

1 SOUS LES PROJECTEURS

CORRIGÉ

1° φ est un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel E .

a) En général, $\text{Im}(\varphi \circ \varphi) \subset \text{Im}(\varphi)$.

Dans le cas $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$, pour $y \in \text{Im}(\varphi)$ on a l'existence de $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Or x s'écrit $a + b$, avec $a \in \text{Ker}(\varphi)$ et $b \in \text{Im}(\varphi)$. Alors $y = \varphi(b)$ et b s'écrit $b = \varphi(c)$. Ainsi $\text{Im}(\varphi) \subset \text{Im}(\varphi \circ \varphi)$.

On a donc dans ce cas $\text{Im}(\varphi \circ \varphi) = \text{Im}(\varphi)$.

b) La réciproque n'est pas vraie. Un contreexemple en est l'application qui à une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels associe la suite extraite $(u_n)_{n \geq 1}$ dont le noyau est l'ensemble des suites stationnaires à 0 à partir du rang 1, et l'image $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tout entier.

c) Soit p est un projecteur de E .

Pour $x \in E$, $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0_E$ et donc $(x - p(x)) \in \text{Ker}(p)$. Or $x = (x - p(x)) + p(x)$ et donc $x \in \text{Ker}(p) + \text{Im}(p)$.

$y \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$ impose $p(y) = 0_E$ et $y = p(x)$, $x \in E$. Alors on déduit $0_E = p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$. Ainsi $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \emptyset$ donc $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont supplémentaires.

2° p et q sont deux projecteurs de E tels que $p \circ q + q \circ p = O$.

a) Pour $x \in \text{Ker}(p)$ on a $(q \circ p)(x) = 0_E$ donc $(p \circ q)(x) = 0_E$.

b) Pour $x \in \text{Im}(p)$ on a $p(x) = x$ donc $p(q(x)) + q(x) = 0_E$. On tire $q(x) \in \text{Im}(p)$ puis $q(x) = 0_E$. Ainsi $(p \circ q)(x) = 0_E$.

c) $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont supplémentaires. Pour $x \in E$, on a $x = a + b$, $a \in \text{Ker}(p)$ et $b \in \text{Im}(p)$. Alors $(p \circ q)(a) = 0_E$ et $(p \circ q)(b) = 0_E$ donc $(p \circ q)(x) = 0_E$.

Ainsi $p \circ q = O$ et donc $q \circ p = O$.

3° p et q sont deux projecteurs quelconques de E .

$(p + q) \circ (p + q) = p + q + (p \circ q + q \circ p)$. Ainsi $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $(p \circ q + q \circ p) = O$ donc si et seulement si $p \circ q = O$ et $q \circ p = O$ d'après la question précédente. D'où si et seulement si $\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$.

4° a et b sont deux réels non nuls distincts. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $f \neq O$, vérifiant $(f - a \cdot \text{id}_E) \circ (f - b \cdot \text{id}_E) = O$. Ainsi $f \circ f = (a + b) \cdot f - ab \cdot \text{id}_E$. On note $p = \frac{1}{b-a} \cdot (f - a \cdot \text{id}_E)$ et $q = \frac{1}{a-b} \cdot (f - b \cdot \text{id}_E)$.

a) $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$ donc p et q sont deux projecteurs de E .

b) Ou bien on remarque $p + q = \text{id}_E$, ou bien on remarque $p \circ q = q \circ p = O$ qui donne $p + q$ projecteur de E avec les questions précédentes.

c) On obtient $f = b \cdot p + a \cdot q$.

d) Puisque p et q commutent dans l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, la formule du binôme de Newton donne, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (b \cdot p)^k \circ (a \cdot q)^{n-k} = b^n \cdot p^n + a^n \cdot q^n = b^n \cdot p + a^n \cdot q$$

e)En fait $p + q = id_E$ et il s'ensuit f bijective avec $f^{-1} = \frac{1}{b}.p + \frac{1}{a}.q$.

2 EN ROUTE VERS DE PI

CORRIGÉ

On définit sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ les fonctions $f_1 : \left[x \mapsto \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \right]$, $f_2 : \left[x \mapsto \frac{1}{3}(8 \sin \frac{x}{2} - \sin x) \right]$, $f_3 : \left[x \mapsto \sqrt[3]{\sin^2 x \tan x} \right]$, et enfin $f_4 : \left[x \mapsto \frac{1}{3}(2 \sin x + \tan x) \right]$.

1° a) On calcule les $DL_5(0)$ des fonctions données :

$$f_1(x) = x - \frac{1}{180} x^5 + o(x^6)$$

$$f_2(x) = x - \frac{1}{480} x^5 + o(x^6)$$

$$f_3(x) = x + \frac{1}{45} x^5 + o(x^6)$$

$$f_4(x) = x + \frac{1}{20} x^5 + o(x^6)$$

b)On en déduit bien sûr

$$f_1(x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{1}{180} x^5$$

$$f_2(x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{1}{480} x^5$$

$$f_3(x) - x \underset{0}{\sim} +\frac{1}{45} x^5$$

$$f_4(x) - x \underset{0}{\sim} +\frac{1}{20} x^5$$

c)Deux fonctions équivalentes en 0 ont même signe au voisinage de 0 et l'intersection de quatre voisinages de 0 est un voisinage de 0. Ainsi il existe δ positif tel que : $\forall x \in]0, \delta[$ $f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x)$.

Mais ceci n'indique qu'une propriété locale, sans précision de la "portée" de cet comportement : jusqu'à quelle taille peut-on prendre x pour "profiter" de cet encadrement et de la précision en x^5 ?

2° a) Soit $g : \left[x \mapsto 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 \right]$. On a $g(0) = 1$ et pour tout x $g'(x) = 6(4x^2 - 5x + 1)$. Donc $g(1) = 0$ est le minimum de g sur $[0, +\infty[$.

Soient a et b positifs. On a $\left[\frac{1}{3}(2a + b) \right]^3 - \left[\sqrt[3]{a^2 b} \right]^3 = \frac{1}{27} g\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$. On en déduit $\left[\frac{1}{3}(2a + b) \right] \geq \left[\sqrt[3]{a^2 b} \right]$.

D'où pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $[f_4(x) - f_3(x)] \geq 0$.

b) $u(x) = 3(2 + \cos x)[f_2(x) - f_1(x)] = (2 + \cos x)(8 \sin \frac{x}{2} - \sin x) - 3 \sin x$. Alors $u(x) = 12 \sin \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{3x}{2} - 11 \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x$.

On déduit $u'(x) = 6 \cos \frac{x}{2} + 6 \cos \frac{3x}{2} - 11 \cos x - \cos 2x = P(\cos \frac{x}{2})$ où $P : \left[x \mapsto -8x^4 + 24x^3 - 14x^2 - 12x + 10 \right]$.

Alors $u'(x) = -2(4 \cos^2 \frac{x}{2} - 4 \cos \frac{x}{2} - 5)(\cos \frac{x}{2} - 1)^2$ et donc $f_2 - f_1$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi $[f_2(x) - f_1(x)] \geq 0$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

c)On pose $v(x) = [x - f_2(x)]$. On a $v'(x) = 1 - \frac{4}{3} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \cos x = Q(\cos \frac{x}{2})$ où $Q : \left[x \mapsto \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \right]$. D'où $v'(x) \geq 0$ et par conséquent $[x - f_2(x)] \geq 0$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

d)Soit $w(x) = [f_3(x) - x]$. On calcule $w'(x) = F(\cos^{2/3} x)$ où $F : \left[x \mapsto \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^2} \right]$.

D'où $w'(x) \geq 0$ et par conséquent $[f_3(x) - x] \geq 0$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3° On a $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ donc $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ et la tangente en conséquence : $2 - \sqrt{3}$.

b)De $1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{12}$, on déduit $\sin \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4} \sqrt{8 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})}$ puisque $\sin \frac{\pi}{24} > 0$.

Alors $X = 12 f_2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 8 \sqrt{8 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})} - (\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

c)De plus $Y = 12 f_3\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \sqrt[3]{9(3 - \sqrt{3})^2(2 - \sqrt{3})} = 6 \sqrt[3]{14 - 8\sqrt{3}}$, et $\frac{X}{12} < \frac{\pi}{12} < \frac{Y}{12}$ donc $X < \pi < Y$.

d) Dans un certain voisinage de 0, $f_2(x)$ devait fournir une approximation de x à la précision $\frac{x^5}{480}$. Pour $x = \frac{\pi}{12}$ on a obtenu une précision de $2,5.10^{-6}$ or $\frac{1}{480} \left(\frac{\pi}{12}\right)^5 \simeq 2,5.10^{-6}$
L'approximation de π par $12 f_2\left(\frac{\pi}{12}\right) \simeq 3,14156$ est donc conforme aux espérances.