

1

CORRIGÉ

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $F(n, p) = \text{card} \left\{ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p / \sum_{k=1}^p x_k = n \right\}$

a) $F(2, 3) = 6$ car

$$2 = 2 + 0 + 0 \quad 2 = 0 + 2 + 0 \quad 2 = 0 + 0 + 2 \quad 2 = 0 + 1 + 1 \quad 2 = 1 + 0 + 1 \quad 2 = 1 + 1 + 0$$

b) $F(6, 2) = 7$ car

$$6 = 6 + 0 \quad 6 = 5 + 1 \quad 6 = 4 + 2 \quad 6 = 3 + 3 \quad 6 = 2 + 4 \quad 6 = 1 + 5 \quad 6 = 0 + 6$$

c) $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $(x_1, \dots, x_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{p+1} x_k = n$, on a $0 \leq x_{p+1} \leq n$ et $n - x_{p+1} = \sum_{k=1}^p x_k$.

$$\text{Ainsi } \left\{ (x_1, \dots, x_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1} / \sum_{k=1}^{p+1} x_k = n \right\} = \bigcup_{j=0}^n \left\{ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p / \sum_{k=1}^p x_k = n - j \right\}.$$

$$\text{Donc } F(n, p+1) = \sum_{k=0}^n F(k, p)$$

d) $p \geq 1$. Montrons par récurrence sur n l'assertion $\mathcal{P}(n) : C_{n+p}^p = \sum_{k=0}^n C_{k+p-1}^{p-1}$.

. $C_p^p = C_{p-1}^{p-1} = 1$ don $\mathcal{P}(0)$ vraie.

. n quelconque. supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $C_{n+p}^p = \sum_{k=0}^n C_{k+p-1}^{p-1}$. Alors $\sum_{k=0}^{n+1} C_{k+p-1}^{p-1} = C_{n+p}^p + C_{n+1+p-1}^{p-1} =$

C_{n+1+p}^p , donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

. Le théorème de récurrence donne donc

$$\forall n \forall p \geq 1 \quad C_{n+p}^p = \sum_{k=0}^n C_{k+p-1}^{p-1}$$

e) Le rapprochement des deux résultats précédents suggère la conjecture $F(n, p) = C_{n+p-1}^{p-1}$ pour tous n et $p \geq 1$.

Montrons par récurrence sur p l'assertion $\mathcal{Q}(p) : \forall n \quad F(n, p) = C_{n+p-1}^{p-1}$.

. n quelconque. $F(n, 1) = 1 = C_{n+1-1}^{1-1}$ donc $\mathcal{Q}(p)$ vraie.

. p quelconque ; supposons $\mathcal{Q}(p)$ vraie.

Alors, pour un n quelconque, on a $F(n, p+1) = \sum_{k=0}^n F(k, p) = \sum_{k=0}^n C_{k+p-1}^{p-1} = C_{n+p}^p = C_{n+(p+1)-1}^{(p+1)-1}$ qui donne $\mathcal{Q}(p+1)$

vraie.

. Le principe de récurrence permet de conclure :

$$\forall p \geq 1 \quad \forall n \quad F(n, p) = C_{n+p-1}^{p-1}$$

2

CORRIGÉ

$(u_n)_n$ est bornée. On pose : $\forall n \quad u'_n = \max_{i \leq n} u_i$.

1° Dans le cas particulier $\forall n \quad u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$, la suite $(u'_n)_n$ est constante à u_0 , puisque $u_0 = 2$ et $\forall n \quad u_n \leq 2$.

2° $(u_n)_n$ coïncide avec $(u'_n)_n$ si et seulement si $\forall n \quad u_n = \max_{i \leq n} u_i$, donc si et seulement si $\forall n \geq 1 \quad u_n \geq u_{n-1}$. C'est la condition de la croissance de $(u_n)_n$.

3° Dans le cas général,

a) L'image de $(u'_n)_n$ est incluse dans l'image de $(u_n)_n$ donc est bornée.

b) $(u'_n)_n$ est croissante, donc convergente puisqu'elle est bornée. En effet, pour tout n , $u'_{n+1} = \max\{u_i / i \leq n+1\}$ et $u'_n \in \{u_i / i \leq n+1\}$, donc $\forall n \quad u'_{n+1} \geq u'_n$.

3

CORRIGÉ

A Soit $f : \left[x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]$.

1° a) Cette fonction est désormais connue comme ch.

b) $[f(x) = 1 \iff x = 0]$ puisque $f(0) = 1$, f strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et f strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$.

c) On a $f' : \left[x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]$ donc $f'' = f$. Puisque $\forall x \quad f(x) \geq 1$, la fonction $[x \mapsto f'(x) - x]$ de dérivée positive ou nulle est croissante sur \mathbb{R} . Ayant $f'(0) = 0$, on a $\forall x \geq 0 \quad f'(x) \geq x$.

d) f primitive de f' sur \mathbb{R} donc $f(x) = 1 + \int_0^x f'(t) dt$ pour tout x . Puisque $\forall t \geq 0 \quad f'(t) \geq t$, on a $\int_0^x f'(t) dt \geq \frac{x^2}{2}$

e) De même, on a $\forall x \quad f'(x) = \int_0^x f''(t) dt$ et $f'' = f$.

Donc $\forall 0 \leq x \leq 1 \quad f(x) \leq 24$ permet de déduire $\forall x \leq 0 \quad f'(x) \leq 24x$ puis $0 \leq x \leq 1 \quad f(x) \leq 1 + 12x^2$ puis $\forall 0 \leq x \leq 1 \quad f'(x) \leq x + 4x^3$ et enfin $\forall 0 \leq x \leq 1 \quad f(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} + x^4$.

B On définit la suite $(u_n)_n$ par la relation de récurrence :
$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{f(u_n)} \text{ pour tout } n \end{cases}$$

2° a) Une récurrence évidente donne $\forall n \quad u_n > 0$. f est à images dans $[1, +\infty[$ et $[f(x) = 1 \iff x = 0]$ donc $\forall n \quad f(u_n) > 1$ donc $\forall n \quad u_{n+1} < u_n$. La suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante.

b) $(u_n)_n$ minorée par 0 et décroissante, donc convergente.

c) Soit ℓ la limite de $(u_n)_n$. On a $\lim_n u_{n+1} = \ell$, et puisque f est continue, $\ell = \frac{\ell}{f(\ell)}$. Ainsi $\ell = 0$ ou $f(\ell) = 1$ (qui se traduit aussi par $\ell = 0$).

C On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

3° a) $(u_n)_n$ décroissante à valeurs positives donc $(v_n)_n$ est à valeurs négatives.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $0 < u_{n+1} < u_n$. f est croissante sur $[0, +\infty[$. Alors $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{1}{f(u_{n+1})} \geq \frac{1}{f(u_n)} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ donc $v_{n+1} \geq v_n$. On a ainsi $(v_n)_n$ croissante. Elle est majorée par 0 donc convergente.

c) Soit $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln\left(\frac{u_n}{u_0}\right) = \ln(u_n)$. Ainsi $\lim_n U_n = -\infty$.

D On cherche à estimer v_n plus finement à partir de u_n .

4° a) $\forall n$ $0 < u_n \leq 1$ et $\forall 0 \leq x \leq 1$ $1 + \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} + x^4$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{1}{f(u_n)} - 1 = \frac{1 - f(u_n)}{f(u_n)}$. Or $-\frac{u_n^2}{2} - u_n^4 \leq 1 - f(u_n) \leq -\frac{u_n^2}{2}$ et $f(u_n) > 0$ donc $\frac{-u_n^2 - 2u_n^4}{2f(u_n)} \leq v_n \leq \frac{-u_n^2}{2f(u_n)}$.

b) $\forall n$ $f(u_n) \geq 1$ et $\lim_n u_n = 0$ donc $\lim_n v_n = 0$.

c) Le théorème des gendarmes donne simplement $\lim_n \frac{v_n}{u_n^2} = -\frac{1}{2}$

F I N
