

DEVOIR D'ANALYSE

1 ÉTUDES FONCTIONNELLES

CORRIGÉ

1° Soit $u : [x \mapsto (1+x)^2 e^{-x}]$.

u est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et pour tout x , $u'(x) = (1-x^2)e^{-x}$. Donc u est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. Ainsi, pour $x \geq 0$, on a $u(x) \leq u(1) = \frac{4}{e}$.

2° Soit $f : [x \mapsto \int_0^x (1+t^2) e^{-t^2} dt]$.

a) Pour $t \geq 0$ on a $\frac{u(t^2)}{1+t^2} = (1+t^2) e^{-t^2}$.

Alors pour $x \geq 0$ on a $f(x) = \int_0^x \frac{u(t^2)}{1+t^2} dt \leq \int_0^x \frac{4}{e} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{4}{e} \arctan x \leq \frac{4}{e} \frac{\pi}{2}$.

b) f est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction intégrale de fonction continue, et pour tout x , $f'(x) = (1+x^2)e^{-x^2}$. Puisque f' est à valeurs positives, f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

c) Comme fonction monotone sur un intervalle elle admet une limite en chaque borne, en $+\infty$ en particulier. f est bornée sur $[0; +\infty[$ donc f admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

d) Notons $\varphi : [x \mapsto 1 - e^{-x^2}]$. φ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x , $(f - \varphi)'(x) = (1-x)^2 e^{-x^2}$. $f - \varphi$ est donc croissante sur \mathbb{R} . Elle vaut 0 en 0 et donc pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \geq 1 - e^{-x^2}$.

Ayant $\lim_{x \rightarrow +\infty, fty} \varphi(x) = 1$ on déduit¹ $1 \leq \ell \leq \frac{2\pi}{e}$.

3° Soit $g : [x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2}]$.

a) On a $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)$ donc $f'(x) = (1+x^2)e^{-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)$ puis par primitivation et $f(0) = 0$, $f(x) = x - \frac{1}{10}x^5 + o(x^6)$. Ayant $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^5)$ on tire enfin $g(x) = x - x^3 + \frac{9}{10}x^5 + o(x^5)$.

b) $g(0) = 0$. On a $O \in \mathcal{C}$. g admet un $DL_1(0)$, elle est donc dérivable en 0. La tangente a pour (T) en O à \mathcal{C} a pour équation $y = x$.

Puisque $g(x) - x = -x^3 + o_0(x^3)$, le signe de $g(x) - x$ est localement celui de $-x^3$. \mathcal{C} est donc sous (T) à droite de O et au dessus à gauche : \mathcal{C} admet O comme point d'inflexion.

4° On pose l'équation différentielle (e) : $(1+x^2)y' + 2xy = (1+x^2)e^{-x^2}$.

a) g est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables et pour tout x , $g'(x) = e^{-x^2} - \frac{2xf(x)}{(1+x^2)^2}$. On a donc g est solution sur \mathbb{R} de l'équation (e).

b) L'équation (e) est linéaire. Son ensemble \mathcal{S} des solutions contient g , il n'est pas vide. Il est donc un sous-espace affine des fonctions dérivables sur \mathbb{R} . \mathcal{S} est dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (e) : l'équation

$$(e') \quad (1+x^2)y' + 2xy = 0$$

¹ en fait cette limite vaut $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

Les solutions de (e') sont les $\left[x \mapsto \frac{k}{1+x^2} \right]$ où $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (e) sont donc les $\left[x \mapsto g(x) + \frac{k}{1+x^2} \right]$ c'est-à-dire les $\left[x \mapsto \frac{f(x)+k}{1+x^2} \right], k \in \mathbb{R}$.

c) Soit $h \in \mathcal{S} : \left[x \mapsto \frac{f(x)+k}{1+x^2} \right]$. Pour tout x , $(1+x^2)h(x) = f(x) + k$. $[x \mapsto (1+x^2)h(x)]$ a donc pour limite 0 en $+\infty$ si et seulement si $k = -\ell$.

DEVOIR D'ALGÈBRE

2 ALGÈBRE GÉNÉRALE

CORRIGÉ

Soit dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \frac{1}{1-X^2}$.

1° F admet deux pôles simples et $F = \frac{1/2}{1+X} + \frac{1/2}{1-X} = \frac{1/2}{X+1} - \frac{1/2}{X-1}$.

2° Pour tout n on aura $F^{(n)} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^n n!}{(X+1)^{n+1}} - \frac{1}{2} \frac{(-1)^n n!}{(X-1)^{n+1}}$. En posant $c_n = \frac{(-1)^n n!}{2}$ pour tout n , on déduit

$$F^{(n)} = c_n \left(\frac{1}{(X+1)^{n+1}} - \frac{1}{(X-1)^{n+1}} \right) = c_n \left(\frac{1}{(1+X)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1-X)^{n+1}} \right) = c_n \frac{(1-X)^{n+1} + (-1)^n (1+X)^{n+1}}{(1-X^2)^{n+1}}.$$

3° a) La question précédente donne

$$F^{(n)} = c_n \frac{(1-X)^{n+1} + (-1)^n (1+X)^{n+1}}{(1-X^2)^{n+1}} = (-1)^n c_n \frac{(X+1)^{n+1} - (X-1)^{n+1}}{(1-X^2)^{n+1}}.$$

Ainsi il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $F^{(n)} = \frac{P_n}{(1-X^2)^{n+1}}$. C'est $P_n = \frac{n!}{2} ((X+1)^{n+1} - (X-1)^{n+1})$. Pour tout

n on peut écrire $P_n = n! \sum_{k=0}^n (X+1)^k (X-1)^{n-k}$ donc P_n est à coefficients entiers.

b) On a $P_0 = 1, P_1 = 2X, P_2 = 6X^2 + 2$ et $P_3 = 24X^3 + 24X$.

c) $(X+1)^{n+1} - (X-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} X^{n+1-k} = \sum_{p=0}^{n/2} 2 \binom{n+1}{2p+1} X^{n-2p}$ pour tout

n . Ainsi le degré de P_n est n et son coefficient dominant est $\frac{n!}{2} 2 \binom{n+1}{1} = (n+1)!$

d) Les racines de P_n dans \mathbb{C} sont les z tels que $(z+1)^{n+1} - (z-1)^{n+1}$ et $(1-z^2) \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{n+1} = 1 \\ &\iff \frac{z+1}{z-1} \in \mathcal{U}_{n+1} \end{aligned}$$

De plus $\frac{z+1}{z-1} = u \iff z = \frac{u+1}{u-1}$. Alors les racines de P_n sont les $\frac{u+1}{u-1}$ pour tous les u de \mathcal{U}_{n+1} , $u \neq 1$.

Soit m un nombre réel et soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & m & -4 \\ -5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

1° $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & m & -4 \\ -5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 9 & 16+m & 0 \\ -21 & -35 & 0 \end{vmatrix} = 21(m+1)$. Ainsi f est un automorphisme de E si et seulement si $m \neq -1$.

2° Le rang de f est le rang de A . Pour $m \neq -1$ le rang de A est 3. Pour $m = -1$, on a $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ -5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 puisque les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires.

3° On suppose ici $m = 1$ et P le plan de E d'équation $4x + 7y + 3z = 0$ dans la base \mathcal{B} . P a pour base $(u_1, u_2) = (-3e_1 + 4e_3, 7e_1 - 4e_2)$. Cette famille a pour image par $f : (-2e_1 - 19e_2 + 47e_3, -2e_1 + 3e_2 - 23e_3)$. Puisque f est bijective, P' est un plan. Son équation dans la base \mathcal{B} est donnée par $\begin{vmatrix} -2 & -2 & x \\ -19 & 3 & y \\ 47 & -23 & z \end{vmatrix} = 0$ (famille $(f(u_1), f(u_2), v)$ liée) donc $P' : 74x - 35y - 11z = 0$ dans la base \mathcal{B} .

4° On suppose ici $m = -1$:

a) A est de rang 2 donc $\text{Im}(f)$ est de dimension 2. C'est le plan engendré par $(f(e_1), f(e_2))$ qui est libre. Son équation dans la base \mathcal{B} est $\begin{vmatrix} 2 & 4 & x \\ 1 & -1 & y \\ -5 & -3 & z \end{vmatrix} = 0$ c'est-à-dire $4x + 7y + 3z = 0$.

b) $P = \text{Vect}(u_1, u_2)$ est le plan de E d'équation $4x + 7y + 3z = 0$ dans la base \mathcal{B} .

$(f + id_E)(u_1) = -5e_1 - 19e_2 + 51e_3 \in P$ et $(f + id_E)(u_2) = 5e_1 + 7e_2 - 23e_3 \in P$. Ces deux vecteurs images sont indépendants donc $(f + id_E)\langle P \rangle = P$.

c) $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$ est connu. Le théorème du rang donne $\text{Ker}(f)$ de dimension 1.

On a $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(w)$ avec $w = 5e_1 - 3e_2 + 2e_3$. On a $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \\ -5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$ donc la famille $(f(e_1), f(e_2), w)$ est libre : $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires.

d) $A \times A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 21 & 17 & -27 \\ -53 & -41 & 71 \end{pmatrix} \neq A$ donc f n'est pas un projecteur de E .