

1 LECTURES QUANTIFIÉES

CORRIGÉ

Soit $f : E \longrightarrow F$. Traductions

- | | |
|--|--|
| a) $\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad f(x) = y.$ | F a un seul élément ou bien E et F sont vides. |
| b) $\forall x \in E \quad \exists y \in F \text{ t.q. } f(x) = y.$ | rien de spécial. |
| c) $\exists x \in E \text{ t.q. } \forall y \in F \quad f(x) = y.$ | F a un seul élément. |
| d) $\exists x \in E \text{ t.q. } \exists y \in F \text{ t.q. } f(x) = y.$ | rien de spécial sinon E et F non vides. |
| e) $\forall y \in F \quad \forall x \in E \quad f(x) = y.$ | F a un seul élément ou bien E et F sont vides. |
| f) $\forall y \in F \quad \exists x \in E \text{ t.q. } f(x) = y.$ | f est surjective. |
| g) $\exists y \in F \text{ t.q. } \forall x \in E \quad f(x) = y.$ | f est constante. |
| h) $\exists y \in F \text{ t.q. } \exists x \in E \text{ t.q. } f(x) = y.$ | rien de spécial sinon E et F non vides. |

2 LECTURES ORDONNÉES

CORRIGÉ

$E = \mathcal{F}([0; 1], \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . On définit sur E la relation \preccurlyeq par :

$$f \preccurlyeq g \iff \forall x \in [0; 1], \quad f(x) \leq g(x)$$

- a) On établit facilement que la relation \preccurlyeq est réflexive, antisymétrique et transitive : c'est une relation d'ordre sur E .
- b) Cet ordre n'est pas total puisque les fonctions définies sur $[0; 1]$ par $\left[x \mapsto x \right]$ et $\left[x \mapsto 1 - x \right]$ ne sont pas comparables.
- c) Soit $f \in E$. La phrase $p_1 : \ll f \text{ est majorée} \gg$ signifie qu'il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout x de $[0; 1]$. La phrase $p_2 : \ll \{f\} \text{ est majoré} \gg$ signifie elle qu'il existe une fonction g de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} telle que $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $[0; 1]$. Ainsi p_2 est nécessaire pour p_1 , la constante M convenant très bien. Par contre p_1 n'est pas nécessaire pour p_2 comme le montre le contreexemple de $f : \left[x \mapsto \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, 0 \text{ sinon} \right]$ non majorée bien que vérifiant $f \preccurlyeq f + 1$.
- d) $F = \{f_i / i \in \mathbb{N}\}$ est une partie de E majorée ; soit φ un majorant de F .

On a donc $f_i \preccurlyeq \varphi$ pour tout i . Donc, i étant fixé, $f_i(x) \leq \varphi(x)$ pour tout x de $[0; 1]$.

Ainsi x étant fixé dans $[0; 1]$, $\{f_i(x) / i \in \mathbb{N}\}$ est majoré par $\varphi(x)$. Cet ensemble non vide de réels admet alors une borne supérieure, notée $\psi(x)$.

Pour tout x de $[0; 1]$ on a alors $f_i(x) \leq \psi(x) \leq \varphi(x)$ pour tout i . ψ est donc bien le plus petit des majorants de F , c'est la borne supérieure de F .

1° Soit l'équation différentielle $(\arctan x) y' - \frac{1}{1+x^2} y = (\arctan x)^2 \quad (\mathbf{E}).$

a) Soit I un intervalle ne contenant pas 0. L'équation homogène (\mathbf{E}') : $(\arctan x) y' - \frac{1}{1+x^2} y = 0$ admet sur I pour solutions les $\left[x \mapsto k \arctan x \right]$ où $k \in \mathbb{R}$.

Pour chercher les solutions de (\mathbf{E}) sur I la méthode de la variation de la constante amène à chercher une fonction k telle que $(\arctan x) k'(x) \arctan x = (\arctan x)^2$ sur I .

Les solutions de (\mathbf{E}) sur I sont donc les $\left[x \mapsto (x+c) \arctan x \right]$ où $c \in \mathbb{R}$.

b) Soit s une solution de (\mathbf{E}) sur \mathbb{R} , i.e. s est une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $(\arctan x) s'(x) - \frac{1}{1+x^2} s(x) = (\arctan x)^2$ pour tout réel x . Cette propriété est vérifiée en tout réel négatif donc la restriction de s à $] -\infty; 0[$ est solution de (\mathbf{E}) sur $] -\infty; 0[$. De même la restriction de s à $]0; +\infty[$ est solution de (\mathbf{E}) sur $]0; +\infty[$.

c) De la question précédente on déduit que pour s une solution de (\mathbf{E}) sur \mathbb{R} il existe deux réels c_1 et c_2 tels que $s(x) = (x+c_1) \arctan x$ pour $x < 0$ et $s(x) = (x+c_2) \arctan x$ pour $x > 0$.

Par ailleurs s est dérivable en 0 et $-s(0) = 0$. Ceci impose $c_1 = c_2 = c$. La fonction candidate $\left[x \mapsto (x+c) \arctan x \right]$ est bien solution de (\mathbf{E}) sur \mathbb{R} .

La solution de (\mathbf{E}) sur \mathbb{R} qui s'annule en 1 est unique, c'est $\left[x \mapsto (x-1) \arctan x \right]$.

2° Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_a : \left[x \mapsto f_a(x) = (x+a) \arctan x \right]$. On note \mathcal{C}_a la courbe représentant la fonction f_a dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Pour x réel, remarquons $f_a(-x) = f_{-a}(x)$. Ainsi les courbes \mathcal{C}_{-a} et \mathcal{C}_a sont symétriques par rapport à l'axe (O, \vec{j}) . On prend désormais $a \geq 0$.

b) Pour x quelconque on a f_a deux fois dérivable sur \mathbb{R} , $f'_a(x) = \arctan x + \frac{x+a}{1+x^2}$ pour tout x , donc f'_a a pour limite $-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et $+\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$. De plus $f''_a(x) = \frac{2}{1+x^2} - 2 \frac{(x+a)x}{(1+x^2)^2}$ pour tout x .

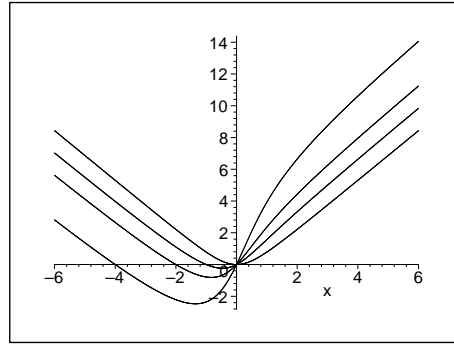
f'_0 est alors strictement croissante sur \mathbb{R} , s'annule en 0.

Pour $a > 0$, f'_a est strictement croissante sur $] -\infty; \frac{1}{a}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{a}; +\infty[$. Valant a en 0, on a $f'_a(\frac{1}{a}) > 0$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires on a alors l'existence d'une solution négative de l'équation $f'_a(x) = 0$. Les variations de f'_a donnent l'unicité de la solution, notée α , pour cette équation.

Alors f_a est strictement décroissante sur $] -\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

c) $a > 0$. Pour $x > 0$ on a $\frac{f_a(x)}{x} = (1 + \frac{a}{x}) \arctan x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_a(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$. De plus $f_a(x) - \frac{\pi}{2}x = x(\arctan x - \frac{\pi}{2}) + a \arctan x = a \arctan x - x \arctan \frac{1}{x}$. Or, puisque \arctan est dérivable en 0, on a $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan u}{u} = 1$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) - \frac{\pi}{2}x = \frac{a\pi}{2} - 1$ et la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}a - 1$ est asymptote à \mathcal{C}_a en $+\infty$. \mathcal{C}_a est sous cette asymptote puisque $\arctan u \leq u$ lorsque $u \geq 0$.

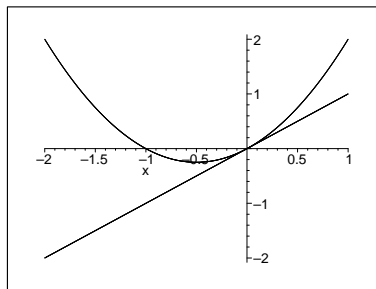


4 DIVERGENCE COMPLEXE

CORRIGÉ

Soit la suite $(u_n)_n$ telle que $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ pour tout n , u_0 étant donné. On pose $f : \left[x \mapsto x^2 + x \right]$.

u_0 réel



1° a) On a $f(x) \geq x$ pour tout x , 0 étant la solution unique de l'équation $f(x) = x$.

Par ailleurs, f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ d'image $[0; +\infty[$. f est strictement croissante sur $[-\frac{1}{2}; 0]$ d'image $[-\frac{1}{4}; 0]$.

Pour $u_0 \in [-\frac{1}{4}; 0]$ on a donc par récurrence évidente $-\frac{1}{4} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$ pour tout n . $(u_n)_n$ converge alors, sa limite ne pouvant être que 0.

Pour $u_0 > 0$ alors $0 < u_n < u_{n+1}$ pour tout n . $(u_n)_n$ est croissante, elle admet une limite qui ne peut être que $+\infty$.

b) Pour $u_0 < -1$ on a $u_1 > 0$ et on est ramené au cas de divergence de $(u_n)_n$ vers $+\infty$.

Pour $u_0 \in [-1; -\frac{1}{4}]$ on a $u_1 \in [-\frac{1}{4}; 0]$ et on est ramené au cas de convergence de $(u_n)_n$ vers 0.

2° Vitesse de convergence pour $u_0 \in]-1; 0[$.

a) On a $-1 < u_0 < 0$ et $-\frac{1}{2} < u_1 < 0$. Or pour $-\frac{1}{n+1} < u_n < 0$ on a $\frac{-n}{(n+1)^2} = f(-\frac{1}{n+1}) < u_{n+1} < 0$. Ayant $\frac{-n}{(n+1)^2} > -\frac{1}{n+2}$ pour tout n , le théorème de récurrence donne, pour tout $n > 0$, on a $-\frac{1}{n+1} < u_n < 0$.

b) On pose $v_n = n u_n$ pour tout n . Pour n quelconque on a $v_{n+1} - v_n = u_n ((n+1)u_n + 1) \leq 0$. $(v_n)_n$ est décroissante.

c) De $-\frac{1}{n+1} < u_n < 0$ on tire $-1 < v_n < 0$ pour tout n . $(v_n)_n$ est décroissante minorée, elle converge. Sa limite ℓ appartient à $[-1; 0[$.

3° On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$ pour tout n .

a) Pour n quelconque, $w_n - v_n(1 + v_n) = n v_{n+1} - n v_n - v_n - v_n^2 = n u_n^2$. Or $\lim_n u_n v_n = 0$ $\ell = 0$.

De $w_n = v_n(1 + v_n) + n u_n^2$ on tire alors que $(w_n)_n$ converge vers $\ell(1 + \ell)$.

b) L'hypothèse $\ell > -1$ donne $\lim_n w_n < 0$. Il existe donc un réel $k < 0$ et un rang N tel que $w_n \leq k$ pour $n \geq N$. On a donc $v_{n+1} \leq v_n + \frac{k}{n}$ pour $n \geq N$. Une récurrence évidente donne alors $v_{n+1} \leq v_N + k \sum_{i=N}^n \frac{1}{i}$.

On sait $\lim_n \sum_{i=N}^n \frac{1}{i} = +\infty$ dont on déduit $\lim_n v_n = -\infty$.

c) Ceci est contradictoire donc $\ell = -1$. Notons que $\lim_n v_n = -1$ se traduit par $u_n \sim \frac{-1}{n}$.

u_0 **complexe**, $|u_0| \geq 2$

1° a) Soit z un complexe vérifiant $|z| \geq 2$. On a $|1+z| = |z-(-1)| \geq |z| - |-1| \geq 1$. L'égalité $|1+z| = 1$ impose $|z| = 2$ et $z, 0$ et -1 alignés ; ainsi l'égalité n'est vérifiée que pour $z = -2$.

b) Pour tout n , $u_{n+1} = u_n(u_n + 1)$. Puisque $|u_0| \geq 2$, le résultat précédent et une récurrence évidente donne $|u_n| \geq 2$ pour tout n .

Par ailleurs $|u_{n+2}| = 2$ impose $u_{n+1} = -2$. Ceci ne peut se produire puisque -2 n'a que deux antécédents par $f : \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1 + \sqrt{7}}{2}$ qui sont deux complexes de module inférieur à 2.

Ainsi $|u_n| > 2$ pour tout $n \geq 2$.

2° On pose $\varepsilon = |u_2| - 2$. On a $\varepsilon > 0$.

a) $|u_3| = |u_2| |1 + u_2| \geq |u_2| (1 + \varepsilon)$.

Soit $n \geq 3$; l'hypothèse $|u_n| \geq (1 + \varepsilon) |u_{n-1}|$ donne $|u_n + 1| \geq |u_n| - 1 \geq (1 + \varepsilon) |u_{n-1}| - 1 \geq 1 + \varepsilon$. Alors $|u_{n+1}| = |u_n| |u_n + 1| \geq (1 + \varepsilon) |u_n|$.

Ainsi par récurrence on a $|u_{n+1}| \geq (1 + \varepsilon) |u_n|$ pour tout $n \geq 2$.

b) De ce qui précède une récurrence évidente tire $|u_n| \geq (1 + \varepsilon)^{n-2} |u_2|$ pour $n \geq 2$. D'où $\lim_n u_n = +\infty$.

$F \mid N$
