

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

DEVOIR D'ANALYSE

(durée conseillée 2 heures 10 ; en aucun cas n'y passer plus de 2 heures 30)

Cet exercice se propose de trouver les solutions du problème fonctionnel (P) :

$$\varphi \text{ solution de (P)} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} \varphi \text{ définie sur } \mathbb{R} \\ \varphi \text{ dérivable en } 0 \\ \forall x \quad \varphi(2x) = \frac{2\varphi(x)}{1+\varphi(x)^2} \end{cases}$$

Partie A

On rappelle la fonction tangente hyperbolique : la fonction $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}} : \left[x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right]$.

1° a) Montrer que th réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle I de \mathbb{R} que l'on précisera. On notera pour l'instant th^{-1} sa bijection réciproque.

b) Montrer que th^{-1} est impaire.

c) Montrer que th^{-1} est de classe C^∞ sur I .

d) Donner une expression de la dérivée de th^{-1} sur I .

2° On pose $f : \left[x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]$.

a) Caractériser l'ensemble de définition de f et préciser sa classe de continuité sur chacun des intervalles où elle est définie.

b) Montrer que f est impaire.

c) Établir que la restriction de f à $] -1, 1[$ est la bijection réciproque de th . Celle-ci sera désormais notée argth^1 (ainsi $\text{argth} = \text{th}^{-1} = f|_{]-1, 1[}$).

d) Donner un développement limité d'ordre 6 en 0 de la fonction argth .

¹elle se nomme le plus souvent "argument tangente hyperbolique"

Partie B

On définit l'équation différentielle (e) : $xy' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$

- 1° Résoudre (e) sur l'intervalle $J =]0, 1[$.
- 2° (e) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, 1[$?

Partie C

On cherche ici quelques propriétés des solutions du problème (P).

- 1° Établir que th est solution de (P).
- 2° Déterminer les fonctions constantes solutions de (P).
- 3° Quelles sont les images possibles de 0 par une solution φ de (P) ?
- 4° Justifier que pour φ une solution de (P), la fonction $-\varphi$ est aussi solution de (P).
- 5° Pour φ une solution de (P) et x un réel, établir $|\varphi(x)| \leq 1$. (on aura intérêt à envisager $|\varphi(\frac{x}{2})|$).

Partie D

On considère ici, s'il en existe, une solution φ du problème (P) non constante, telle que $\varphi(0) = 1$.

On choisit alors a réel vérifiant $0 < \varphi(a) < 1$. On pose alors $\forall n, u_n = \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right)$.

- 1° Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge. Quelle est sa limite ?
- 2° a) Établir une relation entre u_n et u_{n+1} .
b) Montrer $\forall n, u_n \geq 0$.
c) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
- 3° Montrer que les hypothèses faites ici sur φ sont contradictoires. Que peut-on en déduire ?
- 4° Indiquer quelles sont les solutions du problème (P) prenant la valeur -1 en 0.

Partie E

On considère ici, s'il en existe, une solution φ du problème (P) non constante, telle que $\varphi(0) = 0$. On admet qu'un raisonnement analogue à celui de la partie D donnera

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) \neq 1, \varphi(x) \neq -1$$

On pose alors $\forall x, \psi(x) = \operatorname{argth}(\varphi(x))$.

- 1° Montrer $\forall x, \psi(2x) = 2\psi(x)$.
- 2° Montrer que ψ est dérivable en 0.
- 3° On prend $x \neq 0$, et on pose $\forall n, v_n = \frac{2^n}{x} \psi\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
a) Montrer que la suite $(v_n)_n$ converge et donner sa limite.
b) Établir que la suite $(v_n)_n$ est constante et en déduire que la fonction ψ est linéaire.
- 4° Conclure quant aux solutions du problème (P).

DEVOIR D'ALGÈBRE

(durée conseillée 1 heure 45 ; en aucun cas n'y passer plus de 2 heures 20)

Les parties sont dans une large mesure indépendantes.

Partie A

n est un entier naturel non nul et dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $A = (X + 1)^{2n} - 1$.

1° Montrer qu'on peut écrire $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0 .

2° a) Déterminer les racines de A dans \mathbb{C} . (on posera $z_0 = 0$ et les autres racines, z_1, \dots, z_{2n-1} seront données sous forme algébrique puis mises sous forme trigonométrique).

b) Donner $\sum_{k=0}^{2n-1} z_k$ et $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.

Partie B

On choisit un \mathbb{C} -espace vectoriel E non réduit au vecteur nul. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E , id_E est l'endomorphisme identité, et θ_E est l'endomorphisme nul. (par convention, pour $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, on prendra $\varphi^0 = id_E$).

On étudiera ici sur quelques cas particuliers l'équation $(e) : (\varphi + id_E)^{2n} - id_E = \theta_E$ d'inconnue $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1° Déterminer les homothéties vectorielles solutions de l'équation (e) .

2° a) Rappeler pourquoi on a : $\sum_{k=0}^n \mathbf{C}_{2n}^{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{C}_{2n}^{2k+1} = 2^{2n-1}$.

b) Soit σ une symétrie vectorielle de E . Dans le cas où σ est solution de (e) , exprimer $(\sigma + id_E)^{2n} - id_E$ en fonction de σ et de id_E .

c) En déduire que (e) n'admet aucune symétrie vectorielle pour solution.

Partie C

On travaille ici dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, avec $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (par convention, pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on prendra $M^0 = I_3$).

On pose, pour a et b dans \mathbb{C} , $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ et on note $G = \{M_{a,b} / (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$.

1° a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) Préciser la dimension de G et en donner une base.

c) Vérifier que G est stable par produit matriciel (i.e. que G est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$).

On cherche à résoudre sur G l'équation $(f) : (M + I_3)^{2n} - I_3 = O_3$ d'inconnue M .

On note E le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On choisit M dans G non colinéaire à I_3 (c'est-à-dire $M = M_{a,b}$ avec $b \neq 0$). On pose enfin u l'endomorphisme de E de matrice M dans la base \mathcal{B} .

- 2°** Soit $E_1 = \text{Ker}(u - (a + 2b).id_E)$. Donner une base (e'_1) de E_1 .
- 3°** Soit $E_2 = \text{Ker}(u - (a - b).id_E)$. Donner une base (e'_2, e'_3) de E_2 .
- 4°** **a)** Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E .
- b)** En déduire que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E .
- c)** Donner $D = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.
- 5°** On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .
- a)** Écrire P .
- b)** Déterminer P^{-1} .
- 6°** **a)** Montrer que M est solution de (f) si et seulement si D est solution de (f) .
- b)** Déterminer toutes les matrices diagonales solutions de (f) .
- c)** En déduire l'ensemble des solutions dans G de l'équation (f) .

F I N
