

—
I.S.E.P.
Mathématiques

On munit le plan \mathcal{P} d'un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1° Ces questions sont à traiter indépendamment les unes des autres.

a) Faire l'étude analytique qui convient pour représenter la courbe d'équation polaire :

$$\rho = a(1 + \cos \theta)$$

b) Faire l'étude analytique qui convient pour représenter la courbe d'équation polaire :

$$\rho = 2a \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

c) Faire l'étude analytique qui convient pour représenter la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x &= \frac{a}{2} (\cos(2t) - 2 \cos(t) + 1) \\ y &= \frac{a}{2} (\sin(2t) - 2 \sin(t)) \end{cases}$$

d) Faire l'étude analytique qui convient pour représenter la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x &= 2a \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \\ y &= 2a \frac{2t}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

2° Les quatre courbes sont identiques (elles devraient). Justifier.

Cette courbe \mathcal{C} est une cardioïde. Elle a été étudiée par Rømer en 1674, Vaumesle en 1678, La Hire en 1708 et Castillon en 1741. Le nom, dû à Castillon, provient du grec kardia "cœur".

Les questions suivantes se proposent d'en explorer quelques propriétés.

3° Justifier que \mathcal{C} admet pour équation cartésienne :

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2)$$

4° a) Pour $M_1 \in \mathcal{C}$, montrer qu'il existe deux autres points de \mathcal{C} en lesquels les tangentes à \mathcal{C} sont parallèles à celle en M_1 ; on les note M_2 et M_3 .

b) Chercher l'isobarycentre des trois points M_1 , M_2 et M_3 .

5° On appelle inversion de pôle O l'application ξ du plan \mathcal{P} qui à tout point M distinct de O associe le point M' de la droite (OM) tel que $OM \cdot OM' = 1$.

Justifier que l'image de \mathcal{C} par ξ est une parabole. *En ce sens, on dira que \mathcal{C} est une inverse de parabole.*

6° Sur le modèle de la cycloïde, on se propose de faire rouler sans glisser un cercle (Γ) de rayon $a/2$ sur le cercle fixe de rayon $a/2$ et de centre $\Omega(a/2, 0)$.

Montrer que \mathcal{C} est la trajectoire du point de (Γ) qui passe par O . *En ce sens, on dit que \mathcal{C} est une épicycloïde à un rebroussement.*

7° Soit (C) le cercle de rayon a et de centre $A(a, 0)$. Montrer que de tout point K de \mathcal{C} on peut mener une tangente à (C) orthogonale à (OK) . *En ce sens, on dit ainsi que \mathcal{C} est une podaire du cercle par rapport à son point O .*