

1° On établit que $\left[M \mapsto \sqrt{\phi(M)} \right]$ est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

a) Pour toute M , $\phi(M) \geq 0$ et $\phi(M) = 0$ si et seulement si $M = 0$ vient de manière évidente.

b) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a bien sûr $\sqrt{\phi(\lambda.M)} = |\lambda| \sqrt{\phi(M)}$.

c) C'est l'inégalité de Minkowski dans \mathbb{R} :

$$\sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2 + (c+c')^2 + (d+d')^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2}$$

pour tous $a, b, c, d, a', b', c', d'$, qui fournit l'inégalité triangulaire pour la fonction $\left[M \mapsto \sqrt{\phi(M)} \right]$.

2° $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont de rang 2, elles ne sont pas dans \mathcal{T} . $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, elle a pour valeurs propres 0 et 2, elle appartient à \mathcal{T} .

3° Etude des matrices appartenant à \mathcal{T} .

a) Pour tout vecteur V de composantes réelles x, y , on pose $M = V^t V$; ainsi, avec $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$.

i) Alors $\phi(M) = (x^2 + y^2)^2 = [\phi(V)]^2$. M est nulle si et seulement si $\phi(M) = 0$ donc si et seulement si $\phi(V) = 0$ donc si et seulement si V est nul.

ii) On a $MV = \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 \\ x^2y + y^3 \end{pmatrix} = \phi(V).V$ et $M^2 = \begin{pmatrix} x^4 + x^2y^2 & x^3y + xy^3 \\ x^3y + xy^3 & x^2y^2 + y^4 \end{pmatrix} = \phi(V).M$.

iii) $\det(M - k.I_2) = k^2 - (x^2 + y^2)k$ donc les valeurs propres de M sont 0 et $\phi(V)$.

iv) M est symétrique, de rang 1 si $V \neq 0$, et a deux valeurs propres positives ou nulles, donc $M \in \mathcal{T}$.

b) On considère réciproquement une matrice M non nulle de \mathcal{T} .

i) Puisque M est non nulle elle est de rang 1, i.e. son image est de dimension 1. On a donc X non nul appartenant à \mathbb{R}^2 tel que $\text{Im } M = \text{Vect}(X)$. Les colonnes de M sont donc αX et βX . Donc $M = X \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$. En posant $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, on a $M = X^t Y$.

ii) M est symétrique : $M = {}^t M$ donc $X^t Y = Y^t X$. Ainsi $\begin{pmatrix} x\alpha & x\beta \\ y\alpha & y\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \beta x & \beta y \end{pmatrix}$. De $x\beta = y\alpha$ et $v \neq 0$ on tire l'existence de λ tel que $\alpha = \lambda x$ et $\beta = \lambda y$, i.e. $Y = \lambda.X$. $\lambda \neq 0$ puisque $M \neq 0$.

iii) On a $M = \lambda.X^t X$ donc $MX = \lambda.X^t X X = [\lambda({}^t X X)].X$. Ainsi $[\lambda({}^t X X)] = \lambda\phi(X)$ est valeur propre de M , positive ou nulle. Or $X \neq 0$ et $\lambda \neq 0$ donc $\lambda > 0$. Alors $M = V^t V$ avec $V = \sqrt{\lambda}X$.

c) On considère l'application f de \mathbb{R}^2 dans \mathcal{T} associant à tout vecteur V la matrice carrée $f(V) = V^t V$.

i) f est surjective comme montré à la question b).

ii) f n'est pas injective puisque $f(-V) = f(V)$ pour toute V .

4° Soient p et q tels que $0 < p < q < 1$ et $p + q = 1$. $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

a) $\det A = p^2 - q^2 \neq 0$ donc A , de rang 2 n'appartient pas à \mathcal{T} .

b) Pour $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $A - V^t V = \begin{pmatrix} p - x^2 & q - xy \\ q - xy & p - y^2 \end{pmatrix}$. On pose alors

$$F(x, y) = \phi(A - V^t V) = (p - x^2)^2 + 2(q - xy)^2 + (p - y^2)^2.$$

c) On a $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -4(p - x^2)x - 4(q - xy)y$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -4(q - xy)x - 4(p - y^2)y$.

d) F est manifestement de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 donc pour $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 4(x + y)(x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 4(x - y)(x^2 + y^2 - p + q). \end{aligned}$$

e) Les points critiques de F sont les (x, y) solutions de $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v}(x, y) = 0 \end{cases}$. Puisque $q - p > 0$, F admet trois points critiques exactement : $(0, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

f) Pour tout x , $\begin{cases} F(x, x) - F(0, 0) = 4x^4 - 4x^2 = -4x^2 + o(x^2) \\ F(x, -x) - F(0, 0) = 4x^4 + (-8p + 4)x^2 = (-8p + 4)x^2 + o(x^2) \end{cases}$. Ainsi le point critique $(0, 0)$ est un point col de F puisque $\left[x \mapsto F(x, x) - F(0, 0) \right]$ admet un maximum en 0 tandis que, comme $(4 - 8p) > 0$, $\left[x \mapsto F(x, -x) - F(0, 0) \right]$ admet un minimum en 0.

g) F admet en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ un minimum absolu puisque, pour tout (x, y) , on a

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 2q(x - y)^2 + (q - p)^2 = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 2q(x - y)^2 + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Par symétrie ($F(x, y) = F(-x, -y)$ pour tous x et y) il en est de même en $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

h) On en déduit par construction de F que le minimum de l'expression $\phi(A - V^t V)$ lorsque V décrit l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^2 est $(q - p)^2$. Il est réalisé lorsque $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ou $V = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

i) La matrice M de \mathcal{T} , unique, qui minimise l'expression $\phi(A - M)$, i.e. l'élément de \mathcal{T} "le plus proche" de A , est donc $M = V^t V$ avec $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Soit φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 représenté par cette matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On a $M^2 = M$ donc φ est une projection. Son support est dirigé par V , sa direction par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$F \mid N$
