

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

**PROBLÈME****algèbre**( 8 points)<sup>1</sup>

Soit  $E$  un plan vectoriel réel muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ . A tout couple  $(a, b)$  de réels, on associe l'endomorphisme de  $E$ ,  $f_{a,b}$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ ab & 1+b \end{pmatrix}$$

- 1°** A quelle condition sur  $(a, b)$  l'endomorphisme  $f_{a,b}$  est-il bijectif ?
- 2°** Déterminer suivant les valeurs de  $(a, b)$ , le noyau et l'image de  $f_{a,b}$ .
- 3° a )** Pour quels couples  $(a, b)$   $f_{a,b}$  est-il une symétrie vectorielle ?

**b )** Justifier que  $(-4, 2)$  en fait partie.

Déterminer les éléments caractéristiques de la symétrie  $f_{-4,2}$  : support et direction.

- 4° a )** Pour quels couples  $(a, b)$   $f_{a,b}$  est-il une projection vectorielle ?
- b )** Pour les valeurs trouvées, déterminer les éléments caractéristiques de ces projections.
- 5° a )** A quelle condition sur  $(a, b)$   $f_{a,b}$  admet-elle deux valeurs propres distinctes ? Quelles sont-elles alors ?
- b )** Cas particulier  $a = 1$ ,  $b = -2$  : peut-on donner une base dans laquelle la matrice de  $f_{1,-2}$  est diagonale ?
- c )** Cas particulier  $a = -1$ ,  $b = 1$ , peut-on donner une base dans laquelle la matrice de  $f_{-1,1}$  est diagonale ?

<sup>1</sup>ce barème est non contractuel et donné à titre indicatif

On définit la fonction numérique  $f$  par :  $f(x) = (x^2 - 1) \arctan \frac{1}{2x - 1}$  et on appelle  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

## Partie A

1° a) Quel est l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  ?

b) Sur  $\mathcal{D}$  privé de 0, établir la dérivabilité de  $f$  et exprimer la fonction dérivée sous la forme :  $f'(x) = 2x g(x)$ .

c) Montrer  $\forall x, 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$  (on pourra utiliser le polynôme  $P = X^2 - 4X + 7$  et  $P\left(x + \frac{1}{x}\right)$ ).

d) En déduire les variations de  $g$ .

e) Dresser le tableau des variations de  $f$ .

2° a) Justifier  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2}$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{x}{2}$ .

b) Donner un développement limité à l'ordre 2 de  $\varphi(u) = \left(f\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2u}\right)$ , pour  $u$  au voisinage de 0.

c) Déterminer une asymptote à  $\mathcal{C}$  et la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à cette asymptote.

3° a) Montrer que  $[x \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)]$  est constante sur  $]0, +\infty[$ . Quelle est la valeur de cette constante ?

b) Donner un développement limité de  $f$  au voisinage de  $1/2$ , à droite puis à gauche.  $f$  peut-elle être prolongée par continuité en  $1/2$  ?

c) Que peut-on en déduire localement pour  $\mathcal{C}$  ?

4° Représenter  $\mathcal{C}$  en mettant en évidence les propriétés étudiées dans ce qui précède. (pour les valeurs approchées, on pourra prendre grossièrement  $\pi \simeq 3$ ).

## Partie B

1° Établir :  $\forall x \in [-1, 0], 0 < f'(x) < \frac{\pi}{2} + 1$ .

2° On définit la suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par : 
$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = -\frac{1}{\pi} f(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer  $u_n \in [-1, 0]$  pour tout  $n$ .

b) Établir que les suites extraites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones.

c) Préciser un réel  $k$  tel que pour tout  $n : |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k |u_{n+1} - u_n|$ .

d) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Soit  $\ell$  sa limite.

e) Donner une condition suffisante sur  $n$  pour que  $u_n$  approche  $\ell$  à moins de  $10^{-3}$ .

<sup>1</sup>ce barème est non contractuel et donné à titre indicatif