

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**exponentielles de matrices**

(6 points)

Pour M une matrice carrée à coefficients réels, on peut définir la suite de matrices $(S_n)_n$ par son terme général $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k$. Lorsque la suite $(S_n)_n$ converge (i.e. chaque coefficient est une suite de réels convergente) on appelle sa limite l'exponentielle de M et on note $e^M = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k$.

On se propose de trouver l'exponentielle de trois matrices simples A , B et C .

1° Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 , A^3 , puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que A admet une exponentielle dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner la matrice e^A .

2° Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Donner B^2 , B^3 puis B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que B admet une exponentielle dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner la matrice e^B .

3° Soient $C = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$ et ψ l'endomorphisme de E , \mathbb{R} -ev de dimension 2, qui admet C pour matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E .

a) Trouver les valeurs propres de ψ .

b) On pose $g_1 = 4.e_1 + 3.e_2$ et $g_2 = -e_1 - e_2$. Justifier que la famille $\mathcal{C} = (g_1, g_2)$ est une base de E .

c) Donner la matrice de ψ dans la base \mathcal{C} .

d) En déduire la valeur de C^n pour $n \in \mathbb{N}$.

e) Montrer que C admet une exponentielle et donner e^C .

PROBLÈME

cherchez le reste

(14 points)

B est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré 3, donné. Pour $A \in \mathbb{C}[X]$ quelconque, on note Q et R respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de A par B . On a ainsi $d^o(R) \leq 2$ et on note $R = r_0 + r_1X + r_2X^2$.

Le problème se propose de caractériser R dans deux cas particuliers extrêmes de B : B a trois racines distinctes et B a une racine triple.

Partie A

Dans cette partie, on pose $B = (X - \beta)^3$ où β est un complexe donné.

1° a) Montrer que R vérifie : $(t_1) : \begin{cases} R(\beta) &= A(\beta) \\ R'(\beta) &= A'(\beta) \\ R''(\beta) &= A''(\beta) \end{cases}$

b) En déduire que (r_0, r_1, r_2) est solution d'un système linéaire de la forme $(t_2) : T \times \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\beta) \\ A'(\beta) \\ A''(\beta) \end{pmatrix}$ où T est une matrice de $\mathcal{M}_3[\mathbb{C}]$ que l'on précisera.

c) Montrer que T est inversible et donner T^{-1} .

2° a) Montrer que : $\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \times \begin{pmatrix} A(\beta) \\ A'(\beta) \\ A''(\beta) \end{pmatrix}$. Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$ on note C_i le polynôme dont les composantes dans la base \mathcal{B} sont données par la colonne i de T^{-1} .

b) Expliciter les polynômes C_0, C_1 et C_2 .

c) Déduire que pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, le polynôme C_i de $\mathbb{C}_2[X]$ est tel que : $C_i^{(i)}(\beta) = 1$ et $C_i^{(j)}(\beta) = 0$ pour $i \neq j$.

3° application numérique : trouver le reste de la division euclidienne du polynôme $A = (X^2 + 1)^8$ par le polynôme $B = (X - 1)^3$.

Partie B

Dans cette partie, on pose $B = (X - \beta_0)(X - \beta_1)(X - \beta_2)$ où $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ sont 3 complexes donnés, distincts deux à deux.

1° a) Montrer que R satisfait au système $(s_1) : \begin{cases} R(\beta_0) &= A(\beta_0) \\ R(\beta_1) &= A(\beta_1) \\ R(\beta_2) &= A(\beta_2) \end{cases}$

b) En déduire que (r_0, r_1, r_2) est solution d'un système linéaire de la forme $(s_2) : S \times \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\beta_0) \\ A(\beta_1) \\ A(\beta_2) \end{pmatrix}$, où S est une matrice de $\mathcal{M}_3[\mathbb{C}]$ que l'on précisera.

c) Trouver les solutions $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3$ du système $(s) : S \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) En déduire que S est inversible.

2° Pour z un complexe quelconque, on définit $f_z : \begin{cases} \mathbb{C}_2[X] &\rightarrow \mathbb{C} \\ P &\mapsto P(z) \end{cases}$

$$\mathbf{a) \text{ V\'erifier : } (s_1) \iff \begin{cases} f_{\beta_0}(R) &= f_{\beta_0}(A) \\ f_{\beta_1}(R) &= f_{\beta_1}(A) \\ f_{\beta_2}(R) &= f_{\beta_2}(A) \end{cases}}$$

b) Montrer que, pour tout z de \mathbb{C} , f_z est une forme lin\'eaire de $\mathbb{C}_2[X]$, dont on pr\'ecisera la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{C}_2[X]$ (la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$) et de \mathbb{C} (la base $\mathcal{C} = (1)$).

3° a) Montrer que $(f_{\beta_0}, f_{\beta_1}, f_{\beta_2})$ est une base de l'espace dual de $\mathbb{C}_2[X]$.

b)* En d\'eduire que pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, il existe un et un seul polyn\^ome L_i de $\mathbb{C}_2[X]$ tel que : $L_i(\beta_i) = 1$ et $L_i(\beta_j) = 0$ pour $i \neq j$.

$$\mathbf{c) \text{ Montrer } } L_0 = \frac{(X - \beta_1)(X - \beta_2)}{(\beta_0 - \beta_1)(\beta_0 - \beta_2)}.$$

4° L est la matrice de $\mathcal{M}_3[\mathbb{C}]$ dont la colonne i est form\'ee des composantes de L_i dans la base \mathcal{B} .

a) Calculer $S \times L$ et prouver $S^{-1} = L$.

b) En d\'eduire la solution (r_0, r_1, r_2) du syst\eme (s_2) .

5° application num\'erique : trouver le reste de la division euclidienne du polyn\^ome $A = (X+1)^{738}$ par le polyn\^ome $B = X^3 - 1$.

F I N
