

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1 où l'on essaye de construire deux matrices "anticommutantes" (4 points)

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices colonnes à n lignes $n \geq 2$, à coefficients dans \mathbb{C} ; I_n en est la matrice unité. Pour $m \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on note \overline{m} la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de m , et on considérera $a = {}^t m \overline{m}$ comme un réel (positif ou nul).

1° On pose la matrice complexe $M = {}^t m \overline{m} \cdot I_n - 2 m {}^t \overline{m}$.

a) Établir $M^2 = a^2 \cdot I_n$.

b) En posant A la "partie réelle" de M , et B sa partie imaginaire (i.e. A et B sont deux matrices réelles telles que $M = A + i \cdot B$), donner une expression de M^2 en fonction de A et B .

c) En déduire $AB = -BA$.

2° application : utiliser ${}^t m = (i \quad -2 \quad 2 - i \quad 1 + i)$ pour construire deux matrices A et B telles que $AB = -BA$.

EXERCICE 2 matrices et bases remarquables (4 points)

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3. On considère $\psi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\psi^3 = id_E$ et $\psi \neq id_E$.

a) Montrer : $\text{Im}(\psi - id_E) \subset \text{Ker}(\psi^2 + \psi + id_E)$ et $\text{Im}(\psi^2 + \psi + id_E) \subset \text{Ker}(\psi - id_E)$.

b) Établir que $\text{Im}(\psi - id_E)$ et $\text{Ker}(\psi - id_E)$ sont supplémentaires.

c) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $(x, \psi(x))$ soit une famille libre de $\text{Im}(\psi - id_E)$.

d) Quel est le rang de $(\psi - id_E)$?

e) Établir que ψ admet, dans une base, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour matrice.

EXERCICE 3

alignement sur une strophoïde

(8 points)

Soit la strophoïde \mathcal{S} d'équation cartésienne $y^2(1+x) = x^2(1-x)$ dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1° a) Justifier $O \in \mathcal{S}$.

b) Montrer que pour tout réel t , la droite passant par O de coefficient directeur t recoupe \mathcal{S} en un point unique.

c) En déduire le paramétrage de \mathcal{S} :
$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

2° Faire l'étude de ce paramétrage et donner l'allure de \mathcal{S} . (on aura soin bien sûr de caractériser les branches infinies et les tangentes en O).

3° a) Pour \mathcal{D} la droite d'équation $ax + by + c = 0$, montrer que M , point de \mathcal{S} de paramètre t , est sur \mathcal{D} si et seulement si t est solution de l'équation $bt^3 + (a-c)t^2 - bt - (a+c) = 0$.

b) En déduire que M_1, M_2 et M_3 , les points de \mathcal{S} de paramètres t_1, t_2 et t_3 , sont alignés si et seulement si $\sigma_2(t_1, t_2, t_3) = -1$.

4° On appelle *tangentiel* d'un point M de \mathcal{S} de paramètre t le point M' de \mathcal{S} de paramètre t' en lequel la tangente à \mathcal{S} en M recoupe \mathcal{S} .

a) En utilisant que M est point d'intersection d'ordre 2 de \mathcal{S} et de sa tangente en M , montrer $t' = \frac{-1-t^2}{2t}$.

b) Montrer que les tangentiels de trois points alignés sont alignés.

EXERCICE 4

courbe de Bézier de degré 3

(4 points)

Pierre Bézier a montré tout l'intérêt que pouvaient avoir en informatique et en modélisation les courbes qui portent son nom. Elles représentent des polynômes de Bernstein.

Pour une courbe passant par les points d'affixes complexes c_1 et c_2 (dits points de construction) et dont les tangentes en ces points passent respectivement par les points d'affixes c_3 et c_4 (dits points de contrôle), Sergueï Bernstein propose le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$P = c_1(1-X)^3 + 3c_3X(1-X)^2 + 3c_4X^2(1-X) + c_2X^3$$

a) Justifier que la courbe $\mathcal{C} = \{P(t) / t \in [0, 1]\}$ dans le plan complexe est solution du problème.

b) En notant c_{13} le milieu de $[c_1, c_3]$, c_{34} le milieu de $[c_3, c_4]$, c_{42} le milieu de $[c_4, c_2]$, c_{134} le milieu de $[c_{13}, c_{34}]$, c_{342} le milieu de $[c_{34}, c_{42}]$, montrer que le segment $[c_{134}, c_{342}]$ est tangent, en son milieu, à \mathcal{C} .

F I N
