

1 GROUPES DE MATRICES CARRÉES

CORRIGÉ

On note G l'ensemble des matrices M de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

1° a) On sait déjà \times loi de composition interne de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associative.

Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}$ dans G on a $M \times M' = \begin{pmatrix} 1 & b' + ba' \\ 0 & aa' \end{pmatrix} \in G$ puisque $aa' \neq 0$. \times est une loi de composition interne de G .

I_2 est neutre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour \times et est élément de G : I_2 est donc le neutre de G pour \times .

Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dans G on a $\det(M) = a \neq 0$ donc M est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ayant $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$, on a $M^{-1} \in G$ donc M inversible dans G .

Ainsi (G, \times) est un groupe.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7b \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. La conjecture « $M^n = \begin{pmatrix} 1 & (2^n - 1)b \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ » est initialisée aux rangs 1, 2 et 3.

Ayant de plus $M \times \begin{pmatrix} 1 & (2^n - 1)b \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (2^{n+1} - 1)b \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, le théorème de récurrence prouve la conjecture.

2° Soit Δ l'application $[M \mapsto \det(M)]$ de G vers \mathbb{R}^* . Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}$ deux éléments de G on a $M \times M' = \begin{pmatrix} 1 & b' + ba' \\ 0 & aa' \end{pmatrix}$ donc $\Delta(M \times M') = aa' = \Delta(M) \Delta(M')$.

Ainsi Δ est un morphisme de groupes de (G, \times) vers (\mathbb{R}^*, \times) .

3° Soit D le sous-ensemble des matrices diagonales de G , les $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

a) D est non vide, il contient I_2 . Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix}$ dans D on a $M \times M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & aa' \end{pmatrix}$ dans D .

Enfin, pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, on a $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ donc $M^{-1} \in D$.

Ainsi D est un sous-groupe de G . Il est abélien, vue la commutativité du produit dans D .

b) Ayant $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & aa' \end{pmatrix}$, l'application $\left[a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right]$ est un morphisme de groupes de (\mathbb{R}^*, \times) vers (D, \times) . Cette application est clairement bijective donc (D, \times) et (\mathbb{R}^*, \times) sont isomorphes.

2 CONVERGENCES

CORRIGÉ

Pour $n \geq 1$, $f_n : \left[x \mapsto \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \right]$ et $u_n : \left[x \mapsto \sum_{k=1}^n f_k(x) \right]$.

1° a) f_n est une fraction rationnelle. Elle est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} , et elle est paire.

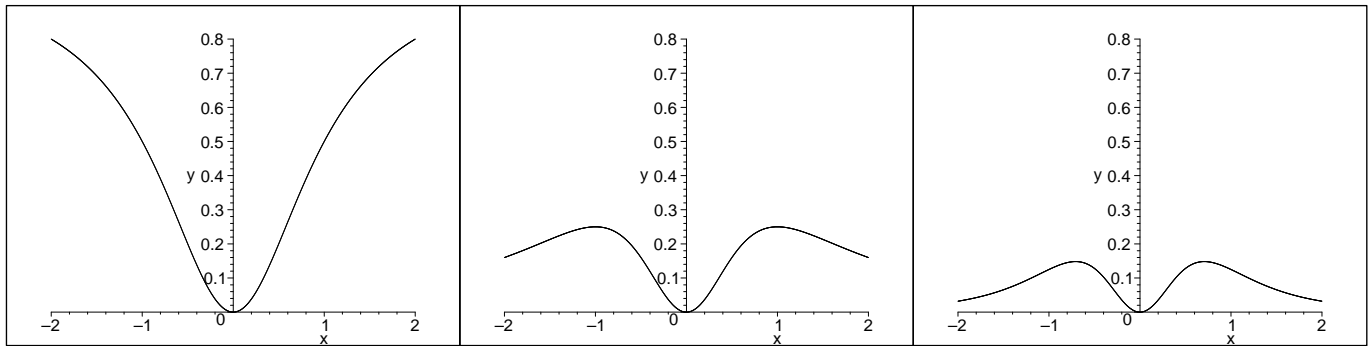
Pour tout x , $f'_n(x) = \frac{2x(1-(n-1)x^2)}{(1+x^2)^{n+1}}$. D'où

x	0	$+\infty$
$f'_1(x)$	0	+
f_1	0	1

et pour $n > 1$:

x	0	$1/\sqrt{n-1}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	0	+	0
f_n	0	max_n	0

b) Courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 représentant f_1 , f_2 et f_3 :



2° a) Pour tout n , $f_n(0) = 0$ donc $(f_n(0))_n$ converge vers 0. Pour $x \neq 0$ on a $(1+x^2) > 1$ donc $(f_n(x))_n$ converge vers 0.

Ainsi $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers f : la constante nulle.

b) Pour $n > 1$, $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = max_n$ et $max_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} : \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; ayant $\lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e$ on a $\lim_n max_n = 0$.

Ainsi la convergence de $(f_n)_n$ vers F est uniforme.

3° a) Pour tout $x \neq 0$, $u_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k = \frac{x^2}{1+x^2} \frac{1 - \frac{1}{(1+x^2)^n}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{(1+x^2)^n}$. Bien sûr $u_n(0) = 0$.

b) On a ainsi, pour tout $x \neq 0$, $(u_n(x))_n$ converge vers 1 et $(u_n(0))_n$ converge vers 0. Donc la suite des fonctions $(u_n)_n$ converge simplement et vers S définie par $S(0) = 0$ et $S(x) = 1$ pour $x \neq 0$.

c) Puisque S est non continue alors que pour tout n u_n est continue, la convergence ne peut être uniforme.

Ceci se trouve aussi directement en étudiant $\lim_{x \rightarrow 0} u_n(x) = 0$ donc $\sup_{\mathbb{R}} |u_n(x) - S(x)| = 1$ qui ne tend pas vers 0.

3 ENDOMORPHISMES ET PROJECTEURS

CORRIGÉ

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Rappelons que pour $\pi \in \mathcal{L}(E)$, π est un projecteur si et seulement si $\pi \circ \pi = \pi$.

Partie A

1° π un projecteur de E . π linéaire donc $\text{Ker}(\pi)$ et $\text{Im}(\pi)$ sous-espaces vectoriels de E .

Pour $u \in \text{Ker}(\pi) \cap \text{Im}(\pi)$, on a $\pi(u) = u$ et $\pi(u) = 0_E$ donc $u = 0_E$. Ainsi $\text{Ker}(\pi) \cap \text{Im}(\pi) = \{0_E\}$.

Pour $u \in E$, $\pi(u - \pi(u)) = \pi(u) - \pi(u) = 0_E$ donc $(u - \pi(u)) \in \text{Ker}(\pi)$. Or $u = \pi(u) + (u - \pi(u))$ donc $u \in \text{Ker}(\pi) + \text{Im}(\pi)$. Ainsi $E = \text{Ker}(\pi) + \text{Im}(\pi)$.

$\text{Ker}(\pi)$ et $\text{Im}(\pi)$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

2° p et q sont deux projecteurs de E . On suppose $p \circ q + q \circ p = O$.

a) Soit $x \in \text{Ker } p$; ainsi $p(x) = 0_E$. On a $(p \circ q)(x) = -(q \circ p)(x) = -q(p(x)) = -q(0_E) = 0_E$.

b) Soit $x \in \text{Im } p$; ainsi $p(x) = x$. On a $(p \circ q)(x) = -(q \circ p)(x) = -q(p(x)) = -q(x)$. En composant par p on a $p(p(q(x))) = -p(q(x))$ donc $p(q(x)) = -p(q(x))$ donc $(p \circ q)(x) = 0_E$.

c) $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont supplémentaires. Pour $x \in E$ quelconque, on a $u \in \text{Im}(p)$ et $v \in \text{Ker}(p)$ tels que $x = u + v$. Alors $(p \circ q)(x) = (p \circ q)(u) + (p \circ q)(v) = 0_E$ d'après les questions précédentes.

Ainsi $p \circ q = O$ et par opposée $q \circ p = O$.

3° p et q sont deux projecteurs de E . $(p + q) \circ (p + q) = (p + q) + p \circ q + q \circ p$. Donc $(p + q)$ projecteur de E si et seulement si $p \circ q + q \circ p = O$ donc si et seulement si $p \circ q = q \circ p = O$ d'après la question précédente.

De plus $p \circ q = O$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $p(q(x)) = 0_E$ i.e. $q(x) \in \text{Ker}(p)$. Donc $p \circ q = O$ si et seulement si $\text{Im } q \subset \text{Ker } p$. De même $q \circ p = O$ si et seulement si $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$.

Les trois énoncés suivants sont donc équivalents :

i/ $p + q$ projecteur de E .

ii/ $p \circ q = q \circ p = O$.

iii/ $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$ et $\text{Im } q \subset \text{Ker } p$.

Partie B

a et b réels distincts non nuls. $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi \neq O$ est tel que $(\varphi - a.\text{id}_E) \circ (\varphi - b.\text{id}_E) = O$. Ainsi $\varphi^2 = (a + b).\varphi - ab.\text{id}_E$. On pose $p = \frac{1}{b-a}(\varphi - a.\text{id}_E)$ et $q = \frac{1}{a-b}(\varphi - b.\text{id}_E)$.

1° a) $p \circ p = \frac{1}{(b-a)^2}(\varphi^2 - 2a.\varphi + a^2.\text{id}_E) = \frac{1}{(b-a)^2}((a+b).\varphi - ab.\text{id}_E - 2a.\varphi + a^2.\text{id}_E) = p$. De même on établit $q \circ q = q$.

p et q sont donc deux projecteurs de E .

b) Par hypothèse on a $p \circ q = O$. Or $(\varphi - a.\text{id}_E) \circ (\varphi - b.\text{id}_E) = \varphi^2 - a.\varphi - b.\varphi + ab.\text{id}_E = (\varphi - b.\text{id}_E) \circ (\varphi - a.\text{id}_E) = O$. Donc $q \circ p = O$. La partie précédente donne alors $(p + q)$ projecteur.

Ceci pouvait se trouver bien sûr directement avec $p + q = \text{id}_E$.

2° a) De $\begin{cases} p = \frac{1}{b-a}(\varphi - a.\text{id}_E) \\ q = \frac{1}{a-b}(\varphi - b.\text{id}_E) \end{cases}$ on tire $\varphi = b.p + a.q$.

b) Puisque p et q commutent, on peut utiliser la formule du binôme et obtenir $\varphi^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (b.p)^k \circ (a.q)^{n-k}$. De plus, puisque $p \circ q = q \circ p = O$, on tire $\varphi^n = b^n.p + a^n.q$.

Ce résultat peut être obtenu aussi sans Newton, avec une récurrence.

3° a) Cherchons le noyau de φ . Soit $x \in \text{Ker}(\varphi)$. On a $\varphi(x) = 0_E$ donc $b.p(x) + a.q(x) = 0_E$. En prenant l'image par p on a $b.p(x) = 0_E$ puisque $\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p)$. Ainsi $x \in \text{Ker}(p)$. On trouve de même $x \in \text{Ker}(q)$. Comme $p + q = \text{id}_E$ on a $x = p(x) + q(x) = 0_E$. On déduit $\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ donc φ injective.

Cherchons l'image de φ . Soit $u \in E$. On a $(b.p)(\frac{1}{b}.u) = p(u)$ et $(a.q)(\frac{1}{a}.u) = q(u)$. Comme $(p \circ q) = (q \circ p) = O$, on a

$$\varphi(p(\frac{1}{b}.u) + q(\frac{1}{a}.u)) = p(u) + q(u) = u$$

donc $u \in \text{Im}(\varphi)$. On déduit $\text{Im}(\varphi) = E$ donc φ surjective.

Ainsi φ est bijective.

b) On peut se servir de la recherche précédente ou tout simplement conjecturer, en observant la formule donnant les φ^n , une expression de φ^{-1} . Il suffit alors de vérifier le résultat des composées à gauche et à droite avec φ :

$$\varphi \circ (\frac{1}{b}.p + \frac{1}{a}.q) = (b.p + a.q) \circ (\frac{1}{b}.p + \frac{1}{a}.q) = 1.p + 1.q = id_E = (\frac{1}{b}.p + \frac{1}{a}.q) \circ \varphi$$

On a donc $\varphi^{-1} = \frac{1}{b}.p + \frac{1}{a}.q$.

On peut aussi se servir de la propriété de $\varphi : \varphi^2 - a.\varphi - b.\varphi + ab.id_E = O$ pour tirer

$$\varphi \circ (\frac{1}{a}.id_E + \frac{1}{b}.id_E - \frac{1}{ab}.\varphi) = (\frac{1}{a}.id_E + \frac{1}{b}.id_E - \frac{1}{ab}.\varphi) \circ \varphi = id_E$$

qui donne $\varphi^{-1} = \frac{1}{a}.id_E + \frac{1}{b}.id_E - \frac{1}{ab}.\varphi$ qu'on peut mettre en fonction de p et q .

Remarquons enfin que trouver une application ψ telle que $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = id_E$ suffisait à prouver la bijectivité et dispensait de la question précédente.

$F \mid N$
