

remarques:

Sans calculatrice

Les notations de l'énoncé sont impératives.

La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte. En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.

Problème d'algèbre (10 points sur 20)

notations: \mathbf{R} désigne le corps des réels et $\mathbf{R}[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée sur \mathbf{R} . E est un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension 3 dont $B = (b_1, b_2, b_3)$ est une base. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E , dans lequel id_E désigne l'identité de E . Pour f un endomorphisme de E , $f^1 = f$ et pour tout $n \geq 2$ $f^n = f^{n-1} \circ f$.

On se donne dans $L(E)$ défini par $(b_1) = b_2, (b_2) = b_3, (b_3) = b_1$.

1) On considère dans $\mathbf{R}[X]$ les polynômes $R = X - 1$ et $S = X^2 + X + 1$. Montrer que R et S sont premiers entre eux et trouver un couple (U, V) de polynômes tels que $RU + SV = 1$
 $\deg U < \deg S$ et $\deg V < \deg R$

2) a) Calculer les matrices de id_E et $f^2 + \text{id}_E$ dans la base B .

b) Donner le rang de chacun de ces endomorphismes

c) Montrer $f^3 = \text{id}_E$.

d) Déterminer avec précision les noyaux respectifs E_1 et E_2 de id_E et $f^2 + \text{id}_E$. Pourrait-on prévoir leurs dimensions ?

e) Soit $x \in E$ vérifiant qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(x) = 0$. Montrer $x \in E_1$.

3) On considère l'application P de $\mathbf{R}[X]$ dans $L(E)$ qui à tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de $\mathbf{R}[X]$ on fait correspondre l'endomorphisme $P(f) = a_0\text{id}_E + a_1f + \dots + a_nf^n$.

a) Montrer que P est une application linéaire. En déduire que son image: $F = P(\mathbf{R}[X])$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

b) Montrer, en utilisant 2), que (id_E, f, f^2) est une famille génératrice de F . Donner la dimension de F .

c) En utilisant 1), trouver deux éléments de F , u et v , tels que $u + v = \text{id}_E$
 $u \circ v = v \circ u = 0$. Établir que u et v
 $u \circ u = 0, v \circ v = 0$

sont des projecteurs.

d) Montrer que E est somme directe de $\text{Im}(u)$ et $\text{Im}(v)$. Quelles sont les dimensions de ces deux sous-espaces ?

1) Où l'on définit un nombre α .

1) Soit f la fonction d'une variable réelle définie en tout réel x non nul de $[-1, +1]$ par :

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{x^2}$$

Préciser le domaine de dérivabilité de f et calculer la dérivée f' .

2) Soit g la fonction définie sur $[0, 1[$ par
$$\begin{cases} g(x) = x^3 f'(x) & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

a) Étudier les variations de g .

b) Dédire de l'étude précédente que f' admet dans $]0, 1[$ un zéro unique, noté α , entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1.

c) Donner le tableau des variations de f .

3) a) Vérifier que f est de classe C^2 sur $]0, 1[$ et calculer f'' .

b) Soit h la fonction définie sur $[0, 1[$ par
$$\begin{cases} h(x) = x^4 f''(x) & \text{si } x > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Étudier les variations de h .

2) Où l'on cherche à approcher par des suites le nombre $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1) Montrer que α est l'unique solution sur $]0, \pi/2[$ de l'équation $\tan y = 2y$.

2) Soit la suite $(u_n)_n$ de premier terme u_0 dans $]0, \pi/2[$ et vérifiant
$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \tan(u_n)$$

a) Illustrer sur un schéma la construction des premiers termes de la suite.

b) Indiquer pourquoi cette méthode ne permet pas d'approcher α .

3) Soit la suite $(v_n)_n$ de premier terme $v_0 = 2$ et vérifiant
$$v_{n+1} = \arctan(2v_n)$$

a) Montrer que cette suite converge vers α .

b) Déterminer un réel k de $]0, 1[$ tel que
$$\forall n \geq 0, |v_{n+1} - \alpha| \leq k |v_n - \alpha|.$$

c) En déduire un nombre N d'itérations à partir duquel v_n approche α à une précision meilleure que 10^{-8} .

d) Pour $n > N$, quelle précision peut-on attendre de l'approximation de α par $\sin(v_n)$?