

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(3 points)

Pour $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose :

$$\forall i \lambda_i(M) = \sum_{j=1}^3 a_{i,j}, \quad \forall j \gamma_j(M) = \sum_{i=1}^3 a_{i,j}, \quad \delta(M) = \sum_{k=1}^3 a_{k,k}, \quad d(M) = \sum_{k=1}^3 a_{k,4-k}$$

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite matrice magique¹ d'ordre 3 si et seulement si ces 8 nombres sont égaux. Cette valeur commune est alors appelée somme magique de M et notée $\varphi(M)$. On note Ψ l'ensemble de ces matrices et Ψ_0 le sous-ensemble de Ψ des matrices de somme magique nulle.

1° a) Montrer que Ψ est un \mathbb{R} -ev.

b) Vérifier que ${}^t M$ est magique si M est magique.

c) Montrer que $\varphi : \begin{cases} \Psi & \rightarrow \mathbb{R} \\ M & \mapsto \varphi(M) \end{cases}$ est une forme linéaire sur Ψ .

Déduire que Ψ_0 est un sous-espace vectoriel de Ψ .

d) Prouver $\Psi = \Psi_0 \oplus \text{Vect}(U_3)$ où $U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2° a) Pour $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$, $M \in \Psi$, établir $3.a_{2,2} = \varphi(M)$

b) Donner une matrice magique d'ordre 3, $M = (a_{ij})$, telle que $a_{1,1} = 67$, $a_{1,3} = 43$ et $a_{3,2} = 73$.

3° Donner la dimension, puis une base de Ψ_0 .

4° Donner la dimension de Ψ puis une base. Décomposer alors $L = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ dans cette base.

¹un carré magique d'ordre n est une matrice magique d'ordre n dont les n^2 coefficients sont les n^2 entiers de $[1, n^2]$. Le plus ancien connu est le "lo-shu", la matrice L , qui apparaît dans un livre attribué à Confucius (6ème siècle av. JC.) et dont la légende veut qu'il ait été vu sur le dos d'une tortue 2000 ans plus tôt.

EXERCICE 2

(4 points)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On définit sur E l'application $u : [P \mapsto X(P' + P'(0)) - 2(P - P(0))]$.

- 1° Montrer que u est un endomorphisme de E .
 - 2°
 - a) Caractériser les éléments du noyau de u .
 - b) Donner une base de $\text{Ker } u$.
 - c) Donner le rang de u .
 - d) Caractériser les éléments de $\text{Im } u$.
 - e) Montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires.
 - f) u est-il un projecteur de E ?
 - 3°
 - a) Donner les valeurs propres de u .
 - b) Montrer que u est diagonalisable.
 - c) Donner explicitement une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
-

EXERCICE 3

(7 points)

\mathcal{M} désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels dans lesquelles la somme des termes de chaque colonne vaut 1. M est un élément de \mathcal{M} , $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \beta \\ 1 - \alpha & \beta \end{pmatrix}$.

- 1° Montrer que \mathcal{M} est stable par multiplication.
- 2°
 - a) Justifier qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ de réels telles que $\forall n, M^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & 1 - \beta_n \\ 1 - \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}$.
 - b) Indiquer les valeurs α_0 et β_0 .
 - c) Donner les relations reliant α_{n+1} à α_n et β_{n+1} à β_n .
- 3°
 - a) Dans le cas particulier $\alpha + \beta = 1$, donner les valeurs de M^n .
 - b) Dans le cas particulier $\alpha + \beta = 2$, donner les valeurs de M^n .
- 4° On suppose $\alpha + \beta \neq 1$ et $\alpha + \beta \neq 2$; on pose alors $\gamma = \alpha + \beta - 1$.
 - a) Remarquer que les suites $\left(\alpha_n - \frac{1 - \beta}{1 - \gamma}\right)_n$ et $\left(\beta_n - \frac{1 - \alpha}{1 - \gamma}\right)_n$ sont géométriques.
 - b) En déduire les expressions de α_n et β_n en fonction de α, β et n .
 - c) Donner $\lim_n \alpha_n$ et $\lim_n \beta_n$ dans le cas $|\alpha + \beta - 1| < 1$.
- 5° On choisit $p \in]0, 1[$ et on pose $X_0 = \begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ où la suite $(X_n)_n$ vérifie $\forall n, X_{n+1} = M \times X_n$.

a) Exprimer pour n quelconque x_n et y_n en fonction de p, α, β, γ et n .

b) Montrer $\forall n, x_n + y_n = 1$.

c) Calculer $\lim_n x_n$ dans le cas particulier $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 4

(6 points)

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) ((O, \vec{i}) est pris comme repère polaire). Le réel a est positif et on note $A(a, 0)$. \mathcal{C} est le cercle de centre A et de rayon a .

1° La parabole Γ a pour foyer O et sa directrice est notée \mathcal{D}^1 .

Montrer que A appartient à Γ si et seulement si \mathcal{D} est tangente à \mathcal{C} .

2° Soit M un point de \mathcal{C} tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM})$ mesure θ . Donner en fonction de θ une équation de la tangente à \mathcal{C} en M .

3° a) En déduire que l'ensemble des sommets des paraboles passant par A et de foyer O est une courbe Λ d'équation polaire $2\rho = a(1 + \cos \theta)$.

b) Etudier et représenter cette courbe Λ .

F I N

¹ Γ est ainsi l'ensemble des points équidistants de O et \mathcal{D}