

1 CONSIDÉRATIONS LOGIQUES

CORRIGÉ

1° La négation de : « Pour tout entier naturel n , le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$ est un entier premier » est « Il existe un entier naturel n au moins tel que le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$ ne soit pas un entier premier ».

2° La contraposée de « Pour une fonction f de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} , si l'intégrale de f sur $[0; 1]$ vaut $\frac{1}{2}$ alors f n'est pas continue ou il existe un réel c de $]0; 1[$ tel que $f(c) = c$ » est « Pour une fonction f de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} , si f est continue et pour tout c de $]0; 1[$ on a $f(c) \neq c$ alors l'intégrale de f sur $[0; 1]$ ne vaut pas $\frac{1}{2}$ ».

2 CONSIDÉRATIONS FONCTIONNELLES

CORRIGÉ

1° Soit f la fonction $\left[x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \right]$.

a) f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x , $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$.

Ainsi f est strictement croissante sur $] -\infty; -1]$ et prend (théorème des valeurs intermédiaires) toutes les valeurs de $] -\infty; 7]$. f s'annule une et une seule fois sur cet intervalle.

De même f est strictement décroissante sur $[-1; 3]$ et prend (théorème des valeurs intermédiaires) toutes les valeurs de $[-25; 7]$. f s'annule une et une seule fois sur cet intervalle.

Enfin f est strictement croissante sur $[3; +\infty[$ et prend (théorème des valeurs intermédiaires) toutes les valeurs de $[-25; +\infty[$. f s'annule une et une seule fois sur cet intervalle.

L'équation $f(x) = 0$ a donc trois solutions sur \mathbb{R} .

b) La fonction f n'est pas bijective puisque le réel 0 admet trois antécédents par f .

2° On pose $\theta = 2 \arccos \frac{1}{3}$. On a alors $\cos \theta = \frac{-7}{9}$, $\sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ et $\tan \theta = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$. De plus, puisque $\frac{1}{3}$ est entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on a $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$.

a) $\arccos \frac{7}{9}$ admet $\frac{7}{9}$ pour cosinus, ce n'est donc pas θ . (en fait c'est $\pi - \theta$)

b) $\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}$ appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, ce n'est donc pas θ . (en fait c'est $\pi - \theta$)

c) $\arctan \frac{-4\sqrt{2}}{7}$ appartient à $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, ce n'est donc pas θ . (en fait c'est $\theta - \pi$)

3° La fonction $f = \frac{1}{\sin} : \left[x \mapsto \frac{1}{\sin x} \right]$ est définie et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$. Elle y est strictement croissante puisque \sin est strictement décroissante et positive sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$. f vaut 1 en $\frac{\pi}{2}$ et a pour limite $+\infty$ en π . Le théorème des valeurs intermédiaires donne que l'ensemble des valeurs prises par la fonction f est $[1; +\infty[$. Ainsi f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$ sur $[1; +\infty[$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ y = \frac{1}{\sin x} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} y \geq 1 \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ \sin x = \frac{1}{y} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} y \geq 1 \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \right.$$

On a ainsi $f^{-1} : \left[y \mapsto \pi - \arcsin \frac{1}{y} \right]$.

1° Soit S l'ensemble de toutes les solutions des équations $(e_\lambda) : z^2 - 2\lambda z + 1 = 0$ lorsque λ prend toutes les valeurs dans \mathbb{R} .

a) première méthode.

0 n'est solution d'aucune (e_λ) . Donc $(e_\lambda) \iff \frac{z^2 + 1}{z} = 2\lambda$. D'où S est l'ensemble des z tels que $\frac{z^2 + 1}{z}$ est réel.

$$\begin{aligned} \frac{z^2 + 1}{z} \text{ réel} &\iff \frac{z^2 + 1}{z} = \overline{\left(\frac{z^2 + 1}{z}\right)} \\ &\iff z^2 \bar{z} + \bar{z} = z \bar{z}^2 + z \\ &\iff (|z|^2 - 1)(z - \bar{z}) = 0 \\ &\iff |z| = 1 \quad \text{ou} \quad z = \bar{z} \end{aligned}$$

S est donc la réunion des réels purs non nuls et des complexes de module 1 : $S = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \mathcal{U}$.

b) deuxième méthode.

$(e_\lambda) \iff (z - \lambda)^2 = \lambda^2 - 1$. S est donc constitué des complexes $(\lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2})$ et $(\lambda - i\sqrt{1 - \lambda^2})$ pour tous les λ de $] -1; 1[$, des complexes λ pour tous les λ de $\{-1; 1\}$ et des complexes $\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$ et $\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$ pour tous les λ de $] -\infty; -1[$ et de $]1; +\infty[$.

On retrouve $S = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \mathcal{U}$, un peu moins simplement car si on récupère bien \mathcal{U} avec $x^2 + y^2 = 1$, il faut étudier analytiquement $\left[t \mapsto t + \sqrt{t^2 - 1}\right]$ et $\left[t \mapsto t - \sqrt{t^2 - 1}\right]$ pour trouver les réels qui manquent (i.e. différents de 0, -1 et 1).

2° n désigne un entier naturel non nul et θ un réel irrationnel ; on pose l'équation (e_n) d'inconnue z dans \mathbb{C} :

$$\left(\frac{1}{\tan \pi \theta} + i\right)(z - i)^n - \left(\frac{1}{\tan \pi \theta} - i\right)(z + i)^n = 0$$

On remarque d'abord que $-i$ n'est pas solution puis $\left(\frac{1}{\tan \pi \theta} + i\right) = \frac{e^{i\pi\theta}}{\sin \pi \theta}$ et $\left(\frac{1}{\tan \pi \theta} - i\right) = \frac{e^{-i\pi\theta}}{\sin \pi \theta}$. Ainsi

$$\begin{aligned} (e_n) &\iff \left(\frac{z - i}{z + i}\right)^n = \frac{e^{-i\pi\theta}}{e^{i\pi\theta}} \\ &\iff \left(\frac{z - i}{z + i}\right) = e^{i\frac{2\pi}{n}(k - \theta)}, \quad 0 \leq k < n \\ &\iff z = i \frac{1 + e^{i\frac{2\pi}{n}(k - \theta)}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}(k - \theta)}}, \quad 0 \leq k < n \\ &\iff z = i \frac{2 \cos \frac{\pi}{n}(k - \theta)}{-2i \sin \frac{\pi}{n}(k - \theta)}, \quad 0 \leq k < n \end{aligned}$$

Les solutions de (e_n) sont donc les $\frac{-1}{\tan \frac{\pi}{n}(k - \theta)}$ pour tous les k entiers de 0 à $(n - 1)$.

3° $\alpha\beta \neq 1$ et $\gamma = \frac{\bar{\alpha} - \beta}{1 - \alpha\beta}$. γ de module 1 si et seulement si α ou β de module 1 puisque :

$$\begin{aligned} |\gamma| = 1 &\iff \gamma \cdot \bar{\gamma} = 1 \\ &\iff \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - (\alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta})}{1 - (\alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}) + |\alpha|^2|\beta|^2} = 1 \\ &\iff (1 - |\alpha|^2)(1 - |\beta|^2) = 0 \end{aligned}$$