

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**EXERCICE 1****première suite**

( 5 points)

1° A titre de préliminaire, utiliser une intégration par parties pour donner une primitive de la fonction  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ .

On considère maintenant la suite  $u$  définie pour  $n \geq 1$  par :  $u_n = \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=1}^n \ln(n+k) \right] - \ln n$ .

2° a) Démontrer :  $u_n = \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right]$  pour tout  $n \geq 1$ .

b) Pour  $k$  un entier, compris entre 1 et  $n$ , démontrer :

$$\frac{1}{n} \ln \left( 1 + \frac{k-1}{n} \right) \leq \int_{1+\frac{k-1}{n}}^{1+\frac{k}{n}} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right)$$

c) En déduire :  $u_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln x \, dx \leq u_n$

d) En déduire la convergence de  $(u_n)_n$  puis sa limite.

**EXERCICE 2****récréation combinatoire**

( 6 points)

1° Formulaire préliminaire. Établir pour  $n$  et  $i$  quelconques :

a)  $\sum_{k=0}^n \mathbf{C}_k^i = \mathbf{C}_{n+1}^{i+1}$

b)  $(n+1) \mathbf{C}_n^i = (i+1) \left( \mathbf{C}_n^{i+1} + \mathbf{C}_n^i \right)$

Pour deux entiers naturels quelconques,  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $B_{p,n} = \sum_{k=1}^n k^p$ .

2° On reconnaît aisément  $B_{0,n} = n$  et  $B_{1,n} = \frac{n(n+1)}{2}$ .

a) Montrer par récurrence  $B_{2,n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

b) Utiliser la relation de Newton  $\left[ \sum_{k=1}^n (k+1)^4 = \sum_{k=1}^n k^4 + 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n \right]$  pour donner une expression simple de  $B_{3,n}$ . Vérifier alors :  $B_{3,n} = (B_{1,n})^2$ .

3° En vue du cas général on étudie ici chaque terme  $n^p$  pour  $n$  et  $p$  quelconques. On admet l'existence d'une suite (unique) à double indice  $(S_{i,p})$  de nombres entiers telle que : pour tous  $n > 0$  et  $p > 0$ ,  $n^p = \sum_{i=1}^p S_{i,p} C_n^i$ .

a) Donner les valeurs de  $S_{1,1}$ ,  $S_{1,2}$ ,  $S_{2,2}$ .

b) En utilisant l'extraordinaire relation  $n^{p+1} = n^p(n+1-1)$ , établir les conditions nécessaires :

$$\begin{cases} S_{1,p+1} &= S_{1,p} &= 1 \\ S_{p+1,p+1} &= (p+1)S_{p,p} \\ S_{i,p+1} &= i(S_{i,p} + S_{i-1,p}) \text{ pour } 1 < i \leq p \end{cases}$$

c) Donner les termes  $S_{1,3}$ ,  $S_{2,3}$ ,  $S_{3,3}$ , puis  $S_{1,4}$ ,  $S_{2,4}$ ,  $S_{3,4}$ ,  $S_{4,4}$ .

4° Cas général, recherche d'une expression de  $B_{p,n}$ .

a) Dédire de ce qui précède :  $B_{p,n} = \sum_{i=1}^p S_{i,p} C_{n+1}^{i+1}$ .

b) Vérifier sur l'expression connue de  $B_{3,n}$ .

### EXERCICE 3

### suite deuxième

( 9 points)

Dans tout ce qui suit,  $\theta$  est un réel fixé une fois pour toutes dans  $]0, \pi[$ . On définit les trois suites  $(u_n)_n$ ,  $(A_n)_n$ ,  $(S_n)_n$  respectivement, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , par :

$$u_n = \frac{\sin n\theta}{n} \quad A_n = \sum_{k=1}^n \sin k\theta \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

1° a) Montrer, pour  $n \geq 1$  :  $\sin \frac{\theta}{2} A_n = \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right]$ .

b) En déduire  $|A_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$  pour  $n \geq 1$ .

2° a) Pour  $p \in \mathbb{N}^*$  établir :  $\sum_{k=1}^{p-1} A_{n+k} \left( \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \right) + \frac{A_{n+p}}{n+p} - \frac{A_n}{n+1} = \sum_{k=1}^p \frac{\sin(n+k)\theta}{n+k}$ .

b) En déduire l'existence d'un réel positif  $M$  tel que : pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left| \sum_{k=1}^p \frac{\sin(n+k)\theta}{n+k} \right| \leq \frac{M}{n}$

3° a) Montrer que la suite  $(S_n)_n$  est bornée.

b) On pose, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\alpha_n = \sup\{S_m / m \geq n\}$ . Montrer que  $(\alpha_n)_n$  est décroissante, puis établir sa convergence. (on notera sa limite).

c) Pour  $\varepsilon > 0$  choisi, montrer qu'il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$  on ait :

$$. |\alpha_n - s| < \varepsilon$$

$$. \text{l'existence d'un } q > n \text{ tel que } |S_q - \alpha_n| < \varepsilon \text{ et } |S_n - S_q| < \varepsilon.$$

d) En déduire puis la convergence de  $(S_n)_n$ .