

## 1 d'Alembert & Gauss

CORRIGÉ

### préliminaire : des complexes pour Bolzano & Weierstrass

Soit  $(z_n)_n$  une suite bornée de nombres complexes.

Pour tout  $n$  on note  $\rho_n = \operatorname{Re}(z_n)$  et  $\iota_n = \operatorname{Im}(z_n)$ .

**a )** La suite  $(z_n)_n$  est bornée, on a donc  $|z_n| < M$  pour tout  $n$ . Alors, pour tout  $n$ ,  $|\rho_n| \leq |z_n| < M$  et  $|\iota_n| \leq |z_n| < M$  : les suites  $(\rho_n)_n$  et  $(\iota_n)_n$  sont des suites bornées de réels.

**b )** Puisque  $(\iota_n)_n$  est une suite bornée de réels, le théorème de Bolzano-Weierstrass réel donne l'existence d'une suite  $(\iota_{\varphi(n)})_n$  extraite de  $(\iota_n)_n$  et convergente (de limite  $\alpha$ ).

**c )** La suite  $(\rho_{\varphi(n)})_n$  extraite de  $(\rho_n)_n$  bornée est aussi bornée et on peut donc en extraire une suite convergente, la suite  $(\rho_{\varphi(\psi(n))})_n$  (soit  $\beta$  sa limite).

**d )** La suite  $(\iota_{\varphi(\psi(n))})_n$  extraite de  $(\iota_{\varphi(n)})_n$  converge vers  $\alpha$ , et  $(\rho_{\varphi(\psi(n))})_n$  converge vers  $\beta$ . D'où la suite de complexes  $(z_{\varphi(\psi(n))})_n$  extraite de  $(z_n)_n$  converge vers  $(\alpha + i\beta)$ .

### pourquoi un minimum est atteint

On prend un polynôme  $A$  dans  $\mathbb{C}[X]$  non constant. Alors  $p = \deg A > 0$  et  $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ . (on a bien sûr  $a_p \neq 0$ ).

**1° a )**  $M = \{|A(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$  est un ensemble de réels, non vide et minoré par 0, donc cet ensemble admet dans  $\mathbb{R}$  une borne inférieure. On la note  $\mu$  désormais.

**b )** Pour tout  $n$ ,  $(\mu + \frac{1}{n})$  n'est pas minorant de  $M$  donc il existe dans  $\mathbb{C}$  au moins un nombre, choisissons  $c_n$ , tel que  $\mu \leq |A(c_n)| < \mu + \frac{1}{n}$ . Ainsi la suite  $(c_n)_n$  de nombres complexes est telle que  $\lim_n |A(c_n)| = \mu$ .

**2° a )** Pour  $z \in \mathbb{C}$  et  $|z| = r$  on a

$$\begin{aligned} |A(z)| &= |a_p z^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k| \\ &\geq |a_p r^p| - |\sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k| \\ &\geq |a_p| r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k \end{aligned}$$

On note alors  $P = |a_p| X^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| X^k$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**b )** Puisque  $a_p > 0$ , on a  $P(x) \equiv_{\infty} |a_p| x^p$  et bien sûr  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ .

Il existe donc un réel  $R > 0$  tel que  $P(x) \geq \mu + 1$  lorsque  $x > R$ . Alors pour  $r > R$ , i.e. pour  $z$  en dehors du disque de centre 0 et de rayon  $R$ ,  $|A(z)| \geq \mu + 1$ .

**3° a )** De  $\lim_n |A(c_n)| = \mu$  on tire qu'à partir d'un certain rang, aucun terme de la suite  $(c_n)_n$  ne peut être à l'extérieur de  $D$ . Donc  $(c_n)_n$  est bornée.

**b )** Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne alors qu'on peut en extraire une suite  $(c_{\psi(n)})_n$  qui converge. On notera  $\zeta$  la limite de cette suite.

c) Les théorèmes sur les opérations sur les suites convergentes donnent, pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $a_k \in \mathbb{C}$  quelconques, la convergence de  $(a_k c_{\psi(n)}^k)_n$  vers  $a_k \zeta^k$ .  $A$  est un polynôme donc  $(A(c_{\psi(n)}))_n$  converge et  $\lim_n A(c_{\psi(n)}) = A(\zeta)$ .

d) On déduit  $\lim_n |A(c_{\psi(n)})| = |A(\zeta)|$  donc  $\mu = |A(\zeta)|$ . Ainsi  $\mu \in M$

### pourquoi ce minimum est nul

On suppose ici  $\mu > 0$  et on pose  $B = \frac{1}{A(\zeta)} A(X + \zeta)$ .

1° a) Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on a  $|A(z + \zeta)| \geq \mu$ ; or  $|A(\zeta)| = \mu$ , et donc  $|B(z)| \geq 1$ .

b) On a bien sûr  $d^\circ(B) = d^\circ(A) = p$  et  $B(0) = 1$ .

On note  $q$  la valuation de  $B - 1$  et on considère  $B = 1 - \rho e^{-i\theta} X^q + \sum_{k=q+1}^p b_k X^k$  où  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$  et  $\rho > 0$ .

2° a) Soit  $r > 0$ ,  $|B(r e^{i\theta/q})| = |1 - \rho r^q + \sum_{k=q+1}^p b_k r^k e^{ik\theta/q}|$ .  
 $\leq |1 - \rho r^q| + \sum_{k=q+1}^p |b_k| r^k$

b) Dans le cas  $r \leq \sqrt[q]{1/\rho}$  on a  $|1 - \rho r^q| = 1 - \rho r^q$  et donc d'après l'inégalité précédente,

$$|B(r e^{i\theta/q})| - 1 \leq -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^p |b_k| r^k$$

c) La fonction  $\left[ r \mapsto -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^p |b_k| r^k \right]$  prend la valeur 0 en 0 et est équivalent à  $-\rho r^q$  au voisinage de 0 ; elle prend donc une valeur négative en un nombre  $r_0 > 0$ . Alors  $|B(r_0)| < 1$ .

3° Ce dernier résultat est en contradiction avec les premières remarques sur  $B$ . Cette construction a reposé uniquement sur l'hypothèse  $\mu > 0$ . On a donc  $\mu = 0$  i.e.  $A(\zeta) = 0$  : le polynôme  $A$  admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ . D'où le théorème de D'Alembert-Gauss.

## 2 produit anticommutatif

CORRIGÉ

Pour  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{R}[X]$ , on note  $[P, Q] = P'Q - PQ'$ .

1° a) Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

On a  $P = aX^2 + S$  et  $Q = dX^2 + T$  avec  $S$  et  $T$  des polynômes de degrés au plus 1.

Alors  $[P, Q] = 2aXT + S'Q - 2dXS - T'P$ . Ayant  $T'$  et  $S'$  constants, on a bien sûr  $[P, Q]$  de degré au plus 2, donc dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

La loi  $[(P, Q) \mapsto [P, Q]]$  est donc une l.c.i. de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

b) Quelques propriétés :

$\alpha$ ) cette loi n'est commutative :  $[X, 1] = 1$  et  $[1, X] = -1$  ; elle est en fait dite anticommutative puisque  $[P, Q] = -[Q, P]$  pour tous  $P$  et  $Q$ .

$\beta$ ) cette loi n'est pas associative :

$[[X, X], 1] = [0, 1] = 0$  et  $[X, [X, 1]] = [X, 1] = 1$ .

$\gamma$ )  $\mathbb{R}_2[X]$  ne possède pas d'élément neutre pour cette loi : un tel élément  $N$  vérifierait  $[N, P] = [P, N] = P$  pour tout  $P$ , ce qui est rendu impossible par l'anticommutativité.

2° On fixe ici  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ ,  $P \neq 0$ .

**a )** Soit  $\psi : [Q \mapsto [P, Q]]$ . Pour  $Q_1$  et  $Q_2$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on vérifie simplement  $\psi(Q_1 + Q_2) = \psi(Q_1) + \psi(Q_2)$  et  $\psi(\lambda.Q_1) = \lambda.\psi(Q_1)$ . Ainsi  $\psi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

La double linéarité (on dit bi-linéarité) de  $[(P, Q) \mapsto [P, Q]]$  sera utilisée en connaissant, pour  $(i, j)$  quelconque,  $[X^i, X^j] = (i - j) X^{i+j-1}$ .

**b )** On a bien sûr  $0 \in \text{Ker } \psi$ . Pour  $Q \neq 0$ ,  $Q \in \text{Ker } \psi$  signifie  $P'Q - PQ' = 0$ . On pose  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ . Alors  $[P, Q] = 0 \iff F' = 0$ , donc  $[P, Q] = 0 \iff F$  constante. On en déduit  $\text{Ker } \psi = \text{Vect}(P)$ .

**3° a )** Pour  $(P, Q)$  quelconque, on a  $[P, Q]' = P''Q - PQ''$ . Si  $P(a) = 0$  et  $Q(a) = 0$ , on a  $[P, Q](a) = 0$  et  $[P, Q]'(a) = 0$ . Ainsi si deux polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$  ont une racine commune, cette racine est racine au moins double de  $[P, Q]$ .

**b )** Soient  $P = (X - x_1)(X - x_2)$  et  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } [P, 1] &= P' &= 2X - (x_1 + x_2) \\ [P, X] &= P'X - P &= X^2 - x_1x_2 \\ [P, X^2] &= P'X^2 - 2XP &= (x_1 + x_2)X^2 - 2x_1x_2X \end{aligned}$$

Par linéarité, on déduit  $[P, Q] \in \mathbb{R}_2[X]$ . Ainsi  $[P, Q] = aX^2 + bX + c$ ; notons  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Lorsque  $Q$  a pour racine  $x_i$  ( $i$  est 1 ou 2), on a  $x_i$  racine commune de  $P$  et  $Q$  donc au moins double de  $[P, Q]$ . Comme  $d^\circ([P, Q]) = 2$  dans ce cas, on a  $\Delta = 0$ . On conjecture ainsi que  $\Delta$  peut simplement se factoriser en  $\delta Q(x_1)Q(x_2)$ . De plus  $\delta = 4$  dans le cas  $Q = 1$ .

$\Delta = 4Q(x_1)Q(x_2)$  se montre alors par le calcul dans le cas général de  $Q$ .

**4°** Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes non nuls de  $\mathbb{R}_2[X]$ . On suppose que  $P$  a deux racines  $\alpha$  et  $\alpha'$ , que  $Q$  a deux racines  $\beta$  et  $\beta'$  et enfin que  $\alpha < \alpha' < \beta < \beta'$ .

$\alpha$  et  $\alpha'$  sont en dehors des racines de  $Q$  donc  $Q(\alpha)$  et  $Q(\alpha')$  ont même signe. Alors  $\Delta > 0$  et donc  $[P, Q]$  a deux racines distinctes :  $\gamma$  et  $\gamma'$  (dans cet ordre).

On rappelle que pour  $F = \frac{P}{Q}$ , on a  $F' = \frac{[P, Q]}{Q^2}$ . Les fonctions réelles associées sont telles que  $F$  est définie et  $C^\infty$  sur  $[\alpha, \alpha']$  et nulle aux bornes. Le théorème de Rolle donne que  $F'$  s'annule dans  $] \alpha, \alpha' [$ . Donc  $\alpha < \gamma < \alpha'$ .

En faisant de même avec  $G = \frac{Q}{P}$ , on obtient  $\beta < \gamma' < \beta'$ .

---

F I N

---