

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**suite de fonctions**

(15 points)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $[0, 1]$ la fonction f_n par :

$$f_n(t) = \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \text{ si } t \in \left] \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \quad 1 \leq k \leq n, \quad \text{et } f_n(0) = 1$$

- a)** Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement. Soit f la limite.
- b)** f est-elle continue ?
- c)** La convergence de $(f_n)_n$ vers f est-elle uniforme ?

PROBLÈME**recherche de points fixes**

(15 points)

1° Questions de cours

- a)** Démontrer que si $(u_n)_n$ est une suite d'éléments d'un segment S qui converge, alors sa limite, ℓ , est aussi un élément de S .
- b)** On rappelle par ailleurs le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

Partie A

T désigne une fonction, définie sur \mathbb{R} , continue. Le réel y étant choisi, la suite $(y_n)_n$ est définie par $y_0 = y$ et $y_{n+1} = T(y_n)$ pour tout n .

1° Supposons ici que $(y_n)_n$ converge, de limite x . Montrer que x est un point fixe de T (i.e. x vérifie $T(x) = x$).

2° a et b sont deux réels, $a < b$ et supposons ici qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que T vérifie : $|T(u) - T(v)| \leq k |u - v|$ pour tous u et v de $[a, b]$.

a) Montrer que T ne peut pas avoir plus d'un point fixe dans $[a, b]$. Donner l'exemple d'une fonction T rentrant dans les hypothèses qui n'admet pas de point fixe dans $[a, b]$.

b) Supposons ici que $x \in [a, b]$ soit un point fixe de T et que $y_n \in [a, b]$ pour tout n . Montrer que la suite $(y_n)_n$ converge vers x .

3° a et b sont deux réels, $a < b$ et supposons ici que T laisse $[a, b]$ stable (i.e. $T\langle [a, b] \rangle \subset [a, b]$) et $y \in [a, b]$.

a) Montrer qu'il existe une extraction φ (i.e. une injection φ croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N}) et deux réels u et v de $[a, b]$ tels que $\lim_n y_{\varphi(n)} = u$ et $\lim_n y_{\varphi(n)+1} = v$.

b) Dans le cas où $\lim_n |y_{n+1} - y_n| = 0$, justifier que T admet dans $[a, b]$ un point fixe.

4° a et b sont deux réels, $a < b$ et supposons ici que T laisse $[a, b]$ stable et qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que T vérifie : $|T(u) - T(v)| \leq k |u - v|$ pour tous u et v de $[a, b]$.

a) Montrer que T admet dans $[a, b]$ un point fixe unique ; on le note x^* .

b) Montrer que si $y \in [a, b]$ alors $(y_n)_n$ converge vers x^* .

Partie B

Dans cette partie on pose $T : [x \mapsto x + x^2]$.

1° Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de réels positifs. On note, pour tout n , $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

a) Supposons $a_n \sim b_n$ et $\lim_n B_n = +\infty$. Montrer $A_n \sim B_n$.

b) En déduire que dans le cas $a_n \sim \frac{1}{n}$, on a $A_n \sim \ln n$.

2° On prend ici $-1 < y < 0$.

a) Montrer $\lim_n y_n = 0$. Puis justifier que les suites $(y_n)_n$ et $(y_{n+1})_n$ sont équivalentes.

b) Envisager la suite de terme général $a_n = \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_{n+1}}$ pour trouver un équivalent simple de y_n .

3° On prend ici $y > 0$.

a) Montrer $\lim_n y_n = +\infty$.

b) Établir, pour tout n , $y_n^2 \leq y_{n+1}$ et $(y_{n+1} + 1) \leq (y_n + 1)^2$. En déduire, pour tout n , $\ln y_n \geq 2^n \ln y$ et $\ln(y_n + 1) \leq 2^n \ln(y + 1)$.

c) De la monotonie de $(2^{-n} \ln y_n)_n$ déduire la convergence de cette suite. On notera $\lambda(y)$ sa limite.

d) Établir $0 < \lambda(y) - 2^{-n} \ln y_n < \frac{2^{-n}}{y_n}$ pour tout n .

e) Donner une suite numérique simple (dépendant de $\lambda(y)$) équivalente à $(y_n)_n$.

f) Montrer que $\lambda(y)$ est une fonction croissante de y .

g) Pour $c > 0$ fixé, montrer que la suite de fonctions $([y \mapsto 2^{-n} \ln y_n])_n$ converge uniformément vers $\lambda(y)$ sur $[c, +\infty[$. En déduire que $\lambda(y)$ est une fonction continue de y sur $]0, +\infty[$.