

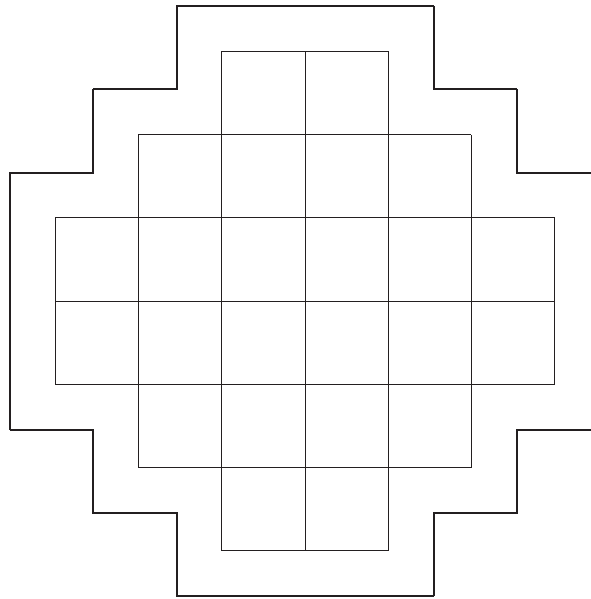
jeu du solitaire

Rencontre d'un solitaire et d'un corps

Le jeu du solitaire

1° le matériel

Le jeu français du solitaire se présente sous la forme d'une planchette comportant 37 trous aux intersections d'un réseau carré :



2° position initiale

Au départ du jeu, une boule est sur chacun des trous.

3° évolution du jeu

On choisit d'ôter une boule du plateau. Dès lors un coup consiste à déplacer une boule suivant une ligne en sautant par dessus une et une seule boule voisine pour arriver sur un trou libre. La boule sautée est alors retirée du plateau.

4° réussite du jeu

Lorsque plus une boule ne peut être déplacée, et donc plus aucune retirée du jeu, il doit rester le moins possible de boules sur le plateau. L'idéal est qu'il n'en reste plus qu'une. On peut cependant adopter des variantes dans lesquelles la (ou les) boule(s) restante(s) doi(ven)t occuper une(des) place(s) désignée(s) à l'avance.

5° problème

Déterminer les choix de la première boule à retirer qui peuvent amener à la réussite.

6° méthode

Décrire les "coups" comme des transformations des situations et dégager des invariants par ces transformations.

Corps fini de caractéristique 2

On considère l'ensemble $E = \{0, 1, p, q\}$, muni de deux lois de composition interne, $+$ et \times , dont voici les tables de Pythagore :

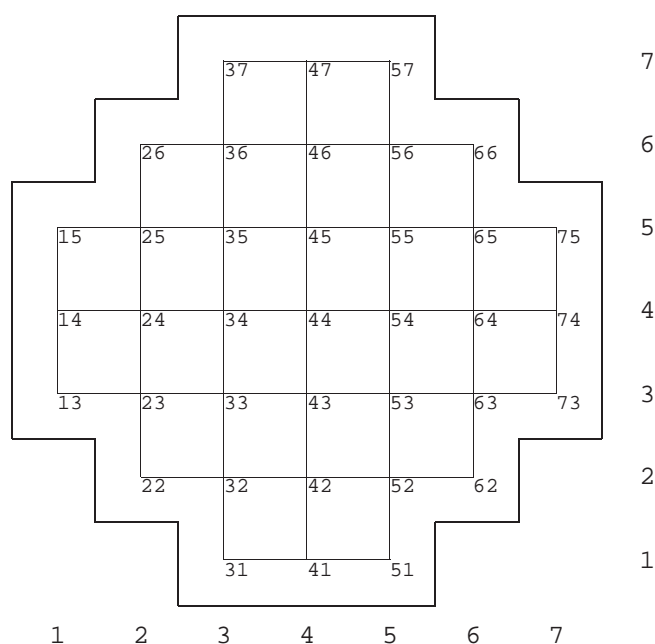
+	0	1	p	q
0	0	1	p	q
1	1	0	q	p
p	p	q	0	1
q	q	p	1	0

\times	0	1	p	q
0	0	0	0	0
1	0	1	p	q
p	0	p	q	1
q	0	q	1	p

- 1° Établir que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.
- 2° Montrer que chaque élément de E est son propre opposé i.e. $\forall x \in E, x + x = 0$ (on dit que E est de caractéristique 2).
- 3° Calculer la somme des éléments de E .
- 4° Donner les puissances de p . En déduire la valeur de $1 + p + p^2$.

L'interaction du jeu et du corps

On numérote les cases du solitaire en lignes et en colonnes de la manière suivante :



Soit S une configuration de boules sur le plateau.

(exemple $S = \{22, 54, 45, 46, 26\}$).

On définit les nombres $A(S) = \sum_{xy \text{ occupé}} p^{x+y}$ et $B(S) = \sum_{xy \text{ occupé}} p^{x-y}$

(dans l'exemple $A(S) = p^4 + p^9 + p^9 + p^{10} + p^8 = q$ et $B(S) = p^0 + p^1 + p^{-1} + p^{-2} + p^{-4} = 1$).

1° Calculer $A(S)$ et $B(S)$ pour les situations S suivantes :

a) $S = \{34, 44, 64\}$

b) $S = \{33, 35, 53, 55\}$

c) $S = \{44\}$

d) $S = \{22, 23, 32\}$

2° Calculer $A(S)$ et $B(S)$ pour une situation de départ où toutes les cases sont occupées.

a) En notant $^*xy^*$ la situation où toutes les cases sont occupées sauf la case xy , montrer $A(^*xy^*) = q + A(\{xy\})$ et $B(^*xy^*) = 1 + B(\{xy\})$.

b) Montrer que $A(\{xy, (x+1)y\}) = A(\{(x+2)y\})$. En déduire que A est un invariant de situation par saut vers la droite.

c) Justifier que A et B sont invariants par tout "coup légal".

Stratégies de jeu

d) Quelles boules de départ faut-il déconseiller d'enlever si on veut que le jeu se termine sur la seule boule centrale ?

e) Enlever au départ la boule 41 permet-il de terminer le jeu avec une boule unique ?

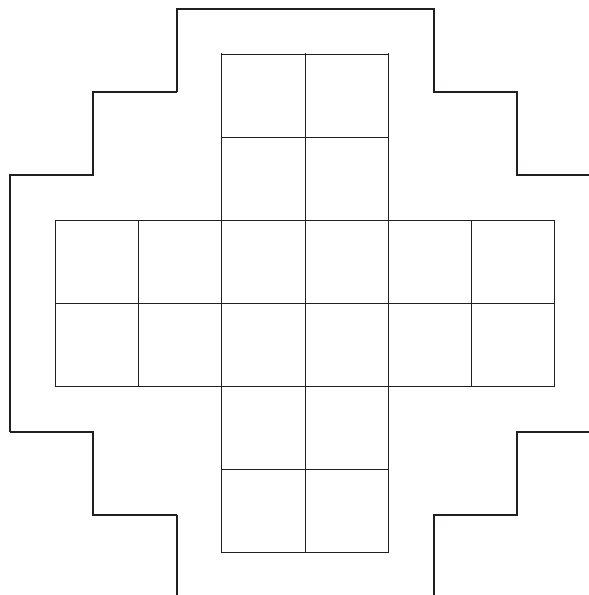
f) Justifier qu'il suffit pour connaître exhaustivement les qualités des positions de départ d'envisager seulement d'enlever la boule 41, 42, 43, 44, 51, 52, 53, 62.

g) Pour chacune de ces huit possibilités, indiquer si elle permet de terminer le jeu avec une seule boule.

h) Écrire l'ensemble des cases de départ possible (pour terminer sur une seule boule) du jeu entier. Comparer cet ensemble à l'ensemble des positions d'arrivée unique possibles.

British version

Le jeu anglais du solitaire utilise un plateau diminué des cases 22, 26, 62, 66.



Qu'y a-t-il de changé ?