

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**géométrie complexe**

(5 points)

Soient a, b, c et d dans \mathbb{C} tels que
$$\begin{cases} a + ib = c + id \\ a + c = b + d. \end{cases}$$

- Justifier que les points d'affixes a, b, c, d sont les sommets d'un carré.
- En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $(z - a)^4 = (z - b)^4 = (z - c)^4 = (z - d)^4$.

EXERCICE 2**géométrie barycentrique**

(5 points)

Soit ABC un triangle isocèle du plan tel que $AB = AC = 4$ et $BC = 2$.

- Pour k décrivant $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, quel est l'ensemble des barycentres de $\{(A, k), (B, 1), (C, 1)\}$?
- Caractériser et représenter l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 = MB^2 + MC^2$
- Caractériser et représenter l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 14$
- Caractériser et représenter l'ensemble des points M du plan tels que $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 32$

EXERCICE 3**considérations différentielles**

(10 points)

On s'intéresse à l'intégrale $A = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

1° Déterminer l'ensemble des solutions définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$(e_1) : y'' + y = 0.$$

2° Soit I un intervalle ne contenant pas 0 (i.e. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$); on définit sur I l'équation différentielle

$$(e_2) : x^4 y'' + y = 0.$$

a) Etant donnée une fonction numérique g deux fois dérivable sur I , on définit la fonction f sur un intervalle J à préciser par :

$$f(x) = x.g\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

Exprimer $f''(x)$ en fonction de x et $g''\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Démontrer que g est solution de (e_2) sur I si et seulement si f est solution de (e_1) sur J .

c) En déduire les solutions de (e_2) sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et à valeurs dans \mathbb{R} .

3° Soit g une solution de l'équation (e_2) , définie sur $]0, +\infty[$.

a) Dédurre de ce qui précède une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $\left[x \mapsto \frac{1}{x^4} g(x) \right]$ sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer alors explicitement la valeur de A .

F I N
