

I.S.E.P.

Cycle préparatoire

Math.Sup. 2

Devoir 5

Mathématiques

26 janvier 1998

durée 3 heures 30

sans calculatrice

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

Partie A

Soit I l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et f la fonction définie sur I par :
$$\begin{cases} f(x) &= \frac{\ln(1+2x)}{x} - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) &= 1 \end{cases}$$

1° Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

2° a) Etablir la continuité de f sur I .

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$. f' est-elle continue en 0 ?

c) Etudier les variations de f sur I .

d) Montrer que f s'annule en un unique point de I ; celui-ci sera noté α .

Donner la partie entière de α . (on admettra que sa partie décimale vaut 0,25 par défaut à 10^{-2} près).

3° Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan (2cm d'unité).

Partie B

On note g la fonction $[x \mapsto \ln(1+2x)]$ et on définit la suite $(u_n)_n$ par la donnée de $u_0 \in]0, \alpha]$ et la relation : $\forall n \ u_{n+1} = g(u_n)$.

1° Vérifier que u_n est défini pour tout n .

2° a) Etablir : $\forall n \ u_n \in]0, \alpha]$

b) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

d) Etablir : $\lim_n u_n = \alpha$.

3° On choisit désormais $u_0 = 1$.

a) Montrer que pour tout n , $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) Donner un rang à partir duquel on est sûr que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Partie C

On note F la primitive de f sur I nulle en 0.

1° Etudier les variations de F (sans chercher ici les limites de F aux bornes de I).

2° Montrer : $F(x) \underset{0}{\sim} x$.

3° Etablir $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$.

4° a) Pour $t \in \left] -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right]$, montrer : $\ln(1+2t) \geq \frac{-1}{\sqrt{1+2t}}$ puis $f(t) \leq \frac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1$.

b) En déduire que $F(x) - F\left(\frac{-1}{4}\right)$ est minoré pour $x \in \left] -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right]$.

c) Prouver que F peut être prolongée par continuité en $-\frac{1}{2}$ à droite.

5° Donner, sur le même dessin que f , l'allure plausible de la courbe de F .

$F I N$
