

à titre de préliminaire

$$\text{Soit } g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \left(\frac{t^2}{t^2-1}, \frac{t^3}{t^2-1} \right) \end{cases}$$

$$1^\circ \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. g(2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right) \text{ et } \vec{g}'(2) = \left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9} \right) \text{ puisque pour tout } t, \vec{g}'(t) = \left(\frac{-2t}{(t^2-1)^2}, \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2} \right).$$

2° Les variations sont faciles, compte tenu que g_1 est paire et g_2 impaire :

t	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g_1'(t)$		—	—	—
g_1	0	$+\infty$	$3/2$	1
$g_2'(t)$		—	0	+
g_2	0	$+\infty$	$3\sqrt{3}/2$	$+\infty$

3° Au voisinage de 0 on a le développement limité : $g(t) = (0, 0) + t.(0, 0) - t^2.(1, 0) - t^3.(0, 1) + o(t^3)$.

la courbe

Soit \mathcal{C} la courbe de \mathbb{R}^2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{t^2}{t^2-1} \\ y = \frac{t^3}{t^2-1} \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. \mathcal{C} est paramétrée par g ; les parités de ses composantes donnent \mathcal{C} symétriques par rapport à l'axe des abscisses. L'étude qui suit se fera sur $D = [0; 1[\cup]1; +\infty[$.

1° De la partie précédente on tire $A = g(2)$ et puisque $u = \vec{g}'(2)$ n'est pas nul, il dirige la tangente à \mathcal{C} en A .

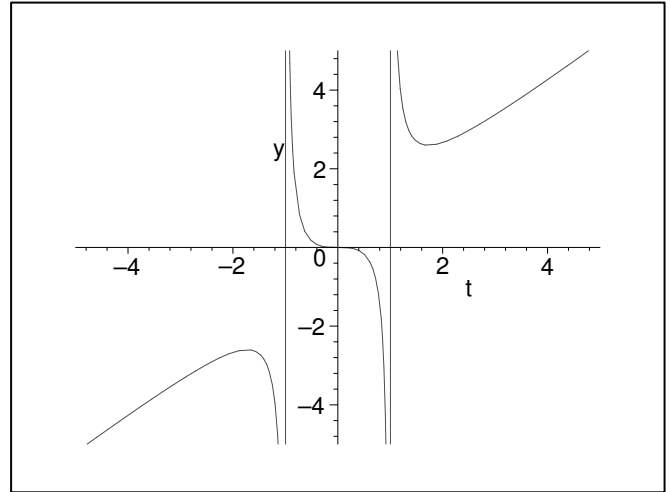
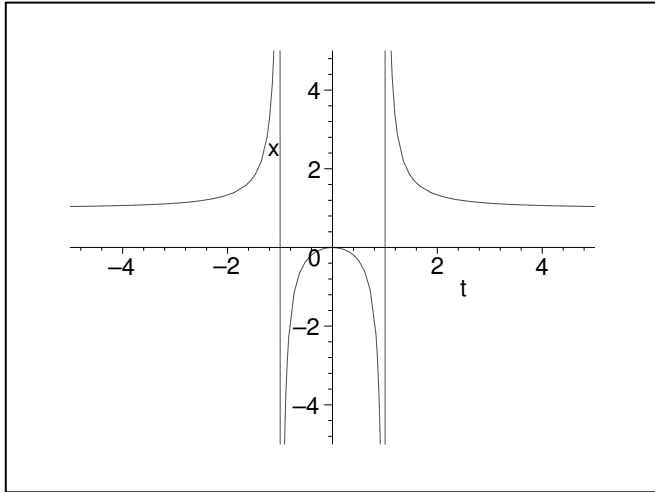
2° Les variations étudiées de g donnent $\vec{g}'(0) = (0, 0)$ donc $g(0)$ comme point stationnaire de \mathcal{C} . Le DL de g en 0 montre que $\vec{g}''(0)$ est non nul et que $\vec{g}^{(3)}(0)$ lui est non colinéaire : $g(0)$ est un point de rebroussement avec traversée de la tangente.

3° Des limites de g_1 et g_2 en $+\infty$ on tire que la droite d'équation $(x = 1)$ est asymptote à \mathcal{C} . La courbe est à droite de son asymptote.

Pour $t \in D^*$, on a $\frac{g_2(t)}{g_1(t)} = t$. Ainsi la limite 1 en 1. De plus $g_2(t) - g_1(t) = \frac{t^2}{t+1}$ pour $t \in D^*$, donc la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à \mathcal{C} . Enfin, de $(g_2(t) - g_1(t) - \frac{1}{2}) = (t-1) \frac{2t+1}{t+1}$. D'où la position de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{D} : au dessus pour les paramètres supérieurs à 1, en dessous pour les autres.

4° D'où la courbe après une session Maple :

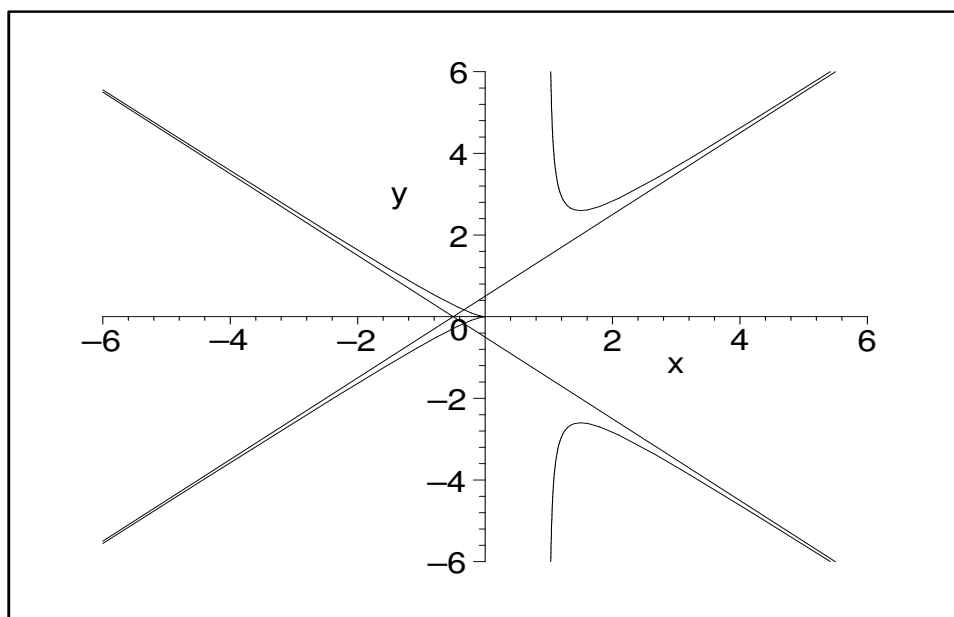
```
> x := t -> t^2 / (t^2 - 1) : y := t -> t*t^2 / (t^2 - 1) : dx := D(x) : dy := D(y) :
> normal (dx (t)) ; normal (dy (t)) ;
-2 \frac{t}{(t^2-1)^2} \quad \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}
> g := t -> (x(t), y(t)) : dg := t -> (dx(t), dy(t)) :
> plot (x(t), t=-5..5, 'x'=-5..5) ; plot (y(t), t=-5..5, 'y'=-5..5) ;
```



```

> A := g(2) ; u := vector ([dg(2)]) ;
                                 $A := \frac{4}{3}, \frac{8}{3}$        $u := \left[ \frac{-4}{9}, \frac{4}{9} \right]$ 
> series (x(t), t=0, 4) ; series (y(t), t=0, 4) ;
                                 $-t^2 + O(t^4)$        $-t^3 + O(t^5)$ 
> solve ({dx(t)=0, dy(t)=0}, t) ;
                                {t=0}
> simplify (y(t)/x(t)) ; simplify (y(t) - x(t)) ; simplify (y(t) - x(t) - 1/2) ;
                                 $t$        $\frac{t^2}{t+1}$        $\frac{1}{2} \frac{2t^2 - t - 1}{t+1}$ 
> limit (x(t), t=1, right) ; limit (y(t), t=1, right) ; limit (y(t)/x(t), t=1, right) ;
> limit (y(t)-x(t), t=1, right) ;
                                 $\infty$        $\infty$        $1$        $\frac{1}{2}$ 
> limit (x(t), t=1, left) ; limit (y(t), t=1, left) ; limit (y(t)/x(t), t=1, left) ;
> limit (y(t)-x(t), t=1, left) ;
                                 $-\infty$        $-\infty$        $1$        $\frac{1}{2}$ 
> plot ([x(t), y(t), t=-30..30], x=-6..6, y=-6..6, color=black, numpoints = 500) ;

```



le graphe

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x(x^2 - y^2) + y^2 \end{cases}$ On définit $G = \{(x, y) / f(x, y) = 0\}$.

1° a) On trouve aisément $\forall t \ f(g(t)) = 0$.

b) $A = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) = g(2)$ donc, puisque $f(g(2)) = 0$, on a $A \in G$.

c) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{\text{grad}(f)}(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = (3x^2 - y^2, -2xy + 2y)$.

Ainsi $\overrightarrow{\text{grad}(f)}(A) = \left(-\frac{16}{9}, -\frac{16}{9}\right)$ qui est orthogonal à u .

En un point non stationnaire $M = g(t)$, on a la tangente dirigée par $u = \overrightarrow{g'}(t) = \left(\frac{-2t}{(t^2 - 1)^2}, \frac{t^2(t^2 - 3)}{(t^2 - 1)^2}\right)$ et $\overrightarrow{\text{grad}(f)}(g(t)) = \left(\frac{3t^4 - t^6}{(t^2 - 1)^2}, \frac{-2t^3}{(t^2 - 1)^2}\right)$; ces deux vecteurs sont orthogonaux.

Dans le cas général, puisque pour tout t , $f(g(t)) = 0$, on tire en dérivant, pour tout t , $g'_1(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) + g'_2(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) = 0$ donc $\overrightarrow{g'}(t) \perp \overrightarrow{\text{grad}(f)}(g(t))$.

2° a) $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne s'annule pas sur $]1; +\infty[\times]0; +\infty[$ donc G définit implicitement au voisinage de A une fonction numérique de la variable réelle, qu'on désignera désormais par φ .

b) φ est ainsi définie sur $I =]1; +\infty[$; f , fonction polynomiale admet des dérivées de tous ordres. Puisque pour tout $x > 1$ on a $f(x, \varphi(x)) = 0$, on a φ dérivable et pour tout $x > 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0$ Ainsi, pour $x > 1$, $\varphi'(x) = \frac{3x^2 - \varphi(x)^2}{2\varphi(x) \cdot (x - 1)}$. On obtient alors par récurrence évidente que φ est de classe C^∞ sur I .

implicitement

φ est désormais l'application de $I =]1; +\infty[$ dans \mathbb{R} ayant pour graphe G .

1° a) Pour $x > 1$, on a $\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$.

b) $\frac{4}{3} = g_1(2)$ donc $\varphi\left(\frac{4}{3}\right) = g_2(2) = \frac{8}{3}$. Comme $\overrightarrow{\text{grad}(f)}(g(2)) = \left(-\frac{16}{9}, -\frac{16}{9}\right)$ on a $\varphi'\left(\frac{4}{3}\right) = -1$.

c) On peut chercher $\varphi''\left(\frac{4}{3}\right)$ et utiliser le théorème de Taylor-Young.

$$\forall x > 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0.$$

$$\forall x > 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, \varphi(x)) + 2\varphi'(x) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \varphi(x)) + (\varphi'(x))^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, \varphi(x)) + \varphi''(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0.$$

De $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) = 2(1 - x)$ on tire $\varphi''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{81}{8}$

D'où le $DL_2\left(\frac{4}{3}\right) : \varphi\left(\frac{4}{3} + v\right) = \frac{8}{3} - v + \frac{81}{16}v^2 + o(v^2)$.

2° a) Pour tout $x > 1$ on a $f(x, \varphi(x)) = 0$ i.e. $x(x^2 - \varphi^2(x)) + \varphi^2(x) = 0$. En dérivant on a $2(1 - x)\varphi(x)\varphi'(x) - \varphi^2(x) + 3x^2 = 0$ et donc φ est solution sur I de l'équation différentielle $2(1 - x)yy' - y^2 + 3x^2 = 0$.

b) On pose $\psi = \varphi^2$. Pour tout $x > 1$ on a $\pi'(x) = 2\varphi'(x)\varphi(x)$ donc $(1-x)\psi'(x) - 9\psi(x) + 3x^2 = 0$. Ainsi ψ est solution sur I de l'équation $z'(1-x) - z + 3x^2 = 0$.

explicitement

Soient les équations différentielles $(e) : (1-x)z' = z - 3x^2$ et $(e') : (1-x)z' = z$.

1° (e') est du premier ordre, homogène, ses solutions sur $I =]1, +\infty[$ sont les $\left[x \mapsto \frac{k}{x-1} \right]$ pour $k \in \mathbb{R}$.

2° Soit $h \in C^1$ sur I . $\left[x \mapsto \frac{h(x)}{x-1} \right]$ est solution de (e) sur I si et seulement si $h'(x) = 3x^2$ pour tout x .

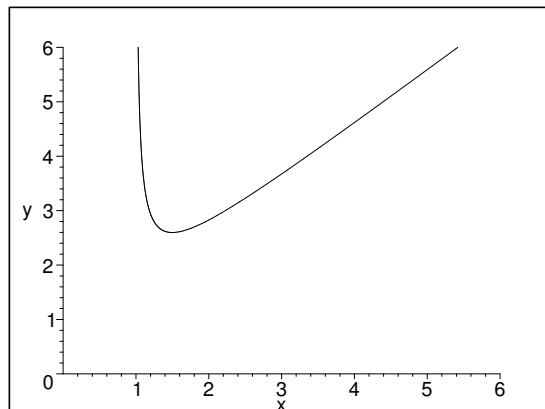
Les solutions de (e) sur I sont ainsi les $\left[x \mapsto \frac{x^3 + k}{x-1} \right]$ pour $k \in \mathbb{R}$.

3° a) ψ solution de (e) sur I et $\psi\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^2$. On trouve $\psi = \left[x \mapsto \frac{x^3 + k}{x-1} \right]$ avec $k = 0$.

Par ailleurs φ est positive sur I donc $\forall x \in I \varphi(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

b) De l'expression précédente on tire $\varphi'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x^3}}$ donc $\varphi'\left(\frac{4}{3}\right) = -1$.

```
> f := (a,b) -> a*(a^2-b^2)+b^2 ;
                                f := (a, b) -> a(a^2 - b^2) + b^2
> simplify (f (g(t))) ;
                                0
> f(4/3,8/3) ;
                                0
> linalg[grad](f(a,b), vector ([a,b])) ;
                                [3 a^2 - b^2, -2 a b + 2 b]
> g := subs (a=x(2), b=y(2), %) ;
                                g := [-16/9, -16/9]
> linalg[dotprod] (u, g) ;
                                0
> plots[implicitplot] (f, 1..6, 0..6, numpoints = 10000, color=black) ;
```



```
> x := 'x' ;
> eq2 := diff (z(x), x) * (1-x) - z(x) + 3*x^2 = 0 ;
> dsolve (eq2, z(x)) ;
                                eq2 := (∂/∂x z(x))(1 - x) - z(x) + 3 x^2 = 0
                                z(x) = (x^3 + _C1)/(-1 + x)
```