

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

Analyse

EXERCICE

Soit l'équation différentielle :

$$(e) : \quad x(x^2 + 1)y' - (x^2 - 1)y = -x^2 - 1$$

- 1°** Donner les solutions de (e) sur un intervalle I ne contenant pas 0. (on aura soin de donner toutes les étapes de la démarche).
- 2°** Donner un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction : $x \mapsto \frac{\arctan x}{x}(1 + x^2)$.
- 3°** Donner toutes les solutions de (e) sur \mathbb{R} .

PROBLÈME

Dans tout ce problème, on désigne par f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et par \mathcal{C}_f la courbe de f dans un repère orthonormé.

Partie A

1° a) Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.

b) Montrer que f est continue et dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

c) Préciser la position de \mathcal{C}_f par rapport à sa tangente en O .

2° Soit $h : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - \frac{x}{2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{2x} + 1} \end{cases}$

a) Etudier les variations de h sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer qu'il existe un réel strictement positif unique, α , tel que $h(\alpha) = 0$. En donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

3° a) Exprimer, pour $x > 0$, $f'(x)$ en fonction de $h(x)$.

b) Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$, puis sur \mathbb{R} .

c) Tracer \mathcal{C}_f .

Partie B

1° a) Soit $a > 0$, donner : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-ax}$.

b) Pour $a > 0$, montrer que $[x \mapsto x^2 e^{-ax}]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. (on notera $K(a) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax} dx$)

c) Calculer la valeur $K(a)$, pour $a > 0$.

2° Etablir que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. (on notera $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$)

3° Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : [x \mapsto f(x) e^{-2nx}]$.

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. (on notera, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$).

4° a) Etablir que $\frac{1 - e^{-2nx}}{1 - e^{-2x}}$ s'écrit sous forme d'une somme de n termes.

b) Calculer, pour $x \geq 0$, $f(x) - f_n(x)$, et en déduire : $I = 2 \sum_{j=0}^{n-1} K(2j+1) + I_n$.

PROBLÈME

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , et $E = M_3(\mathbb{R})$. On pose $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ et on note u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 admettant A pour matrice dans la base \mathcal{B} .

étude de la matrice

1° a) Déterminer les valeurs propres de u .

b) A est-elle inversible ?

c) A est-elle diagonalisable ?

2° On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'il existe une base \mathcal{E} de \mathbb{R}^3 telle que P soit la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{E} , et D soit la matrice de u dans la base \mathcal{E} .

b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

c) Montrer qu'une matrice Δ de E vérifie $\Delta D = D \Delta$ si et seulement si Δ est diagonale.

résolution de $X^2 = A$

1° Forme nécessaire d'une solution X vérifiant $X^2 = A$: on pose $Y = P^{-1} X P$.

a) Vérifier $Y^2 = D$.

b) Montrer : $Y D = D Y$.

c) Etablir que Y est de la forme : $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma' \end{pmatrix}$ avec γ et γ' dans $\{-1, 1\}$.

2° a) Donner alors la forme nécessaire d'une solution X de : $X^2 = A$.

b) Vérifier que toute matrice X de cette forme est solution.

3° a) Quel est le nombre m de solutions de l'équation du second degré dans E : $X^2 = A$?

b) Sans calculer explicitement ces m solutions X_1, X_2, \dots, X_m , déterminer leur somme $S = X_1 + X_2 + \dots + X_m$ et leur produit $T = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ en fonction de A .

puissances de A

1° Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer D^n , puis A^n , en fonction de n .

2° a, b et c sont trois réels. On considère les suites $(p_n)_n, (q_n)_n$ et $(r_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} p_0 &= a \\ q_0 &= b \\ r_0 &= c \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} p_{n+1} &= 16p_n + 4q_n - 4r_n \\ q_{n+1} &= -18p_n - 4q_n + 5r_n \\ r_{n+1} &= 30p_n + 8q_n - 7r_n \end{cases}$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Exprimer U_n en fonction de A et U_0 .

b) En déduire les expressions de p_n, q_n et r_n en fonction de n, a, b, c .

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que les suites $(p_n)_n, (q_n)_n$ et $(r_n)_n$ convergent.

F I N
