

1 vous avez dit parfaits ?

CORRIGÉ

On dit qu'un entier n de \mathbb{N}^* est parfait si et seulement si la somme de ses diviseurs dans \mathbb{N} vaut $2n$.

1° Les nombres $E_q = 2^{q-1}(2^q - 1)$ où $(2^q - 1)$ est premier sont dits les nombres d'Euclide.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$. k non premier signifie $k = pq$ avec $p > 1$ et $q > 1$. Alors $(2^k - 1) = (2^{pq} - 1) = (2^p - 1)((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + (2^p) + 1)$ et donc, ayant $(2^p - 1) > 1$, $(2^k - 1)$ n'est pas premier.

b) Soit q est tel que $(2^q - 1)$ est premier. Le résultat précédent donne aussi q premier. Soit le nombre d'Euclide $E_q = 2^{q-1}(2^q - 1)$. Le théorème de Gauss donne que tout diviseur premier de E_q divise 2^{q-1} ou $(2^q - 1)$. Les diviseurs de E_q sont donc $1, 2, \dots, 2^{q-1}$, ainsi que leurs produits avec $(2^q - 1)$. Leur somme est $\sum_{k=0}^{q-1} 2^k (2^q - 1 + 1) = (2^q - 1) 2^q = 2 E_q$. Ainsi E_q est parfait.

2° Soit m un nombre parfait pair : $m = 2^k b$ avec b impair et k positif.

a) La somme des diviseurs de m est $S(m) = 2m$. Or, puisque b et 2 sont premiers entre eux, un diviseur premier de m divise 2^k ou b . Les diviseurs de m sont donc les $2^i q$ pour tout q diviseur de b et $0 \leq i \leq k$. En notant $S(b)$ la somme des diviseurs de b on a donc $S(m) = (2^{k+1} - 1) S(b)$. Donc $2^{k+1} b = (2^{k+1} - 1) S(b)$. 2^{k+1} et $(2^{k+1} - 1)$ sont premiers entre eux donc $(2^{k+1} - 1)$ divise b et $S(b) = \frac{2^{k+1} b}{2^{k+1} - 1}$.

b) On a $S(b) = b + \frac{b}{2^{k+1} - 1}$. $S(b)$ est la somme de deux entiers diviseurs de b . b n'a que deux diviseurs, il est premier. Donc $b = 2^{k+1} - 1$ et m est un nombre d'Euclide.

2 une belle intégrale

CORRIGÉ

fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ pour $x > 0$. L'intégrale de f sur $[0, 1]$ est notée

$$I = \int_0^1 \frac{x \ln x}{x+1} dx.$$

1° La fonction $[x \mapsto x + 1 + \ln x]$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Elle prend la valeur 2 en 1 et a pour limite $-\infty$ en 0. L'équation $(e) : x + 1 + \ln x = 0$ admet donc sur $]0, +\infty[$ une solution unique α , comprise entre 0 et 1.

2° a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ donc f est continue en 0.

Par contre, pour $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x+1} = -\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

b) $f(x) \sim \ln x$ donc bien sûr $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

f est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$ pour $x > 0$. Le numérateur est une fonction de x strictement croissante ne s'annulant qu'en α , donc on a f strictement décroissante sur $[0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

c) Notons que $f(x) = -x$ si et seulement si $x = 0$ ou $\ln x = -x - 1$. Donc la courbe (\mathcal{C}) de f coupe la droite d'équation $y = -x$ aux seuls points d'abscisses 0 et α .

suite auxiliaire

Soit, pour $n > 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

1° Par deux intégrations parties on a $\int_0^\pi a t^2 \cos(pt) dt = (-1)^p \frac{2a\pi}{p^2}$ donc $\int_0^\pi a t^2 \cos(pt) dt = \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$ pour $a = \frac{-1}{2\pi}$.

2° Alors $S_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \frac{-t^2}{2\pi} \cos kt dt = \int_0^\pi \frac{-t^2}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt$.

3° Pour t non multiple de 2π , les formules d'Euler peuvent donner $P(n) : \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$, mais il suffit ici de le prouver par récurrence :

- pour $n = 0$, on a bien sûr $0=0$

- en admettant la formule $P(p)$ pour un entier p quelconque, on a

$$\sum_{k=1}^{p+1} \cos kt = \frac{\sin(p + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} + \cos(p+1)t = \frac{\sin(p + \frac{1}{2})t + 2 \sin \frac{t}{2} \cos(p+1)t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$$

Comme $\sin(p + \frac{3}{2})t - \sin(p + \frac{1}{2})t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos(p+1)t$, on trouve bien $P(p+1)$.

Ceci donne par récurrence $\sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$ pour tout n .

4° On considère la fonction g définie par $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{t^2}{\sin \frac{t}{2}}$ pour $t > 0$. On a $g(t) \sim 2t$ donc g est continue et dérivable en 0, avec $g'(0) = 2$. Par ailleurs, g est bien sûr définie C^∞ sur $]0, 2\pi[$, et, pour $t > 0$,

$$g'(t) = \frac{4t \sin(\frac{t}{2}) - t^2 \cos(\frac{t}{2})}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{t^2 + o(t^2)}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \underset{0}{\sim} 2$$

Ainsi g' est continue en 0 et donc g est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

5° a) Des questions précédentes on tire alors

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^\pi \frac{-t^2}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t^2 \left(\frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt \end{aligned}$$

b) Pour $h \in C^1$ sur $[0, \pi]$, on a h' bornée sur $[0, \pi]$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi h(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt \right| &= \left| \left[-h(t) \frac{\cos(n + \frac{1}{2})t}{n + \frac{1}{2}} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{h'(t) \cos(n + \frac{1}{2})t}{n + \frac{1}{2}} dt \right| \\ &\leq \left| \frac{h(0)}{n + \frac{1}{2}} \right| + \left| \int_0^\pi \frac{h'(t) \cos(n + \frac{1}{2})t}{n + \frac{1}{2}} dt \right| \\ &\leq \frac{|h(0)|}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \max\{|h'(t)|, t \in [0, \pi]\} \end{aligned}$$

c)Puisque g est C^1 sur $[0, \pi]$, le résultat précédent s'applique et donne $\lim_n S_n = \frac{\pi^2}{12}$.

calcul de I

Pour tout entier $k \geq 1$, on considère la fonction f_k définie sur $[0, +\infty[$ par $f_k(0) = 0$ et $f_k(x) = x^k \ln x$ si $x > 0$. Ces fonctions sont C^∞ sur $]0, +\infty[$.

3° a) f_1 est évidemment sur $[0, 1]$, entre autres parceque $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

b)Pour $k > 1$ et $t > 0$, $\frac{f_k(t)}{t} = x^{k-2} (x \ln x)$ donc f_k est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Pour $t > 0$, $f'_k(t) = k f_{k-1}(t) + t^{k-1}$ (aucun intérêt).

4° Pour $0 \leq t \leq 1, n > 0$, $\frac{t}{t+1} = (t-t^2+t^3+\dots)(-1)^{n-1}t^n + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{t+1}$ donc $I = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k + \int_0^1 (-1)^n \frac{t^{n+1} \ln t}{t+1} dt$

et $\left| I - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k \right| \leq m \int_0^1 t^n dt$ où $m = \max\{|f(t)|, t \in [0, 1]\}$.

5° Par parties, on trouve pour tout entier $k \geq 1$ $I_k = \int_0^1 f_k(t) dt = -\frac{1}{(k+1)^2}$.

6° Puisque $m \int_0^1 x^n dx = m \frac{1}{n+1}$, on a $\lim_n |I - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k| = 0$. Or $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = 1 - S_{n+1}$ et donc $I = -1 + \frac{\pi^2}{12}$.