

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**EXERCICE 1****carré complexe**

( 3 points )

$A, B, C$  et  $D$  sont quatre points, deux à deux distincts, du plan euclidien orienté. On note  $a, b, c$  et  $d$  leurs affixes dans un repère orthonormal direct. On suppose

$$a + ib = c + id \quad \text{et} \quad a + c = b + d.$$

Montrer qu'alors  $ABCD$  est un carré. La réciproque est-elle vraie ?

**EXERCICE 2****courbe fonctionnelle**

( 5 points )

On définit la fonction  $f : \left[ x \mapsto \frac{(x-1)^2}{x} e^{1/x} \right]$ .  $\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- a) Justifier que  $f$  admet en 0 à gauche une limite partielle réelle  $\ell$ . On notera  $A$  le point du plan de coordonnées  $(0, \ell)$  et  $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \cup \{A\}$ .
- b) Justifier que  $\mathcal{C}^*$  admet en  $A$  une tangente dont on précisera une équation.
- c) Etudier les variations de la fonction  $f$ .
- d) Justifier que la courbe  $\mathcal{C}^*$  admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.
- e) Représenter graphiquement  $f$ .

**EXERCICE 3****courbe paramétrée, symétrie cachée**

( 5 points )

Soit  $\Gamma$  la courbe définie par le paramétrage  $\begin{cases} x = \frac{t^2-4}{t+1} \\ y = \frac{1-4t^2}{t(t+1)} \end{cases}$  On note  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y$  l'ensemble de définition de ce paramétrage.

- a) Déterminer  $\mathcal{D}$ . Pour  $t \in \mathcal{D}$ , montrer que le point de paramètre  $\frac{1}{t}$  se déduit par une transformation géométrique simple du point de paramètre  $t$ .
- b) Dresser le tableau de variations simultanées des fonctions  $x$  et  $y$ .
- c) Etudier les branches infinies de la courbe  $\Gamma$ .
- d) Montrer qu'il existe deux valeurs  $t_1$  et  $t_2$  du paramètre  $t$ , inverses l'une de l'autre et différentes de 1, pour lesquelles les points de paramètres  $t$  et  $\frac{1}{t}$  sont confondus. Quelle interprétation peut-on en donner ?
- e) Construire la courbe  $\Gamma$  dans un repère orthonormal adapté, en faisant apparaître son asymptote et son axe de symétrie.

---

**EXERCICE 4****équation différentielle non linéaire ?**

( 5 points )

Soit l'équation différentielle  $(E) : (x^2 + 1) y'' - 2y = 0$ .

1° Montrer qu'une solution polynomiale de  $(E)$  autre que la fonction nulle est nécessairement de degré 2. Déterminer une telle solution ; elle sera notée  $s$ .

2° Pour une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , on pose  $g = \frac{f}{s}$ .

a) Montrer que  $g$  est définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $g'$  est solution d'une équation linéaire du premier ordre  $(E')$  que l'on déterminera.

3° En déduire les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

---

**EXERCICE 5****cas élémentaire de courbe de Bézier**

( 5 points )

Le plan euclidien orienté est, par le choix d'un repère orthonormal direct, confondu avec  $\mathbb{C}$ .

On cherche une courbe passant par les points complexes  $c_1$  et  $c_2$  (dits points de construction) et dont les tangentes en ces points passent respectivement par les points d'affixes  $c_3$  et  $c_4$  (dits points de contrôle).

a) Justifier que la courbe  $\mathcal{C} = \{P(t) / t \in [0, 1]\}$  où  $P$  est la fonction polynomiale de Bernstein :

$$P : \left[ t \mapsto c_1 (1-t)^3 + 3c_3 t (1-t)^2 + 3c_4 t^2 (1-t) + c_2 t^3 \right]$$

satisfait au problème.

b) En notant  $c_{13}$  le milieu de  $[c_1, c_3]$ ,  $c_{34}$  le milieu de  $[c_3, c_4]$ ,  $c_{42}$  le milieu de  $[c_4, c_2]$ , puis  $c_{134}$  le milieu de  $[c_{13}, c_{34}]$ ,  $c_{342}$  le milieu de  $[c_{34}, c_{42}]$ , montrer que le segment  $[c_{134}, c_{342}]$  est tangent, en son milieu, à  $\mathcal{C}$ .

---

F I N

---