

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1 **sous-groupes réels ou réalité des sous-groupes ?** (8 points)

On rappelle que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien. Pour x un réel quelconque, on notera $x\mathbb{Z}$ l'ensemble des px pour tous les p de \mathbb{Z} : $x\mathbb{Z} = \{px / p \in \mathbb{Z}\}$.

1° Montrer que \mathbb{Q} et $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

On considère désormais un sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$; on note $G^+ = G \cap]0, +\infty[$.

2° a) Montrer que G^+ admet une borne inférieure, positive ou nulle, qu'on notera δ .

b) Donner un exemple d'ensemble G pour lequel δ est nul, et un exemple pour lequel δ est positif.

3° Étude du cas $\delta > 0$.

a) Montrer : $G \cap]\delta, 2\delta[= \emptyset$.

b) Établir que δ est élément de G ; en déduire : $\delta\mathbb{Z} \subset G$.

c) Pour $g \in G$ quelconque, établir qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p\delta \leq g < (p+1)\delta$. En déduire : $g \in \delta\mathbb{Z}$.

On a ainsi établi que G est de la forme $\delta\mathbb{Z}$, il est en bijection avec \mathbb{Z} , on dit qu'il est discret.

4° Étude du cas $\delta = 0$.

a) d est un réel positif quelconque, $d > 0$. Établir l'existence de x dans G tel que $0 < x < d$. En déduire que pour a et b réels tels que $a < b$, on a $G \cap]a, b[\neq \emptyset$.

b) Montrer que pour tout réel r et tout entier naturel n , il existe un élément g de G distant de r de moins de 10^{-n} .

On dit dans ce cas que G est dense dans \mathbb{R} .

EXERCICE 2

encore des suites ? pas de différence

(12 points)

On désigne par $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur \mathbb{N} . On rappelle que $(\mathcal{S}, +, \times)$ est un anneau commutatif. Dans \mathcal{S} , on note $(Z_n)_n$ et $(U_n)_n$ les suites constantes respectivement à 0 et 1. Par raison de commodité, on notera indifféremment u ou $(u_n)_n$ un élément de \mathcal{S} .

On définit Δ sur \mathcal{S} par : pour $(u_n)_n$ dans \mathcal{S} , $\Delta(u)$ est la suite $(v_n)_n$ telle que $\forall n \ v_n = u_{n+1} - u_n$.

1° Exemples. Caractériser $\Delta(u)$ dans chacun des cas suivants :

a) $\forall n \ u_n = n$

b) $\forall n \ u_n = n^2$

c) $\forall n \ u_n = 2^n$

2° Propriétés.

a) Montrer que Δ est un homomorphisme du groupe $(\mathcal{S}, +)$ vers lui-même.

b) En donner le noyau. Δ est-elle injective ?

c) Montrer que Δ est surjective.

d) Caractériser les antécédents de $(v_n)_n$ par Δ dans le cas où $\forall n \ v_n = 3n - 1$.

e) Définir la suite $(A_n)_n$ telle que $\Delta(A) = U$ et $A_0 = 0$.

f) Pour un réel k donné, existe-t-il des éléments $(u_n)_n$ de \mathcal{S} tels que $\Delta(u) = k.u$?

3° Soit E le sous-ensemble de \mathcal{S} des suites $(u_n)_n$ telles que $\forall n \ 4u_{n+3} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n$.

a) Vérifier que $(Z_n)_n$, $(U_n)_n$ et $(A_n)_n$ sont éléments de E .

b) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{S}, +)$.

c) Prouver $\Delta(E) \subset E$.

d) Établir que $(E, +)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^3, +)$.

(dans \mathbb{R}^3 , l'addition est définie par $(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$)

e) Pour $u \in E$, montrer que $\Delta(\Delta(u))$ est géométrique. En donner la raison.

f) En déduire une expression du terme général u_n d'une suite $(u_n)_n$ de E , en fonction de n , u_0 , u_1 et u_2 .

F I N
