

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**EXERCICE 1****vous avez dit parfaits ?**

( 4 points)

On dit qu'un entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  est parfait si et seulement si la somme de ses diviseurs dans  $\mathbb{N}$  vaut  $2n$ . (ex: 6 est parfait, 10, 11 et 12 ne le sont pas)

1° Les nombres  $E_q = 2^{q-1}(2^q - 1)$  où  $(2^q - 1)$  est premier sont dits les nombres d'Euclide.

a ) Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq 0$ , montrer que si  $k$  n'est pas premier, alors  $(2^k - 1)$  ne l'est pas non plus.

b ) Montrer que lorsque  $q$  est tel que  $(2^q - 1)$  est premier, le nombre d'Euclide  $E_q = 2^{q-1}(2^q - 1)$  est parfait.

2° Soit  $m$  un nombre parfait pair i.e.  $m = 2^k b$  où  $b$  impair et  $k$  positif.

a ) Donner la somme des diviseurs de  $b$  dans  $\mathbb{N}$ .

b ) En déduire que  $b$  est premier, puis que  $m$  est un nombre d'Euclide.

**PROBLÈME****une belle intégrale**

( 16 points)

L'objet du problème est le calcul de l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{x \ln x}{x+1} dx$ .

**fonction auxiliaire**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(0) = 0$  et  $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$  pour  $x > 0$ . (c'est l'intégrale de  $f$  sur  $[0, 1]$  qui sera notée  $I$ ).

1° Montrer que l'équation (e) :  $x + 1 + \ln x = 0$  admet sur  $]0, +\infty[$  une solution unique, comprise entre 0 et 1, qu'on notera  $\alpha$ .

2° a )  $f$  est-elle continue en 0 ?  $f$  est-elle dérivable en 0 ?

b ) Étudier les variations de  $f$  et préciser sa limite en  $+\infty$ .

c ) Soit  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère du plan. Déterminer les points d'intersection de  $(\mathcal{C})$  avec la droite d'équation  $y = -x$ . Représenter (rapidement) la courbe  $(\mathcal{C})$ .

## suite auxiliaire

Soit, pour  $n > 0$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ .

**1°** Déterminer  $a$  tel que, pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^\pi a t^2 \cos(pt) dt = \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$ .

**2°** Exprimer le terme  $S_n$  comme l'intégrale d'une somme de fonctions.

**3°** Vérifier, pour  $t$  non multiple de  $2\pi$ ,  $\sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$ .

**4°** On considère la fonction  $g$  définie par  $g(0) = 0$  et  $g(t) = \frac{t^2}{\sin \frac{t}{2}}$  pour  $t > 0$ . Justifier que  $g$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi[$ .

**5° a)** Vérifier alors :  $S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt$ .

**b)** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, si  $h$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi]$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^\pi h(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt \right| \leq \frac{|h(0)|}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \max\{|h'(t)|, t \in [0, \pi]\}$$

**c)** En déduire la limite de la suite  $(S_n)_n$ .

## calcul de $I$

Pour tout entier  $k \geq 1$ , on considère la fonction  $f_k$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f_k(0) = 0$  et  $f_k(x) = x^k \ln x$  si  $x > 0$ .

**1° a)** Étudier la continuité de  $f_1$  sur  $[0, 1]$ .

**b)** Pour  $k > 1$ , montrer que  $f_k$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et exprimer sa dérivée à l'aide de  $f_{k-1}$ .

**2°** Pour tout entier  $k \geq 1$ , calculer l'intégrale  $I_k = \int_0^1 f_k(t) dt$ .

**3°** Montrer que  $\left| I - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k \right| \leq m \int_0^1 x^n dx$  où  $m = \max\{|f(t)|, t \in [0, 1]\}$ .

**4°** En déduire la valeur de  $I$ .

---

F I N

---