

1 CONIQUE PLANE

CORRIGÉ

\mathcal{C} de \mathcal{P} d'équation $x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0$ dans $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

session Maple : conique inconnue

```
> with(geometry) :
> po := x^2-x*y+y^2+x+y+1 ;
                                po := x^2 - x y + y^2 + x + y + 1
> eq := po = 0 ;
                                eq := x^2 - x y + y^2 + x + y + 1 = 0
> conic(C, eq, [x,y]) : detail(C) ;
                                name of the object : C\
                                form of the object : point2d\
                                coordinates of the point : [-1, -1]
> subs(x = (a - b) / sqrt(2), y = (b + a) / sqrt(2), po) ;
                                1/2 (a - b)^2 - 1/2 (a - b) (b + a) + 1/2 (b + a)^2 + 1/2 sqrt(2) (a - b) + 1/2 sqrt(2) (b + a) + 1
> normal (%) ;
                                1/2 a^2 + 3/2 b^2 + sqrt(2) a + 1
> student[completesquare](%, [a,b]) ;
                                1/2 (a + sqrt(2))^2 + 3/2 b^2
> simplify((x^3 + 3*x*y + y^3 - 1)/po) ;
                                x - 1 + y
```

a) Le test de Descartes (" $AC - B^2$ ") donne ici $3/4$, positif : \mathcal{C} est de "type ellipse".

En posant $\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$ et $\vec{v} = (-\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$ on obtient un repère orthonormal $\mathcal{S} = (O, \vec{u}, \vec{v})$. Ainsi, pour $M(x, y)_{\mathcal{R}}$ et $M(a, b)_{\mathcal{S}}$ on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}b^2 + \sqrt{2}a + 1 = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}(a + \sqrt{2})^2 + \frac{3}{2}b^2 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi \mathcal{C} est réduite à un point : $A(-\sqrt{2}; 0)_{\mathcal{S}}$ i.e. $A(-1, -1)_{\mathcal{R}}$.

b) $x^3 + 3xy + y^3 - 1 = (x^2 - xy + y^2 + x + y + 1)(x + y - 1)$ pour tous x et y . Ainsi l'ensemble \mathcal{D} des points $M(x, y)$ du plan vérifiant $x^3 + 3xy + y^3 = 1$ est la réunion de la droite d'équation $(x + y = 1)$ et du point A .

c) Les couples (p, q) d'entiers solutions de l'équation $p^3 + 3pq + q^3 = 1$ sont donc $(-1, -1)$ et tous les $(n, 1 - n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

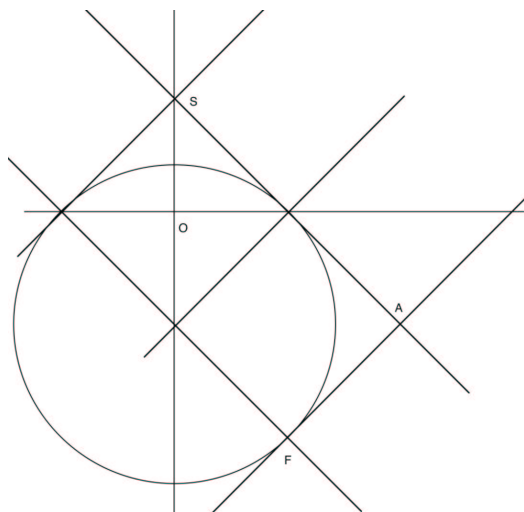
2 CÔNE ET PLAN

CORRIGÉ

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormal de \mathcal{E} . $S(0, 0, 2)$. \mathcal{C} cercle du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) de centre O et de rayon 2.

1° Γ le cône de sommet S et de base \mathcal{C} .

a) La sphère Σ contient \mathcal{C} et est tangente à toutes les demi-droites $[SM)$ pour les points M de \mathcal{C} . Son centre Ω est le point de concours des droites orthogonales aux (SM) en M pour tous les M de \mathcal{C} . Donc $\Omega(0, 0, -2)$ et Σ de rayon $r = 2\sqrt{2}$.



b) Σ a donc pour équation $x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = (2\sqrt{2})^2$.

2° \mathcal{P} le plan passant par $A(0, 4, -2)$ normal au vecteur $\vec{n} = \vec{j} - \vec{k}$.

a) \mathcal{P} a pour équation cartésienne $0.(x - 0) + 1.(y - 4) + (-1).(z + 2) = 0$, i.e. $y - z = 6$.

b) L'intersection de \mathcal{P} et du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) est \mathcal{D} . On a $\mathcal{D} : \begin{cases} y - z = 6 \\ z = 0 \end{cases}$, \mathcal{D} est la droite (B, \vec{i}) où $B(0, 6, 0)$.

c) La distance $d(O, \mathcal{P})$ vaut $|0 - (-2) - 6| / \sqrt{2} = r$ donc le plan \mathcal{P} est tangent à la sphère Σ .

d) Le point F d'intersection de \mathcal{P} et Σ est alors le projeté orthogonal de O sur \mathcal{P} . Soit $F(0, 2, -4)$.

3° Π est l'intersection du cône Γ et du plan \mathcal{P} .

a) Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$. Pour $M(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$ de \mathcal{C} , (SM) coupe \mathcal{P} en N . On a $\overrightarrow{SN} = k.\overrightarrow{SM}$ et $N \in \mathcal{P}$. D'où $k = \frac{4}{\sin \theta + 1}$ puis $N \left(\frac{8 \cos \theta}{\sin \theta + 1}, \frac{8 \sin \theta}{\sin \theta + 1}, \frac{2 \sin \theta - 6}{\sin \theta + 1} \right)$.

b) On a $NF = \sqrt{\left(\frac{8 \cos \theta}{\sin \theta + 1} \right)^2 + \left(\frac{8 \sin \theta}{\sin \theta + 1} - 2 \right)^2 + \left(\frac{2 \sin \theta - 6}{\sin \theta + 1} + 4 \right)^2} = 2\sqrt{2} \frac{\sin \theta + 3}{\sin \theta + 1}$.

De même $d(N, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{i} \wedge \overrightarrow{BN}\|}{\|\vec{i}\|} = 2\sqrt{2} \frac{\sin \theta + 3}{\sin \theta + 1}$. Ces distances sont égales.

c) Les points de Π sont donc tous dans la parabole du plan \mathcal{P} de foyer F et de directrice \mathcal{D} . Son excentricité est bien sûr 1 et son paramètre $d(F, \mathcal{D}) = 4\sqrt{2}$.

4° Passage au plan \mathcal{P} .

a) $\vec{u} = (\vec{j} + \vec{k})/\sqrt{2}$. \vec{u} et \vec{i} sont orthogonaux à \vec{n} . Ils sont unitaires et orthogonaux entre eux. Donc $\mathcal{R} = (A, \vec{i}, \vec{u})$ est un repère orthonormal de \mathcal{P} .

b) Dans ce repère on a $A(0, 0)$, $F(0, -2\sqrt{2})$ et $\mathcal{D} : y = 2\sqrt{2}$.

c) La parabole \mathcal{T} de sommet A et de foyer F a dans \mathcal{R} pour équation : $x^2 = -8\sqrt{2}y$.

d) On a N de coordonnées $\left(8 \frac{\cos \theta}{\sin \theta + 1}, 4\sqrt{2} \frac{\sin \theta - 1}{\sin \theta + 1} \right)$ dans \mathcal{R} .

e) L'identité de Π et \mathcal{T} vient des valeurs prises par les coordonnées des points N de Π : avec $f(\theta) = \frac{\sin \theta - 1}{\sin \theta + 1}$, on a $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ et f de limite $-\infty$ en $\frac{\pi}{2}$ à gauche.

F I N

Aristée a théorisé le cône et ses intersections avec certains plans. Un cône est défini par un sommet, un cercle de base et des demi-droites génératrices. Un plan orthogonal à une génératrice coupe le cône en une courbe appelée "conique"; suivant l'angle α du

cône au sommet, la conique est une "oxytome" (lorsque α est aigu), une "orthotome" (lorsque α est droit) ou une "amblytome" (lorsque α est obtus).

Après Archimède et Euclide, Apolonijs de Perga travaille sur la notion de conique et en donne une caractérisation plus moderne. Il définit un cône par un sommet, un cercle de base et des droites génératrices. Un plan quelconque coupe ce cône en une courbe appelée "conique", et celle-ci est une "hyperbole" si elle a deux nappes, une "ellipse" si elle a une nappe et qu'aucune directrice n'est parallèle au plan, et enfin une "parabole" si une directrice est parallèle au plan.

