

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(5 points)

On rappelle qu'une fonction définie en a est dite *continue en a* si et seulement si elle admet une limite réelle en a .

Soit la fonction f de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} qui à tout nombre irrationnel associe 0 et à tout nombre rationnel qui s'écrit $\frac{p}{q}$ sous forme de fraction irréductible associe $\frac{1}{q}$.

exemples : $f(\sin(\frac{\pi}{4})) = 0$ (puisque $\frac{1}{\sqrt{2}}$ irrationnel), $f(\cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{1}{2}$ et $f(\frac{15}{35}) = \frac{1}{7}$ (puisque $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ et $\frac{3}{7}$ irréductible).

1° Pour $n \geq 2$ quelconque dans \mathbb{N} , on pose $u_n = \frac{n + \sqrt{2}}{2n}$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge.

b) Pour $n \geq 2$, donner $f(u_n)$.

c) Montrer que f n'est pas continue en $\frac{1}{2}$.

2° Avec $\epsilon > 0$ on pose $E_\epsilon = \{x \in]0, 1[\mid f(x) > \epsilon\}$.

a) Caractériser E_1 , $E_{1/2}$ et $E_{1/8}$.

b) Pour ϵ quelconque, montrer que E_ϵ est fini.

3° On choisit $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

a) Justifier que pour $\epsilon > 0$ donné, f est majorée par ϵ sur tout un intervalle ouvert de centre a .

b) En déduire que f est continue en a .

PROBLÈME

(15 points)

E désigne l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa structure canonique. On note \mathcal{F} le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ; son vecteur nul, $[x \mapsto 0]$, est notée O . On note

$$p : [x \mapsto \exp(x) = e^x] \quad q : [x \mapsto \exp(2x) = e^{2x}] \quad r : [x \mapsto \exp(x^2) = e^{x^2}]$$

et enfin $\mathcal{E} = \text{Vect}(p, q, r)$ le sous-espace vectoriel de \mathcal{F} engendré par p, q et r (en fait par la partie $\{p, q, r\}$).

Partie A

Chaque élément de \mathcal{E} s'écrit comme une combinaison linéaire de p , q et r . On se propose de montrer que cette décomposition est unique.

1° cas du vecteur nul : O s'écrit $O = 0.p + 0.q + 0.r$ et aussi $O = a.p + b.q + c.r$ avec a , b et c réels.

a) première méthode.

Evaluer $(a.p + b.q + c.r)(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$ et déduire $a = b = c = 0$.

b) deuxième méthode.

Evaluer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}(a.p + b.q + c.r)(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x}(a.p + b.q + c.r)(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(a.p + b.q + c.r)(x)$ et déduire $a = b = c = 0$.

2° cas d'un vecteur quelconque : montrer que pour f quelconque de \mathcal{E} , la décomposition $f = a.p + b.q + c.r$ avec a , b et c réels est unique.

3° On note $\psi : \begin{cases} \mathcal{E} & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & (f(0), f'(0), f(1)) \end{cases}$

a) Montrer que ψ est une application linéaire.

b) Justifier que ψ est un isomorphisme de \mathcal{E} sur E et expliciter ψ^{-1} .

Partie B

On pose $\varphi : \begin{cases} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ f & \mapsto & A.p + B.q + C.r \end{cases}$ avec $\begin{cases} A = \frac{2}{e-1} f(0) + f'(0) + \frac{2}{e(e-1)} f(1) \\ B = \frac{-1}{e-1} f(0) - \frac{1}{e(e-1)} f(1) \\ C = \frac{e-2}{e-1} f(0) - f'(0) - \frac{1}{e(e-1)} f(1) \end{cases}$

1° a) θ étant l'endomorphisme de E défini par $\theta(a, b, c) = (a, b, -c)$ (pour tout (a, b, c) de E), montrer : $\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi$.

b) En déduire que φ est un automorphisme de \mathcal{E} .

2° Exprimer $\varphi(p)$, $\varphi(q)$ et $\varphi(r)$ en fonction de p , q et r .

3° Déterminer $\varphi \circ \varphi$. Que peut-on dire de φ ?

Partie C

On se propose de caractériser $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} / \varphi(f) = f\}$ et $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} / \varphi(f) = -f\}$

1° Montrer que \mathcal{P} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} ; on admettra que \mathcal{D} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} .

2° Etablir : $f \in \mathcal{P} \iff f(1) = 0$.

3° En déduire $\mathcal{P} = \text{Vect}(p - r, q - e.r)$.

4° Etablir : $f \in \mathcal{D} \iff f(0) = f'(0) = 0$.

5° En déduire $\mathcal{D} = \text{Vect}(-2.p + q + r)$.

6° Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{D} sont supplémentaires.

7° Caractériser géométriquement φ .

F I N
