

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**polynômes de matrices**

(7 points)

Pour une matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ on définit l'application de $\Phi_M : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto & P(M) \end{cases}$.

Pour une matrice M d'ordre 4, on s'intéresse à l'équation $(e_M) : \Phi_M(P) = 0$. S'il existe des solutions non nulles, on appellera solution minimale P_0 le polynôme unitaire, de degré le plus petit possible, solution de l'équation.

1° Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Vérifier $AB = BA$.
- Calculer A^n et B^n pour un entier naturel n quelconque.
- Calculer $\Phi_A(1 + X^2)$ et $\Phi_B(1 + X^2)$.
- Montrer que $(X - 2)(X - 3)$ est la solution minimale de (e_A) .

2° On pose $S = A + B$.

- Donner l'expression de S^n pour tout entier naturel n .
- En déduire $\Phi_S(P)$ pour un polynôme P quelconque. (on exprimera les coefficients de la matrice $\Phi_S(P)$ à l'aide des valeurs prises par P et ses polynômes dérivés en deux réels a et b que l'on précisera)
- Montrer que $\Phi_S(P)$ est nul si et seulement si $(X - 3)(X - 2)^3$ divise P .
- En déduire la solution minimale de (e_S) .

EXERCICE 2**traces**

(5 points)

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace des matrices carrées d'ordre n , la trace d'une matrice M , notée $\text{tr}(M)$ est la somme de ses termes diagonaux.

1° a) Montrer que l'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer, pour A et B quelconques : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

2° a) u est un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} . M étant la matrice de u dans une base, montrer que $\text{tr}(M)$ ne dépend pas de la base choisie (ce nombre sera appelé $\text{tr}(u)$: trace de u).

b) Montrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

EXERCICE 3

matrices magiques

(8 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note U_n la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Pour $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, on pose :

$$\forall i \lambda_i(M) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}, \quad \forall j \gamma_j(M) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}, \quad \delta(M) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}, \quad d(M) = \sum_{k=1}^n a_{k,n+1-k}$$

Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est dite matrice magique d'ordre n si et seulement si ces $2n + 2$ nombres sont égaux. Cette valeur commune est alors appelée somme magique de M et notée $\varphi(M)$. On note Ξ l'ensemble de ces matrices et Ξ_0 le sous-ensemble de Ξ des matrices de somme magique nulle.

quelques généralités

1° a) Montrer que Ξ est un \mathbb{R} -ev.

b) Vérifier que ${}^t M$ est magique si M est magique.

2° a) Montrer que $\varphi : \begin{cases} \Xi & \rightarrow \mathbb{R} \\ M & \mapsto \varphi(M) \end{cases}$ est une forme linéaire sur Ξ .

b) Dédurre que Ξ_0 est un sous-espace vectoriel de Ξ .

3° Prouver que Ξ_0 et $\text{Vect}(U_n)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de Ξ .

aventures à l'ordre 3

1° Pour $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$, $M \in \Xi$, établir $\varphi(M) = 3.a_{22}$.

2° Donner une matrice magique d'ordre 3, $M = (a_{ij})$, telle que $a_{11} = 67$, $a_{13} = 43$ et $a_{32} = 73$.

3° Donner la dimension, puis une base de Ξ_0 .

4° Donner la dimension de Ξ puis une base. Décomposer alors $L = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ dans cette base¹.

F I N

¹un carré magique d'ordre n est une matrice magique d'ordre n dont les n^2 coefficients sont les n^2 entiers de $[1, n^2]$. Le plus ancien connu est le "lo-shu", la matrice L , qui apparaît dans un livre attribué à Confucius (6ème siècle av. JC.) et dont la légende veut qu'il ait été vu sur le dos d'une tortue 2000 ans plus tôt. Le carré magique D apparaît dans un tableau de A. Dürer (Mélancolie) dont il fait apparaître le millésime : 1514. Ce carré possède en outre de nombreuses autres particularités.

$$D = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$