

1 suite de fonctions

CORRIGÉ

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $[0, 1]$ la fonction f_n par :

$$f_n(t) = \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \text{ si } t \in \left] \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \quad 1 \leq k \leq n, \quad \text{et } f_n(0) = 0$$

a) Pour tout n , $f_n(0) = 0$ donc bien sûr $(f_n(0))_n$ converge vers 0.

Pour $x \in]0, 1]$ et $n \geq 1$, ou bien nx est l'entier k , et alors $f_n(x) = \frac{1}{1+x}$, ou bien nx n'est pas un entier.

Dans ce cas on note $k = E(nx) + 1$, et on a $x \in \left] \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$ donc $f_n(x) = \frac{1}{1+k/n}$. Or $(k-1) < x < k$ donc $x < k < x+1$ et donc $\frac{1}{1+(x+1/n)} < f_n(x) < \frac{1}{1+x}$.

Ainsi, dans tous les cas on a $\frac{1}{1+(x+1/n)} < f_n(x) \leq \frac{1}{1+x}$ et le théorème des gendarmes permet de déduire que $(f_n(x))_n$ converge vers $\frac{1}{1+x}$.

Nous avons montré que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $f : \left[x \mapsto \left(\frac{1}{1+x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } 0 \text{ si } x = 0 \right) \right]$.

b) f n'est bien sûr pas continue en 0 puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} \neq 0$.

c) Soit $n \geq 1$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ on a f_n constante sur $\left] \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$. f étant décroissante sur $]0, 1]$, on a $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f_n\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n}{(n-k+1)(n-k)}$ pour $x \in \left] \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$.

On a donc $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{n}{n(n+1)}$ pour tout $x \in [0, 1]$. Ayant $\lim_n \frac{1}{n+1} = 0$, la convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme.

2 recherche de points fixes

CORRIGÉ

Partie A

T désigne une fonction, définie sur \mathbb{R} , continue. Le réel y étant choisi, la suite $(y_n)_n$ est définie par récurrence par $y_0 = y$ et $y_{n+1} = T(y_n)$ pour tout n .

1° Supposons ici que $(y_n)_n$ converge, de limite x . $(y_{n+1})_n$, extraite de $(y_n)_n$, converge vers x , et $(T(y_n))_n$ converge vers $T(x)$ puisque T est continue en x . Donc $T(x) = x$, x est un point fixe de T .

2° a et b sont deux réels, $a < b$ et supposons ici qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que T vérifie : $|T(u) - T(v)| \leq k|u - v|$ pour tous u et v de $[a, b]$.

a) α et β points fixes de T dans $[a, b]$ impose $|T(\alpha) - T(\beta)| = |\alpha - \beta|$, donc $|\alpha - \beta| \leq k|\alpha - \beta|$ dont on tire $\alpha = \beta$.

Ainsi T ne peut pas avoir plus d'un point fixe dans $[a, b]$.

La fonction constante de valeur $(b + 1)$ n'admet bien sûr pas de point fixe dans $[a, b]$ bien que rentrant dans les hypothèses.

b) Supposons ici que $x \in [a, b]$ soit un point fixe de T et que $y_n \in [a, b]$ pour tout n . On a pour tout n , $|T(y_{n+1}) - T(x)| \leq k |y_n - x|$. Par récurrence immédiate on tire $|T(y_n) - T(x)| \leq k^n |y - x|$ pour tout n . Or $0 < k < 1$ donc $\lim_n k^n = 0$ et $\lim_n y_n = x$.

Ainsi la suite $(y_n)_n$ converge vers x .

3° a et b sont deux réels, $a < b$ et supposons ici que T laisse $[a, b]$ stable (i.e. $T([a, b]) \subset [a, b]$) et $y \in [a, b]$.

a) Une récurrence immédiate donne $y_n \in [a, b]$ pour tout n . Donc $(y_n)_n$ est bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne l'existence d'une suite extraite $(y_{\varphi(n)})_n$ qui converge. Soit u sa limite ; le préliminaire donne $u \in [a, b]$.

De plus, pour tout n , $y_{\varphi(n)+1} = T(y_{\varphi(n)})$. Puisque T est continue en u , on aura $\lim_n y_{\varphi(n)+1} = T(u) = v$

b) Dans le cas où $\lim_n |y_{n+1} - y_n| = 0$, on a $T(u) = v = u$ donc u point fixe de T dans $[a, b]$.

4° Toutes les hypothèses précédentes sont ici réunies : a et b sont deux réels, $a < b$ et supposons ici que T laisse $[a, b]$ stable et qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que T vérifie : $|T(u) - T(v)| \leq k |u - v|$ pour tous u et v de $[a, b]$.

a) La question **2 a)** donne l'unicité du point fixe s'il en existe un. La question **3** donne l'existence d'un point fixe comme limite d'une suite extraite de $(y_n)_n$ dans le cas où on aurait pris $y \in [a, b]$ ce qui est bien sûr loisible.

Ainsi T admet dans $[a, b]$ un point fixe unique noté x^* .

b) Si $y \in [a, b]$, puisque T admet un point fixe, la question **2 b)** donne la convergence de $(y_n)_n$ vers ce nombre, i.e. $(y_n)_n$ converge vers x^* .

Partie B

Dans cette partie on pose $T : [x \mapsto x + x^2]$. À titre de préliminaire, on étudie les variations de T et on la représente graphiquement. On obtient entre autre T continue sur \mathbb{R} , décroissante sur $] - \infty, -1/2]$ et croissante sur $[-1/2, +\infty[$; aussi que 0 est le seul point fixe de T sur \mathbb{R} .

1° Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de réels positifs. On note, pour tout n , $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

a) On pose $a_n \sim b_n$ et $\lim_n B_n = +\infty$. On a une suite $(z_n)_n$ de limite 0 telle que pour tout n , $a_n = (1 + z_n) b_n$. Donc pour tout n , $A_n = B_n + \sum_{k=0}^n z_k b_k$.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un rang N tel que $|z_n| < \varepsilon$ pour $n \geq N$. Prenons alors $n > N$: on a $\frac{\sum_{k=0}^n z_k b_k}{B_n} = \frac{\sum_{k=0}^N z_k b_k}{B_n} + \frac{\sum_{k=N+1}^n z_k b_k}{B_n}$.

Or $\frac{\sum_{k=N+1}^n z_k b_k}{B_n} \leq \frac{\sum_{k=N+1}^n \varepsilon b_k}{B_n} \leq \varepsilon$. De plus $\lim_n B_n = +\infty$ donc $\lim_n \frac{\sum_{k=0}^N z_k b_k}{B_n} = 0$ et il existe donc un rang N' tel que $\left| \frac{\sum_{k=0}^N z_k b_k}{B_n} \right| < \varepsilon$ pour $n \geq N'$.

Ainsi, pour $n \geq \max(N, N')$, on a $\left| \frac{\sum_{k=0}^n z_k b_k}{B_n} \right| < 2\varepsilon$.

On en déduit $\lim_n \frac{\sum_{k=0}^n z_k b_k}{B_n} = 0$ et donc $A_n \sim B_n$.

b) Soit le cas $b_n = \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $a_n \sim \frac{1}{n}$. Puisque $\lim_n B_n = +\infty$ le résultat précédent s'applique. Or $B_n \sim \ln n$, et donc $A_n \sim \ln n$.

2° On prend ici $-1 < y < 0$.

a) Pour tout x , $T(x) \geq x$, donc la suite $(y_n)_n$ est croissante. Par ailleurs, pour $-1 \leq x \leq 0$ on a $f(x) \leq 0$, donc $(y_n)_n$ est majorée par 0. Elle est alors convergente. Sa limite doit être un point fixe de T , c'est donc 0.

$\lim_n y_n = 0$ donc $y_n^2 = o(y_n)$; par ailleurs, pour tout n , $y_{n+1} = y_n + y_n^2$ donc $y_{n+1} \sim y_n$.

b) Soit $a_n = \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_{n+1}}$ pour tout n . On a $a_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+1} y_n} = \frac{y_n}{y_{n+1}}$ donc $a_n \sim 1$.

Avec les notations précédentes, on aura d'après **1** $A_n \sim n$. Or $A_n = \frac{1}{y} - \frac{1}{y_{n+1}}$. Donc $y_n \sim y_{n+1} \sim \frac{-1}{n}$.

3° On prend ici $y > 0$.

a) Pour tout x , $T(x) \geq x$, donc la suite $(y_n)_n$ est croissante. Elle a donc une limite. Cette limite ne peut être réelle puisque le seul point fixe de T est 0. Donc $\lim_n y_n = +\infty$.

b) On a bien sûr, pour tout n ,

$$y_n^2 = y_{n+1} - y_n \leq y_{n+1} \text{ et } (y_n + 1)^2 = y_n^2 + 2y_n + 1 \geq y_{n+1} + 1.$$

Ceci se traduit par $\ln y_{n+1} \geq 2 \ln y_n$ et $\ln(y_{n+1} + 1) \leq 2 \ln(y_n + 1)$ pour tout n . Une récurrence évidente amène alors à $\ln y_n \geq 2^n \ln y$ et $\ln(y_n + 1) \leq 2^n \ln(y + 1)$ pour tout n .

c) $2^{-(n+1)} \ln y_{n+1} - 2^{-n} \ln y_n = 2^{-n-1} (\ln y_{n+1} - 2 \ln y_n) \geq 0$ pour tout n . Donc $(2^{-n} \ln y_n)_n$ est croissante.

De plus $\ln(y_n + 1) \leq 2^n \ln(y + 1)$ donne $2^{-n} \ln y_n = 2^{-n} [\ln(y_n + 1) - \ln(1 + 1/y_n)]$ et $(2^{-n} \ln(1 + 1/y_n))_n$ a pour limite 0 et donc est bornée.

$(2^{-n} \ln y_n)_n$ est alors croissante majorée, elle converge. On notera $\lambda(y)$ sa limite.

d) $(2^{-n} \ln y_n)_n$ est croissante donc $2^{-n} \ln y_n \leq \lambda(y)$ pour tout n .

Par ailleurs, $(2^{-n} [\ln y_n + \frac{2^{-n}}{y_n}])_n$ converge vers $\lambda(y)$ et est décroissante. En effet, pour tout n , $2^{-(n+1)} \left[\ln y_{n+1} + \frac{2^{-n-1}}{y_{n+1}} \right] -$

$$2^{-n} \left[\ln y_n + \frac{2^{-n}}{y_n} \right] = 2^{-n-1} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{y_n} \right) - \frac{2y_n + 1}{y_n^2 + y_n} \right] \leq 2^{-n-1} \frac{-1}{1 + y_n} \leq 0$$

Donc $0 < \lambda(y) - 2^{-n} \ln y_n < \frac{2^{-n}}{y_n}$ pour tout n .