

## 1 CONSIDÉRATIONS LOGIQUES

CORRIGÉ

1° On donne les inconnues et les conditions qui les lient :

	chanteurs	pêcheurs	footballeurs
truands	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
bons	$\delta$	$\epsilon$	$\zeta$

$$\begin{cases} 1999 &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta \\ 1000 &= \delta + \beta + \gamma \\ 700 &= \alpha + \epsilon + \gamma \\ 800 &= \alpha + \beta + \zeta \end{cases}$$

Le nombre de truands est alors  $T = \alpha + \beta + \gamma = 2200 - 1999 = 201$ .

2° Soit  $\mathcal{C}$  : « Pour tout entier  $n$ , si  $n$  est impair alors il existe un entier  $p$  tel que  $n^2 = 8p + 1$  »

a) La contraposée de  $\mathcal{C}$  est  $\mathcal{C}'$  : « Pour tout entier  $n$ , si pour tout entier  $p$ ,  $n^2 \neq 8p + 1$  alors  $n$  est pair ».

b) Soit  $n$  impair. On a  $k$  entier tel que  $n = 2k + 1$ . Alors  $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$ . Or de  $k$  et  $(k + 1)$ , l'un des deux est pair, donc  $k(k + 1)$  est pair, s'écrit  $2p$ .

Ainsi  $n^2 = 8p + 1$ . Ceci démontre  $\mathcal{C}$ .

c) La réciproque de l'assertion  $\mathcal{C}$  est  $\mathcal{C}''$  : « Pour tout entier  $n$ , s'il existe entier  $p$  tel que  $n^2 = 8p + 1$  alors  $n$  est impair ».

Elle est vraie. [ $n$  pair donne  $n^2$  pair, donc  $n^2 \neq 8p + 1$  pour tout entier  $p$ ] démontre sa contraposée (qui est aussi la réciproque de  $\mathcal{C}'$ ).

## 2 CONSIDÉRATIONS FONCTIONNELLES

CORRIGÉ

1° Soit  $(e)$  :  $2 \arccos x + \arcsin x = \pi$ . Cette équation admet  $D = [-1; 1]$  pour ensemble de validité.

a) méthode 1. Pour tout  $x$  de  $D$  on a  $\arccos x + \arcsin x = \pi/2$ . Donc  $(e) \iff \arccos x = \pi/2$ . On a  $\mathcal{S} = \{0\}$ .

b) méthode 2. Soit la fonction  $f : \left[ x \mapsto 2 \arccos x + \arcsin x - \pi \right]$ . Elle est bien sûr dérivable sur  $] -1; 1[$  et  $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$  pour tout  $x$ .  $f$  est donc strictement décroissante sur  $D$ . Elle est nulle en 0 et donc 0 est solution unique de  $(e)$  :  $\mathcal{S} = \{0\}$ .

c) méthode 3. Pour  $x \in D$ , on a  $2 \arccos x \in [0; 2\pi]$  de sinus  $2x \sin(\arccos x)$ , et  $(\pi - \arcsin x) \in [\pi/2; 3\pi/2]$  de sinus  $x$ . Ainsi  $(e)$  rend nécessaire  $(x = 0)$  ou  $(\sin(\arccos x) = 1/2)$ . La deuxième condition impose  $\sqrt{1-x^2} = 1/2$  ou  $\sqrt{1-x^2} = -1/2$ . Des trois candidats 0,  $\sqrt{3}/2$  et  $-\sqrt{3}/2$  seul 0 convient et donc  $\mathcal{S} = \{0\}$ .

2° Soit la fonction  $f : \left[ x \mapsto \arctan \frac{1-x}{1+x} \right]$ .

a)  $\arctan$  est définie sur  $\mathbb{R}$  donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Toute fonction rationnelle est dérivable en tout réel où elle est définie, et  $\arctan$  est dérivable en tout réel. Pour  $x \in \mathcal{D}_f$ ,  $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ .

b) On a donc, sur  $\mathcal{D}_f$ ,  $(\arctan + f)' = 0$ . La fonction  $(\arctan + f)$  est donc constante sur  $] -\infty; -1[$  (et a pour limite  $-3\pi/4$  en  $-\infty$ ) et sur  $] -1; +\infty[$  (et en 0 vaut  $\pi/4$ ).

On a donc  $f(x) = -\arctan x + \frac{\pi}{4}$  pour  $x > -1$  et  $f(x) = -\arctan x - \frac{3\pi}{4}$  pour  $x < -1$ .

3° On pose  $\varphi : \left[ x \mapsto \arctan \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \right]$ .  $\arctan$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . donc  $\mathcal{D}_\varphi = ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ .

$\left[ x \mapsto \sqrt{x} \right]$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $\arctan$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi  $\varphi$  est dérivable sur  $] - \infty; -1[$  et sur  $]1; +\infty[$ . On a  $\varphi'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x^2-1}}$  de signe évident.

Les valeurs de  $\varphi$  en  $-1$  et  $1$  ne posent pas de problème. La limite en  $+\infty$  se traite comme somme. De plus, pour  $x < -1$ ,  $x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$  qui donne la limite en  $-\infty$ . Ainsi

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-		+	
$\varphi$	0	$-\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$

Le théorème de la bijection donne alors que  $\varphi$  réalise une bijection de  $D_\varphi$  sur  $D_2 = \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ . On définit donc une bijection réciproque,  $\varphi^{-1}$ , sur  $D_2$ .

Pour  $x \in D_\varphi$ , on pose  $y = \varphi(x) \in D_2$ . Alors  $\tan y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ . D'où  $\tan^2 y - 2x \tan y + x^2 = x^2 - 1$  et  $x = \frac{\tan^2 y + 1}{2 \tan y} = \frac{1}{\sin 2y}$ . On a ainsi  $\varphi^{-1} : \begin{cases} D_2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{\sin 2x} \end{cases}$ .

### 3 CONSIDÉRATIONS COMPLEXES

CORRIGÉ

1°  $\alpha$  un complexe non réel.  $\frac{\alpha - \bar{\alpha}z}{1 - z}$  est un réel pur si et seulement s'il est égal à son conjugué.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \bar{\alpha}z}{1 - z} = \overline{\left( \frac{\alpha - \bar{\alpha}z}{1 - z} \right)} &\iff (\alpha - \bar{\alpha}z)(1 - \bar{z}) = (1 - z)(\bar{\alpha} - \alpha\bar{z}) \\ &\iff \alpha + \bar{\alpha}z\bar{z} = \bar{\alpha} + \alpha z\bar{z} \\ &\iff (\alpha - \bar{\alpha})(1 - |z|^2) = 0 \end{aligned}$$

Puisque  $\alpha$  n'est pas réel, les  $z$  solutions sont les complexes de module 1.

2°  $\theta$  est un réel de  $]0, \pi[$ .

a)  $C = \frac{1 - \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta} = \frac{1 - e^{-i\theta}}{1 + e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}$  en simplifiant par  $e^{-i\theta/2}$ . Alors  $C = \frac{2i \sin \theta/2}{2 \cos \theta/2} = i \tan \theta/2$ .

$\tan \theta/2 > 0$  donc  $C$  a pour module  $\tan \theta/2$  et argument  $\pi/2$ .

b) Ses racines carrées sont donc  $\sqrt{\frac{\tan \theta/2}{2}}(1 + i)$  et  $\sqrt{\frac{\tan \theta/2}{2}}(-1 - i)$ .

3°  $a$  et  $b$  réels non nuls quelconques et  $c = 2d = \left[ 2 \arctan \frac{b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right]$ .

On a  $\tan c = \frac{2 \tan d}{1 - \tan^2 d} = \frac{2b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \frac{(a + \sqrt{a^2 + b^2})^2}{(a + \sqrt{a^2 + b^2})^2 - b^2} = \frac{b}{a}$ . Ainsi  $c$ , dans  $] - \pi; \pi[$ , et un argument de  $z = a + ib$  diffèrent d'un multiple de  $\pi$ .

Puisque  $(a + \sqrt{a^2 + b^2}) > 0$ ,  $b$  et  $c$  ont le même signe. Donc  $c$  est un argument de  $z$ .