

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(10 points)

f est une fonction définie et de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0. Pour n et k des entiers naturels donnés, on cherche la possibilité de trouver une fraction rationnelle u s'écrivant $u = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{R}_n[X]$, $q \in \mathbb{R}_k[X]$, $q(0) = 1$, telle que

$$(e) : \quad f - u = o_0(h)$$

h étant la fonction $[x \mapsto x^{n+k}]$.

On note $p = \sum_{j=0}^n a_j X^j$ qu'on étend à $a_j = 0$ pour $j > n$. De même on note $q = \sum_{i=0}^k b_i X^i$ qu'on étend à $b_i = 0$ pour $i > k$.

On note enfin $f(x) = \sum_{j=0}^{n+k} c_j x^j + o_0(x^{n+k})$ le $DL_{n+k}(0)$ de la fonction f .

1° a) En utilisant le théorème de Taylor-Young, montrer : $(e) \iff \forall i \in \{0, 1, \dots, n+k\} \quad f^{(i)}(0) = u^{(i)}(0)$.

b) Montrer : $(e) \iff f q - p = o_0(h)$.

2° Montrer alors $(e) \iff (s) : \forall j \in \{0, 1, \dots, n+k\} \quad \sum_{i=0}^j b_i c_{j-i} = a_j$

3° On pose ici $f : [x \mapsto \ln(1+x)]$.

a) Rappeler la valeur des coefficients c_j .

b) Ecrire le système (s) pour ces valeurs dans le cas $n = k = 2$.

c) Résoudre ce système et donner explicitement u .

4° On pose ici $f : [x \mapsto e^{-x}]$.

a) Rappeler la valeur des coefficients c_j .

b) Ecrire le système (s) pour ces valeurs dans le cas $n = 3, k = 2$.

c) Résoudre ce système et donner explicitement u .

EXERCICE 2

(10 points)

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ pour } x \neq 0 \quad g(0) = 1$$

1° a) Démontrer que g est dérivable en 0. Préciser $g'(0)$.

b) Etablir que g est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

c) Montrer que g est deux fois dérivable en 0. Préciser $g''(0)$.

2° Démontrer que g est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre (E) .

$$(E) : x y'' + 2 y' + x y = 0$$

3° On note f et k deux fonctions définies sur $]0, \pi[$ vérifiant $f = k \times g$.

a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$ si et seulement si k est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$.

b) Etablir que f est solution sur $]0, \pi[$ de (E) si et seulement si k est solution sur $]0, \pi[$ d'une équation linéaire (e) que l'on précisera.

4° a) Résoudre sur $]0, \pi[$ l'équation différentielle $(\epsilon) : y' \sin x + 2 y \cos x = 0$.

b) En déduire les solutions de (e) sur $]0, \pi[$.

5° a) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, \pi[$.

b) Puis l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

c) Puis l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R} .

6° Question subsidiaire difficile : résoudre sur $]0, \pi/2[$ l'équation $y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x \cos^3 x}$.

F I N
