X \}$ .

**a )**  $X$  non vide bornée admet un sup et un inf. Alors,  $\inf(X) \leq x \leq \sup(X)$  pour tout  $x \in X$ .

Ainsi  $|x - y| \leq (\sup X - \inf X)$  pour tous  $x$  et  $y$  de  $X$  :  $D$  est majorée.  $D$  est non vide (contient 0) donc admet une borne supérieure  $\delta(X)$ .

**b )**  $\delta(X) \leq (\sup X - \inf X)$  puisque  $(\sup X - \inf X)$  est un majorant de  $D$ .

Soit  $d < \sup X - \inf X$ . Puisque  $\inf X + \frac{1}{2}(\sup X - \inf X - d)$  n'est pas minorant de  $X$ , on a  $x \in X$  vérifiant  $\inf X \leq x < \inf X + \frac{1}{2}(\sup X - \inf X - d)$ . De même,  $\sup X - \frac{1}{2}(\sup X - \inf X - d)$  n'est pas majorant de  $X$ , on a donc  $y \in X$  tel que  $\sup X - \frac{1}{2}(\sup X - \inf X - d) < y \leq \sup X$ . Alors  $(y - x) \in D$  et  $(y - x) > d$  :  $d$  n'est pas majorant de  $D$ .

Ainsi  $\delta(X) = \sup X - \inf X$ .

**2 ANALOGIE ALGÈBRE**

CORRIGÉ

$E$  est un ensemble.

**a )** Pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , on a pour tout  $x$  de  $E$ ,  $x \in (A \cap B)$  si et seulement si  $x \in (B \cap A)$ , ces deux assertions étant équivalentes à " $x$  est élément de  $A$  et de  $B$ ". On a donc  $(A \cap B) = (B \cap A)$ .

Ainsi  $\cap$  est une opération commutative de  $\mathcal{P}(E)$ .

**b )** Pour  $A, B$  et  $C$  dans  $\mathcal{P}(E)$ ,  $A \triangle (B \triangle C)$  comme  $(A \triangle B) \triangle C$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui appartiennent à une seule des parties  $A, B$  et  $C$  ou aux trois. On a donc  $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ .

Ainsi  $\triangle$  est une opération associative de  $\mathcal{P}(E)$ .

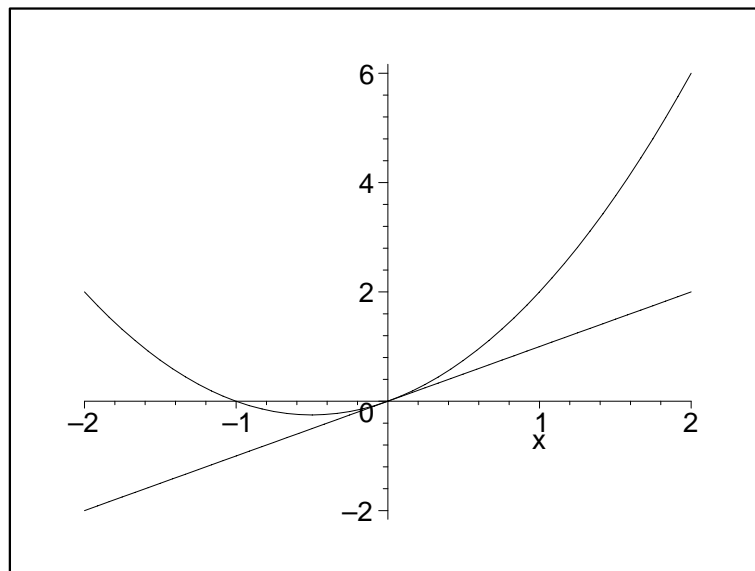
**c )** Pour  $A, B$  et  $C$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , on a pour tout  $x$  de  $E$ ,  $x \in A \cap (B \triangle C)$  comme  $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$  signifie " $x$  est élément de  $A$  et de  $B$  sans l'être de  $C$ , ou bien de  $A$  et de  $C$  sans l'être de  $B$ ". On a donc  $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ .

Ainsi  $\cap$  est une opération distributive par rapport à  $\triangle$  dans  $\mathcal{P}(E)$ .

**3 CONVERGENCES**

CORRIGÉ

Soient  $f : [x \mapsto x^2 + x]$  et la suite  $(u_n)_n$  définie par son premier terme  $u_0$  et la relation :  $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$ . Voici représentées la courbe de  $f$  et la droite d'équation  $y = x$ .



**a**) Pour tout  $n$  on a  $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$ . La suite  $(u_n)_n$  est donc croissante.

**b**) Dans le cas où  $(u_n)_n$  converge notons  $\ell$  sa limite. La suite extraite  $(u_{n+1})_n$  converge aussi vers  $\ell$  et donc  $\ell = \ell^2 + \ell$ , c'est à dire  $\ell = 0$ .

**c**) Puisque  $(u_n)_n$  est croissante, pour tout  $n$  on a  $u_n \geq u_1$ . La convergence vers  $\ell$  impose ainsi  $\ell \geq u_1$ . Dans le cas  $u_1 = u_0^2 + u_0 > 0$  la suite  $(u_n)_n$  diverge donc puisque la seule limite possible est 0.

**d**) Dans le cas  $-1 < u_0 < 0$ , une récurrence rapide donne  $-1 < u_n < 0$  pour tout  $n$ , enchainée par  $f \langle ] - 1, 0[ \rangle \subset ] - 1, 0[$ . La suite  $(u_n)_n$  est alors bornée. Étant monotone, elle est convergente. Et 0 est sa limite d'après ce qui précède.

## 4 CHASSE AU SUP

CORRIGÉ

$X$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée. On choisit un élément  $y_0$  de  $X$  et un réel  $\mu_0$  majorant de  $X$ . On construit  $(y_n)_n$  et  $(\mu_n)_n$  par :

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n \\ \mu_{n+1} &= \frac{y_n + \mu_n}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y_{n+1} &= \frac{y_n + \mu_n}{2} \\ \mu_{n+1} &= \mu_n \end{cases}$$

de sorte que  $[y_{n+1}, \mu_{n+1}]$  contienne au moins un élément de  $X$ .

**a**) Avec  $X = [0, 1[ \cup ]3, 4]$ ,  $y_0 = 0$  et  $\mu_0 = 5$ , on a

$$\begin{cases} y_1 = 5/2 \\ \mu_1 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 15/4 \\ \mu_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y_3 = 15/4 \\ \mu_3 = 35/8 \end{cases} \quad \begin{cases} y_4 = 15/4 \\ \mu_4 = 65/16 \end{cases}$$

**b**) Dans le cas général désormais, une récurrence évidente amène à  $y_n \leq \mu_n$  pour tout  $n$  :  $(y_n)_n$  est croissante et  $(\mu_n)_n$  est décroissante.

**c**) De la question précédente on tire  $y_{n+1} \geq y_n$  et  $\mu_{n+1} \leq \mu_n$  pour tout  $n$ .

De plus pour tout  $n$ ,  $(\mu_{n+1} - y_{n+1}) = \frac{1}{2}(\mu_n - y_n)$ . La suite  $(\mu_n - y_n)_n$ , géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , converge vers 0.

Les suites  $(y_n)_n$  et  $(\mu_n)_n$  sont donc adjacentes. Le théorème des suites adjacentes donne leur convergence vers une même limite. Soit  $s$  leur limite commune.

**d**) Par construction,  $\mu_n$  est, pour tout  $n$ , un majorant de  $X$ . Ainsi tout  $x$  de  $X$  est un minorant de  $(\mu_n)_n$ . Celle-ci converge vers  $s$  donc  $x \leq s$ . On déduit donc que  $s$  est un majorant de  $X$ .

**e**) Par construction, pour  $n$  quelconque,  $\mu_n$  est un majorant de  $X$  et  $y_n$  n'est pas un majorant strict de  $X$  : il existe  $x_n$  dans  $X$  tel que  $y_n \leq x_n < \mu_n$ .

On a ainsi l'existence d'une suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $X$  pour laquelle le théorème des gendarmes donne la convergence vers  $s$ .

**f**)  $s$  est un majorant de  $X$ . Pour  $\varepsilon > 0$  quelconque, il existe au moins un  $n$  tel que  $s - \varepsilon < x_n \leq \varepsilon$ . Puisque  $x_n \in X$ ,  $s - \varepsilon$  n'est pas un majorant de  $X$ .

Ainsi  $s$  est la borne supérieure de  $X$ .