

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

QUESTIONS DE COURS

(3 points)

1° \mathcal{R} est une relation binaire sur E . Caractériser la propriété " \mathcal{R} est symétrique".

2° f est une application de E dans F et g une application de F dans G . Établir, pour C partie quelconque de G , $(g \circ f)^{-1}\langle C \rangle = f^{-1}\langle g^{-1}\langle C \rangle \rangle$.

EXERCICE 2

de la différence à l'égalité

(2 points)

Soient A , B et C des parties d'un ensemble E telles que $A \Delta B = A \Delta C$.

Peut-on en déduire $B = C$?

EXERCICE 3

un système, ça se discute

(3 points)

Soit E un ensemble, A et B deux de ses parties.

Discuter suivant A et B l'ensemble des solutions du système d'inconnue X , partie de E ,
$$\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = B \end{cases}$$

EXERCICE 4**surjectivité par parties**

(2 points)

Soient E et F deux ensembles et f désigne une application de E dans F .

Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall Y \subset F \quad f(f^{-1}(Y)) = Y$

EXERCICE 5**variation pour des images**

(4 points)

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \end{cases}$$

1° Établir rapidement le tableau des variations de f .

2° f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

3° Donner $f(]-\infty, 3])$ puis $f^{-1}(]-\infty, 0])$.

EXERCICE 6**en fonction des parties**

(3 points)

$$\text{Soient } A \text{ et } B \text{ deux parties d'un ensemble } E. \text{ On définit } f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

1° Montrer que la condition " $A \cup B = E$ " est suffisante pour que f soit injective.

2° Montrer que la condition " $A \cap B = \emptyset$ " est nécessaire pour que f soit surjective.

EXERCICE 7**équivalences à deux**

(3 points)

Soit E un ensemble non vide et \mathcal{A} un ensemble de parties de E . On définit la relation binaire \mathfrak{R} sur E par :

$$x \mathfrak{R} y \iff (\forall A \in \mathcal{A}, \{x, y\} \subset A \text{ ou } \{x, y\} \subset \overline{A})$$

(pour $X \subset E$, \overline{X} est le complémentaire de X)

1° Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.

2° Pour x choisi dans E , donner l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x (i.e. $\{y \in E / x \mathfrak{R} y\}$).

F I N