

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

nombres parfaits

(8 points)

1° Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n (1 et n compris). (ex: $\sigma(12) = 28$ et $\sigma(15) = 24$)

a) Vérifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque : $[n \text{ premier} \iff \sigma(n) = n + 1]$.

b) Montrer pour $p \in \mathbb{N}^*$ premier, $\left(\forall k \in \mathbb{N}, k \neq 0 \quad \sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \right)$.

2° Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Div(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n . (ex: $Div(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$)

a) a et b sont quelconques dans \mathbb{N}^* . Montrer : $Div(ab) = \{\alpha \beta / \alpha \in Div(a), \beta \in Div(b)\}$.

b) a et b sont positifs premiers entre eux ; montrer que $\xi : \begin{cases} Div(a) \times Div(b) & \rightarrow Div(ab) \\ (x, y) & \mapsto xy \end{cases}$ est une bijection.

c) En déduire que pour a et b dans \mathbb{N}^* premiers entre eux, on a $\sigma(ab) = \sigma(a) \sigma(b)$.

3° On dit qu'un entier n de \mathbb{N}^* est parfait si et seulement si $\sigma(n) = 2n$ (i.e. n est la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même). (ex: 6 est parfait, 12 ne l'est pas)

a) Soit m un nombre parfait pair : $m = 2^k b$ où b impair et k positif. Montrer qu'il existe c tel que $b = (2^{k+1} - 1)c$ et $\sigma(b) = 2^{k+1}c$.

b) Prouver : $c = 1$ et en déduire que b est premier.

c) Etablir que pour tous α et β de \mathbb{N}^* , $(2^{\alpha\beta} - 1)$ est divisible par $(2^\alpha - 1)$. En déduire que $k + 1$ est premier.

4° Les nombres $E_n = 2^{n-1}(2^n - 1)$, où n et $(2^n - 1)$ sont premiers, sont dits les nombres d'Euclide.

a) Déduire de ce qui précède que les nombres parfaits pairs sont des nombres d'Euclide.

b) Montrer que les nombres d'Euclide sont tous parfaits.

c) Donner les nombres parfaits pairs¹ inférieurs à 1000.

¹et on ne sait pas à l'heure actuelle s'il existe des nombres parfaits impairs ; si leur recherche vous tente, la gloire est au bout !

Les intégrales utilisées dans ce problème sont les intégrales au sens de terminale.

Partie A

1° Soit f de classe C^2 sur $[a, b]$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. x_0 étant un élément de $]a, b[$, montrer qu'il existe x_1 de $]a, b[$ tel que

$$f(x_0) = \frac{f''(x_1)}{2} (x_0 - a)(x_0 - b)$$

(on pourra utiliser la fonction $\left[x \mapsto f(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)} (x-a)(x-b) \right]$ et le théorème de Rolle).

2° Soit g de classe C^2 sur $[a, b]$, telle que pour tout x de $[a, b]$, $m \leq g''(x) \leq M$.

a) Utiliser la fonction $h : \left[x \mapsto g(x) - g(a) \frac{x-b}{a-b} - g(b) \frac{x-a}{b-a} \right]$ et établir, pour tout x de $[a, b]$,

$$M \frac{(x-a)(x-b)}{2} \leq g(x) - g(a) \frac{x-b}{a-b} - g(b) \frac{x-a}{b-a} \leq m \frac{(x-a)(x-b)}{2}$$

b) Montrer $\int_a^b \left(g(a) \frac{x-b}{a-b} + g(b) \frac{x-a}{b-a} \right) dx = \frac{b-a}{2} [g(a) + g(b)]$.

c) En déduire $-M \frac{(b-a)^3}{12} \leq \int_a^b g(x) dx - \frac{b-a}{2} (g(a) + g(b)) \leq -m \frac{(b-a)^3}{12}$.

Partie B

1° a) Calculer par une intégration par parties $\int_n^{n+1} \ln(x) dx$ où n est un entier positif.

b) Grâce à la partie précédente établir $\frac{1}{12(n+1)^2} \leq \left(n + \frac{1}{2} \right) [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1 \leq \frac{1}{12n^2}$

2° a) On considère les deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ définies pour $n \geq 2$ par

$$U_n = \ln(n^{n+1/2} e^{-n}) - \ln(n!) \quad \text{et} \quad V_n = U_n + \frac{1}{12(n-1)}$$

Montrer avec la question précédente que les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont adjacentes et qu'elles convergent vers le même réel C .

b) En déduire $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{-C}$

3° a) En admettant la formule dite de Wallis² : $\lim_n \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 n} = \pi$, montrer $C = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

a) En déduire la formule de Stirling $\boxed{n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$.

F I N

²que nous établirons plus tard