

1 GROUPE DIÉDRAL

CORRIGÉ

1° ABC est un triangle équilatéral du plan euclidien \mathcal{P} . Son centre est Ω , ses côtés sont de longueur 1. Is est l'ensemble des isométries laissant globalement invariant le triangle ABC .

a) \circ est une l.c.i. de Is puisque la composée de deux applications qui conservent les distances et qui laissent globalement invariant le triangle ABC en est une aussi.

\circ est associative comme dans tous les cas de composition d'applications.

L'identité du plan, id , est une isométrie du plan qui laisse bien sûr ABC globalement invariant. C'est donc bien le neutre de Is pour \circ .

Les éléments de Is sont des bijections (ceci est remontré par la suite), dont les bijections réciproques sont des isométries laissant le triangle ABC globalement invariant : les éléments de Is sont symétrisables dans Is pour \circ .

Ainsi (Is, \circ) est un groupe.

b) A, B et C sont les seuls points du triangle ABC à la distance 1 les uns des autres. Leurs images par un élément de Is auront la même propriété, donc tout élément de Is laisse l'ensemble $\{A, B, C\}$ invariant.

c) M un point du triangle ABC . Il appartient à $[AB]$ si et seulement si $AB = AM + MB$. En désignant par A', B' et M' les images de A, B et C par un élément φ de Is , on aura $A'B' = A'M' + M'B'$, donc M' dans $[A'B']$. L'image de $[AB]$ par φ est donc incluse dans $[A'B']$. Mais de la même façon on obtient que l'antécédent d'un élément de $[A'B']$ est dans $[AB]$.

Ainsi l'image par φ de Is du segment $[AB]$ est l'un des segments $[AB], [BC]$ ou $[CA]$.

d) Tout point P du triangle ABC est caractérisé par les trois distances PA, PB et PC . Désignant par A', B', C' et P' les images de A, B, C et P , on déduit de $PA = P'A', PB = P'B'$ et $PC = P'C'$ que P' est déterminé de manière unique par la seule connaissance des points A', B' et C' .

Ainsi tout élément φ de Is est entièrement caractérisé par la donnée des points $\varphi(A), \varphi(B)$ et $\varphi(C)$ comme images de A, B et C . Or $\{\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)\} = \{A, B, C\}$.

Il y a donc correspondance bijective entre les éléments de Is et les bijections de $\{A, B, C\}$ sur lui-même.

e) Ainsi Is est fini de cardinal $3! = 6$.

f) Les éléments de Is peuvent ainsi être désignés par les images qu'ils donnent aux points A, B et C .

Notons¹ $id = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$, $r^2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$, $s_a = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$, $s_b = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ et $s_c = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$.

La table de Pythagore (à lire de gauche à droite) de la loi \circ de Is est alors :

\circ	id	r	r^2	s_a	s_b	s_c
id	id	r	r^2	s_a	s_b	s_c
r	r	r^2	id	s_c	s_a	s_b
r^2	r^2	id	r	s_b	s_c	s_a
s_a	s_a	s_b	s_c	id	r	r^2
s_b	s_b	s_c	s_a	r^2	id	r
s_c	s_c	s_a	s_b	r	r^2	id

¹en fait r est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $2\pi/3$ (dans le cas ABC direct), s_a est la réflexion par rapport à la médiatrice de $[BC]$, ...

2° $(D, *)$ désigne un groupe diédral d'ordre 3 son neutre est e . Il existe dans D deux éléments x et y vérifiant $x \neq e, y^2 \neq e, x^2 = y^3 = (x * y)^2 = e$ tels que tous les éléments de D puissent être obtenus comme des produits d'éléments x et y . Reprenons le groupe (Is, \circ) précédent.

a) Un homomorphisme de groupe ψ de Is vers D devra vérifier nécessairement $\psi(id) = e, \psi(s_a) = x$ (ou s_b ou s_c) et $\psi(r) = y$ (ou r^2). Tous les éléments de D étant des produits d'éléments x et y sont donc images de composées de s_a et r . (par exemple, $x * y * y * x * y * x = \psi(s_a \circ r \circ r \circ s_a \circ r \circ s_a) = \psi(s_b)$). ψ est alors surjective. L'hypothèse $x \neq e, y^2 \neq e$ empêche que D ait moins de 6 éléments : ψ est bijective, donc $(D, *)$ et (Is, \circ) sont isomorphes.

b) Ainsi l'ensemble D est fini et son cardinal est 6, celui de Is . La table de Pythagore de $*$ est, en posant $y * y = z, x * y = w$ et $y * x = v$:

$*$	e	y	z	x	w	v
e	e	y	z	x	w	v
y	y	z	e	v	x	w
z	z	e	y	w	v	x
x	x	w	v	e	y	z
w	w	v	x	z	e	y
v	v	x	w	y	z	e

c) Les sous-groupes de $(D, *)$ sont les parties stables par $*$: $\{e\}, \{e, y, z\}, \{e, x\}, \{e, w\}, \{e, v\}, D$.

2 PAS SI COMPLEXE ...

CORRIGÉ

$P(z) = z^3 + (6 - 2i)z^2 + (10 + 4i)z + 16 + 4i$ pour tout z complexe. Soit ib un imaginaire pur (b est un réel). $P(ib) = (ib)^3 + (6 - 2i)(ib)^2 + (10 + 4i)(ib) + 16 + 4i = (-6b^2 - 4b + 16) + i(-b^3 + 2b^2 + 10b + 4)$. Donc $P(ib) = 0$ si et seulement si

$$-6b^2 - 4b + 16 = 0 \quad \text{et} \quad -b^3 + 2b^2 + 10b + 4 = 0$$

$(-2i)$ annule P . On en déduit, pour tout z , $P(z) = (z + 2i)(z^2 + (6 - 4i)z + (2 - 8i))$.

Le discriminant de l'équation $z^2 + (6 - 4i)z + (2 - 8i) = 0$ est $4(3 - 4i) = [2(2 - i)]^2$. (ça peut se trouver avec la relation $(z + |z|)^2 = z(2 \operatorname{Re}(z) + 2|z|)$). Ses solutions sont donc $(-5 + 3i)$ et $(-1 + i)$.

Les solutions de (e) : $z^3 + (6 - 2i)z^2 + (10 + 4i)z + 16 + 4i = 0$ sont donc $(-2i), (-5 + 3i)$ et $(-1 + i)$.

3 SUITE CONVERGENTE ... ENCORE

CORRIGÉ

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour tout n .

1° a) Une récurrence évidente amène à $u_n > 0$ pour tout n . Pour tout n , on a alors $e^{-u_n} < 1$ et donc $u_{n+1} < u_n$. La suite $(u_n)_n$ est donc décroissante et minorée (par 0), elle converge. Sa limite ℓ vérifie $\ell \geq 0$, mais aussi, par composition des limites $\ell = \ell e^{-\ell}$. On a donc $\ell = 0$.

b) Puisque $\lim_n u_n = 0$, on a $e^{-u_n} = 1 - u_n + o(u_n)$ et donc $u_{n+1} = u_n - u_n^2 + o(u_n^2)$.

c) Soit $(w_n)_n$ définie par $w_n = \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) - 1$ pour tout n .

On a $w_n = \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{1 - u_n + o(u_n)} - 1 - u_n \right) = \frac{1}{u_n} ((1 + u_n + o(u_n)) - 1 - u_n) = o(1)$.

Ainsi $(w_n)_n$ converge vers 0.

2° On pose, pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{w_1 + \dots + w_n}{n}$.

a) Pour $N \geq 1$ et $n > N$, on a $|v_n| = \frac{1}{n} |w_1 + \dots + w_N + w_{N+1} + \dots + w_n| \leq \frac{1}{n} |w_1 + \dots + w_N| + \frac{1}{n} |w_{N+1} + \dots + w_n| \leq \frac{1}{n} |w_1 + \dots + w_N| + \frac{1}{n} (|w_{N+1}| + \dots + |w_n|)$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(w_n)_n$ converge vers 0, on a un rang N tel que $|w_p| < \varepsilon$ pour $p > N$. Nommons $|w_1 + \dots + w_N| = K$. La suite $(K/n)_n$ converge vers 0, il existe donc un rang $N' > N$ tel que $K/n < \varepsilon$ pour $n > N'$.

Alors, pour $n > N'$, on a $|v_n| < \varepsilon + \frac{1}{n} (n - N)\varepsilon < 2\varepsilon$.

On a donc que $(v_n)_n$ converge de limite 0.

c) Pour tout $n > 0$, on a $v_n = \frac{1}{n} ((\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}) - 1) + \dots + ((\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}) - 1) = \frac{1}{n u_{n+1}} - \frac{1}{n u_1} - 1$.

Alors $\lim_n \frac{1}{n u_n} = 1$.

d) On déduit alors par définition $u_n \sim \frac{1}{n}$.