

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(9 points)

$$\text{Soit } f : \begin{cases}]\frac{1}{2}, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x^2}{2x-1} \end{cases}$$

1° a) Établir $\forall x (x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 1)$.**b)** Montrer $\forall x f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8x-4}$.**2°** On pose $(s) : \begin{cases} u_0 & = 2 \\ \forall n \ u_{n+1} & = f(u_n) \end{cases}$ **a)** Montrer que (s) définit sur \mathbb{N} une suite $(u_n)_n$ de réels.**b)** Illustrer graphiquement la construction des termes de la suite $(u_n)_n$.**3° a)** Établir la monotonie de la suite $(u_n)_n$.**b)** Prouver que $(u_n)_n$ est convergente.**4°** On pose $\forall n \ v_n = \ln \left(\frac{u_n - 1}{u_n} \right)$ **a)** Établir que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique.**b)** En déduire une expression du terme général de $(u_n)_n$ en fonction de n .**c)** Donner la limite de $(u_n)_n$.**5° a)** Établir $\forall n (u_{n+1} - 1) \leq (u_n - 1)^2$.**b)** En déduire $\forall n \geq 1 (u_n - 1) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}$.**c)** Donner un rang à partir duquel il est certain que $1 \leq u_n \leq 1 + 10^{-5}$

EXERCICE 2

(7 points)

Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ admet ℓ pour limite. L'exercice se propose d'établir que $(\sqrt[n]{u_n})_n$ admet aussi ℓ pour limite.

1° À titre de préliminaire, prouver que pour un réel a positif quelconque, $(\sqrt[n]{a})_n$ converge vers 1. (on pourra utiliser les propriétés connues en terminale de la fonction \ln).

2° Étude du cas $\ell = 0$.

a) Pour $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un entier N tel que $u_n < \varepsilon^{n-N} u_N$ pour $n \geq N$.

b) En déduire la convergence de $(\sqrt[n]{u_n})_n$ vers $\ell = 0$.

3° Pour $\ell = +\infty$, établir la propriété demandée. (on pourra s'aider de la suite $1/u$).

4° Soit ℓ réel positif.

a) Soit $0 < \varepsilon < \ell$. Prouver l'existence d'un entier N , d'une suite $(v_n)_n$ convergeant vers $(\ell - \varepsilon)$ et d'une suite $(w_n)_n$ convergeant vers $(\ell + \varepsilon)$ tels que : $\forall n > N \ v_n \leq \sqrt[n]{u_n} \leq w_n$.

b) En déduire le résultat cherché pour $\ell > 0$.

5° Prouver la convergence et donner les limites des suites de terme général $a_n = \sqrt[n]{C_{2n}^n}$ et $b_n = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

EXERCICE 3

(5 points)

$(u_n)_n$ est une suite de réels positifs, vérifiant pour tout n $u_{n+2} \leq \frac{1}{2} (u_{n+1} + u_n)$. On se propose d'en démontrer la convergence. Pour ça on pose $\forall n \ v_n = \max(u_n, u_{n-1})$.

a) Montrer : $\forall n, u_n \leq v_n$.

b) Établir que $(v_n)_n$ est décroissante.

c) En déduire que $(v_n)_n$ converge. Soit ℓ sa limite.

d) Montrer par l'absurde : $\forall n, u_n \geq 2\ell - v_n$.

e) En déduire la convergence de $(u_n)_n$.

F I N