

### 1 ALGÈBRE

CORRIGÉ

$E$  un plan vectoriel réel muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ . Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$   $f_{a,b}$  a pour matrice  $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ ab & 1+b \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**1°**  $\det(f_{a,b}) = \det(M_{a,b}) = 1 + a + b$  donc  $f_{a,b}$  est bijectif si et seulement si  $a + b \neq -1$ .

**2°** Pour  $a + b \neq -1$ ,  $f_{a,b}$  est bijectif donc  $\text{Ker}(f_{a,b}) = \{0_E\}$  et  $\text{Im}(f_{a,b}) = E$ .

Pour  $a + b = -1$ , on a  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \text{Ker}(f_{a,b}) \iff (1+a)\alpha + \beta = 0$  donc  $\text{Ker}(f_{a,b}) = \text{Vect}(e_1 + b e_2)$ .  $\text{Im}(f_{a,b})$  est alors de dimension 1 et  $f_{a,b}(e_2) = e_1 - a e_2 \neq 0_E$ . Ainsi  $\text{Im}(f_{a,b}) = \text{Vect}(e_1 - a e_2)$ .

**3° a)**  $f_{a,b}$  est une symétrie vectorielle si et seulement si  $f_{a,b} \circ f_{a,b} = \text{id}_E$ . Or  $M_{a,b}^2 = \begin{pmatrix} (1+a)^2 + ab & 2+a+b \\ ab(2+a+b) & ab + (1+b)^2 \end{pmatrix}$ .

Donc  $f_{a,b}$  symétrie vectorielle si et seulement si

$$\begin{cases} (1+a)^2 + ab = 1 \\ 2+a+b = 0 \\ ab(2+a+b) = 0 \\ ab + (1+b)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a(2+a+b) = 0 \\ 2+a+b = 0 \\ ab(2+a+b) = 0 \\ b(2+a+b) = 0 \end{cases}$$

Ainsi  $f_{a,b}$  symétrie vectorielle si et seulement si  $2 + a + b = 0$ .

**b)** On a  $f_{-4,2}$  symétrie vectorielle. Son support est l'ensemble des vecteurs invariants. Or  $M_{-4,2} - I_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ , de rang 1, et donc le support de la symétrie  $f_{-4,2}$  est la droite  $\text{Vect}(e_1 + 4.e_2)$ .

La direction de la symétrie est le supplémentaire du support, ensemble des vecteurs opposés à leur image. Or  $M_{-4,2} + I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$  et donc la direction de la symétrie  $f_{-4,2}$  est la droite  $\text{Vect}(e_1 + 2.e_2)$ .

**4° a)**  $f_{a,b}$  est une projection vectorielle si et seulement si  $f_{a,b} \circ f_{a,b} = f_{a,b}$ . Or  $M_{a,b}^2 = \begin{pmatrix} (1+a)^2 + ab & 2+a+b \\ ab(2+a+b) & ab + (1+b)^2 \end{pmatrix}$ .

Donc  $f_{a,b}$  projection vectorielle si et seulement si

$$\begin{cases} (1+a)^2 + ab = 1+a \\ 2+a+b = 1 \\ ab(2+a+b) = ab \\ ab + (1+b)^2 = 1+b \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a(1+a+b) = 0 \\ 1+a+b = 0 \\ ab(1+a+b) = 0 \\ b(1+a+b) = 0 \end{cases}$$

Ainsi  $f_{a,b}$  projection vectorielle si et seulement si  $1 + a + b = 0$ .

**b)** On retrouve que  $f_{a,b}$  projection vectorielle si et seulement si  $f_{a,b}$  est non bijective. Son support est alors  $\text{Im}(f_{a,b}) = \text{Vect}(e_1 - a e_2)$  et sa direction  $\text{Ker}(f_{a,b}) = \text{Vect}(e_1 + b e_2)$ .

5° a ) Les valeurs propres de  $f_{a,b}$  sont les  $\lambda$  réels tels que  $f_{a,b} - \lambda \cdot id_E$  n'est pas bijectif.

Or  $M_{a,b} - \lambda \cdot I_2 = \begin{pmatrix} (1+a) - \lambda & 1 \\ ab & (1+b) - \lambda \end{pmatrix}$  et  $\det(M_{a,b} - \lambda \cdot I_2) = \lambda^2 - (2+a+b)\lambda + (1+a+b)$ .

Le polynôme  $P = X^2 - (2+a+b)X + (1+a+b)$  a pour discriminant  $(a+b)^2$  et comme racines 1 et  $1+a+b$  éventuellement confondues.

Ainsi  $f_{a,b}$  admet deux valeurs propres distinctes si et seulement si  $a+b \neq 0$ . Pour  $a+b \neq 0$  les valeurs propres, distinctes, de  $f_{a,b}$  sont 1 et  $1+a+b$ .

b ) Cas particulier  $a = 1, b = -2$ . On est dans le cas  $a+b \neq 0$  et donc  $f_{1,-2}$  admet deux valeurs propres distinctes. Mais aussi  $a+b = -1$ , cas déjà étudié de la projection. On a ainsi une base de vecteurs propres :  $(e_1 - e_2, e_1 - 2e_2)$ , base dans laquelle la matrice de  $f_{1,-2}$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

c ) Cas particulier  $a = -1, b = 1$ . On est dans le cas  $a+b = 0$ ,  $f_{-1,1}$  admet 1 pour valeur propre unique. Or l'ensemble des invariants de  $f_{-1,1}$  est la droite  $\text{Vect}(e_1 + e_2)$ . Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice de  $f_{-1,1}$  soit diagonale.

## 2 ANALYSE

CORRIGÉ

$f$  définie par :  $f(x) = (x^2 - 1) \arctan \frac{1}{2x-1}$  ;  $\mathcal{C}$  courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

### Partie A

1° a )  $\mathcal{D}_{\arctan} = \mathbb{R}$  donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ , noté  $\mathcal{D}$ .

b )  $\arctan$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et les polynômes et fractions rationnelles sont  $C^\infty$  sur tout intervalle où ils sont définis. Ainsi  $f$  est  $C^\infty$  sur  $] -\infty, \frac{1}{2}[$  et sur  $\frac{1}{2}, +\infty[$ .

Pour  $x \in \mathcal{D}, x \neq 0$  :  $f'(x) = 2xg(x)$  avec

$$g(x) = \arctan \frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{x(4x^2-4x+2)}$$

c ) Soit  $P = X^2 - 4X + 7$ .  $P$  a pour discriminant  $-12$  et n'admet donc pas de racine réelle.

Pour  $x \neq 0$ ,  $P\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1}{x^2}$ . Alors  $\forall x, 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 = x^4 + x^2 P\left(x + \frac{1}{x}\right) > 0$ .

d )  $g$  est dérivable en tout  $x \in \mathcal{D}, x \neq 0$ , et  $g'(x) = -\frac{1}{2} \frac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1}{x^2(2x^2 - 2x + 1)^2}$ . Ainsi  $g$  est strictement décroissante sur tout intervalle où elle est définie.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  donc  $g$  négative sur  $] -\infty, 0[$  et positive sur  $\frac{1}{2}, +\infty[$ .

$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1/2, x < 1/2} = \frac{3-\pi}{2} < 0$ . La continuité de  $g$  sur  $]0, \frac{1}{2}[$  donne, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence d'un zéro de  $g$  sur cet intervalle, et sa stricte monotonie en donne, par l'injectivité qui en résulte, l'unicité de ce zéro. Soit donc  $a \in ]0, \frac{1}{2}[$  tel que  $g(a) = 0$ . On a alors  $g$  positive sur  $]0, a[$  et négative sur  $]a, \frac{1}{2}[$ .

e ) D'où les variations de  $f$  :

| $x$     | $-\infty$ | $a$    | $1/2$             | $+\infty$         |
|---------|-----------|--------|-------------------|-------------------|
| $f'(x)$ | +         | 0      | -                 | +                 |
| $f$     | $-\infty$ | $f(a)$ | $+\frac{3\pi}{8}$ | $-\frac{3\pi}{8}$ |

**2° a )**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x-1} = 0$  et  $\arctan u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ . Donc  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2-1}{2x-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2}$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{x^2-1}{2x-1} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{x}{2}$ .

**b )** On rappelle :  $\arctan' z = \frac{1}{1+z^2}$  et  $\arctan 0 = 0$ . Donc par primitivation de  $DL_2(0) : \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + o(z^2)$  on déduit un  $DL_3(0)$  de la fonction  $\arctan : \arctan z = z - \frac{1}{3}z^3 + o(z^3) = z$ .

Pour  $u \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= f\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2u} \\ &= \left(\frac{1-u^2}{u^2}\right) \arctan\left(\frac{u}{2-u}\right) \\ &= \left(\frac{1-u^2}{u^2}\right) \arctan\left(\frac{u}{2} \frac{1}{1-u/2}\right) - \frac{1}{2u} \\ &= \left(\frac{1-u^2}{u^2}\right) \arctan\left(\frac{u}{2}\left(1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{32} + o(u^2)\right)\right) - \frac{1}{2u} \\ &= \left(\frac{1-u^2}{u^2}\right) \arctan\left(\frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{8} + o(u^3)\right) - \frac{1}{2u} \\ &= \left(\frac{1-u^2}{u^2}\right) \left[\frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{12} + o(u^3)\right] - \frac{1}{2u} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{5}{12}u + o(u) \end{aligned}$$

**c )** Pour  $u$  au voisinage de 0, ayant  $f\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2u} = \frac{1}{4} - \frac{5}{12}u + o(u)$ , on tire, pour  $x$  au voisinage de  $+\infty$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{5}{12x} + o(1/x)$ .

Ainsi, la droite  $\Delta$  d'équation " $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ " est asymptote à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}$  est au dessus de  $\Delta$  dans le demi-plan d'équation " $x < 0$ ", en dessous dans le demi-plan d'équation " $x > 0$ ".

**3° a )** La fonction  $\varphi : [x \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)]$  de classe  $C^\infty$  sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

Pour  $x > 0$ ,  $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{(1/x)^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} = 0$ . Ainsi  $\varphi$  est constante sur  $]0, +\infty[$ . La valeur constante de  $\varphi$  sur cet intervalle est  $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$ .

Pour les mêmes raisons, on trouve  $\varphi$  constante sur  $] -\infty, 0[$  et de valeur constante  $\varphi(-1) = -\frac{\pi}{2}$ .

**b )** Pour  $h \neq 0$ ,  $f\left(\frac{1}{2} + h\right) = \left(h^2 + h - \frac{3}{4}\right) \arctan\left(\frac{1}{2h}\right)$ .

Ainsi, pour  $h > 0$ ,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2} + h\right) &= \left(h^2 + h - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2h\right) \\ &= \left(h^2 + h - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{\pi}{2} - (2h + o(h^2))\right) \\ &= -\frac{3\pi}{8} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}\right)h + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

De même, pour  $h < 0$ ,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2} + h\right) &= \left(h^2 + h - \frac{3}{4}\right) \left(-\frac{\pi}{2} - \arctan 2h\right) \\ &= \left(h^2 + h - \frac{3}{4}\right) \left(-\frac{\pi}{2} - (2h + o(h^2))\right) \\ &= \frac{3\pi}{8} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{2}\right)h - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  ne peut pas être prolongée par continuité en  $1/2$  puisque  $\lim_{x \rightarrow 1/2, x < 1/2} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1/2, x > 1/2} f(x)$ .

**c )** De plus  $\mathcal{C}$  admet deux points asymptotes :

- . Le point de coordonnées  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{8}\right)$  avec une tangente de pente  $\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$  et la courbe sous la tangente,
- . Le point de coordonnées  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3\pi}{8}\right)$  avec une tangente de pente  $\left(\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$  et la courbe sous la tangente.

## Partie B

**1°** Pour  $-1 < x < 0$ , on a  $-2 < 2x < 0$  et  $-1 < \frac{1}{2x-1} < -\frac{1}{3}$ .

Ainsi  $-\frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right) < 0$  et donc  $0 < 2x \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right) < \frac{\pi}{2}$ .

D'autre part, pour  $-1 < x < 0$ , on a  $0 < 1 - x^2 < 1$  et  $2 < (2x-1)^2 + 1 < 5$  et donc  $0 < \frac{2(1-x^2)}{(2x-1)^2+1} < 1$ .

D'où  $\forall x \in [-1, 0]$ ,  $0 < f'(x) < \frac{\pi}{2} + 1$ .

**2°** On définit la suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -\frac{1}{\pi} f(u_n) \end{cases}$

**a )**  $f$  est connue croissante sur  $[-1, 0]$  ;  $f(0) = \frac{\pi}{4}$  et  $f(-1) = 0$ . Ainsi  $f\langle [-1, 0] \rangle = [0, \frac{\pi}{4}]$  par continuité.

Ayant  $u_0 = 0$ , une récurrence immédiate amène à  $u_n \in [-1, 0]$  pour tout  $n$ .

**b )** La fonction  $-\frac{1}{\pi} f$  est strictement décroissante sur  $[-1, 0]$ . De  $u_2 < u_0$  on tire  $u_3 > u_1$ . Puis une récurrence évidente amène à  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  strictement décroissante et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante.

**c )** La fonction  $-\frac{1}{\pi} f$  est de classe  $C^1$  sur  $[-1, 0]$ , et pour  $-1 < x < 0$ , on a  $-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} < -\frac{1}{\pi} f'(x) < 0$ . En notant  $k = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$ , on a  $|\frac{1}{\pi} f'| \leq k$  sur  $[-1, 0]$ . (il faut remarquer ici  $0 < k < 1$ ).

Le théorème des accroissements finis donne alors,

$$\forall (a, b) \in [-1, 0]^2 \quad \left| -\frac{1}{\pi} f(a) + \frac{1}{\pi} f(b) \right| \leq k |a - b|$$

Ainsi pour tout  $n : |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k |u_{n+1} - u_n|$ .

**d )** Une récurrence immédiate à partir du résultat précédent donne pour tout  $n : |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ . Or  $0 < k < 1$  donc  $\lim_n k^n = 0$ , et donc  $\lim_n (u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$ .

les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont alors adjacentes. Donc convergentes, de même limite  $\ell$ . S'agissant des suites extraites des termes de rangs pairs et des termes de rangs impairs de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , celle-ci converge de limite  $\ell$ .

**e )** On a pour tout  $n$ ,  $u_{2n+1} < \ell < u_{2n}$ . Or  $|u_{2n+1} - u_{2n}| \leq k^{2n} |u_1 - u_0| = \frac{k^{2n}}{4}$ .

Ainsi  $u_n$  approche  $\ell$  à moins de  $10^{-3}$  dès que  $\frac{k^n}{4} < 10^{-3}$ , c'est à dire dès que  $n > \frac{\log 4 - 3}{\log k}$  (soit environ  $n \geq 9$ ).

---

**F I N**

---