

1 QUI COMMUTE AVEC U ?

CORRIGÉ

On fixe une matrice $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}(U)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec U i.e. les M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $MU = UM$.

1° Prenons M et N dans $\mathcal{C}(U)$ et λ dans \mathbb{R} . On a

- $(M + N)U = MU + NU = UM + UN = U(M + N)$
- $(MN)U = M(NU) = M(UN) = (MU)N = (UM)N = U(MN)$
- $U(\lambda.M) = \lambda.(UM) = \lambda.(MU) = (\lambda.M)U$

et donc $(M + N)$, (MN) et $\lambda.M$ sont dans $\mathcal{C}(U)$. L'ensemble contient U , il est non vide. C'est donc une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi $(\mathcal{C}(U), +, \times, .)$ est une \mathbb{R} -algèbre.

2° On suppose ici $U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ c'est à dire $U = a.I_2$. Pour M quelconque on a $MU = M(a.I_2) = a.(MI_2) = a.M$ et $UM = (a.I_2 M) = a.(I_2 M) = a.M$, et donc $M \in \mathcal{C}(U)$. Ainsi $\mathcal{C}(U) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3° a) On suppose ici $a = d$ et $(b, c) \neq (0, 0)$. Soit $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. Alors $MU = UM$ si et seulement si $\begin{cases} x &= t \\ yc &= zb \end{cases}$. Les éléments de $\mathcal{C}(U)$ sont donc les $\begin{pmatrix} \alpha & c\beta \\ b\beta & \alpha \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi $\mathcal{C}(U) = \text{Vect} \left(\left\{ I_2, \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$.

b) On suppose ici $U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $a \neq d$. Soit $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. Alors $MU = UM$ si et seulement si $y = z = 0$. Les éléments de $\mathcal{C}(U)$ sont donc les $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi $\mathcal{C}(U) = \text{Vect} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$.

c) On suppose $a \neq d$ et $(b, c) \neq (0, 0)$. Soit $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. Alors $MU = UM$ si et seulement si $cy = bz$ et $\begin{cases} (a-d)y &= b(x-t) \\ (a-d)z &= c(x-t) \end{cases}$. Les éléments de $\mathcal{C}(U)$ sont donc les $\begin{pmatrix} \alpha + a\beta & c\beta \\ b\beta & \alpha + d\beta \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Ainsi $\mathcal{C}(U) = \text{Vect}(\{I_2, U\})$.

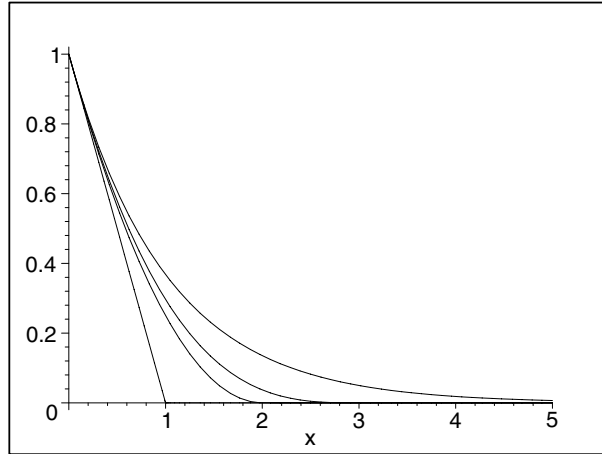
2 CONVERGENCES, CONVERGENCE ...

CORRIGÉ

Pour un entier naturel non nul n , on définit g_n sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} g_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \leq n \\ g_n(x) = 0 & \text{si } x > n \end{cases}$.

Partie A

1° Les fonctions g_1 , g_2 , et g_3 sont représentées avec la fonction $g : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x} \end{cases}$.



2° Pour tout n , g_n est bien sûr, grâce au théorème de coïncidence, C^∞ sur $[0, n[$ et $]n, +\infty[$.

Soit $n \geq 2$. Le théorème du prolongement de dérivabilité donne g_n dérivable en n à droite de nombre dérivé 0, et à gauche de nombre dérivé $-\frac{n}{n}(1 - \frac{n}{n})^{n-1} = 0$. Ainsi g_n est dérivable en n .

D'où g_n dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\begin{cases} g'_n(x) = -(1 - \frac{x}{n})^{n-1} & \text{si } x < n \\ g_n(x) = 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$.

Partie B

1° On définit φ_x sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} \varphi_x(t) = (1 - \frac{x}{t})^t & \text{si } t > x \\ \varphi_x(t) = 0 & \text{si } t \leq x \end{cases}$, puis on pose $\psi_x = \ln \circ \varphi_x$. φ_x et ψ_x sont bien sûr de classe C^∞ sur $]x, +\infty[$.

a) Pour $t > x$, $\psi_x(t) = t \ln(1 - \frac{x}{t})$ donc $\psi'_x(t) = \ln(1 - \frac{x}{t}) + \frac{x}{t-x}$.

b) Alors pour $t > x$, $\psi''_x(t) = \frac{-x^2}{t(t-x)^2}$. ψ''_x est négative sur $]x, +\infty[$ donc ψ'_x est décroissante strictement sur $]x, +\infty[$.

c) Ayant de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi'_x(x) = 0$ on déduit ψ'_x positive sur $]x, +\infty[$, donc ψ_x strictement croissante sur $]x, +\infty[$.

La fonction φ_x est donc strictement croissante sur $]x, +\infty[$. Elle est à valeurs positives sur cet intervalle et elle est nulle sur $[0, x]$. Elle est donc croissante sur $[0, +\infty[$.

2° a) Pour tout n , $g_n(x) = \varphi_x(n)$. La suite $(\varphi_x(n))_n$ est croissante donc la suite $(g_n(x))_n$ est croissante.

b) La fonction φ_x est bornée (majorée par 1), donc la suite $(g_n(x))_n$ est majorée. Elle est donc convergente. Sa limite est e^{-x} .

Partie C

1° On pose $f_n = g - g_n$ pour tout n . Pour tout $x \geq 0$, $g(x) = \lim_n g_n(x)$ et $(g_n(x))_n$ est croissante. Donc f_n est à valeurs positives ou nulles.

2° a) g , comme g_n pour $n > 1$, sont dérivables sur $[0, +\infty[$ donc f_n est dérivable.

Pour $0 \leq x < n$, $f'_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} - e^{-x}$ et bien sûr $f'_n(x) = -e^{-x}$ pour $x \geq n$.

b) Pour $0 \leq x < n$, $f'_n(x) > 0 \iff \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} > e^{-x}$ donc $f'_n(x) > 0 \iff (n-1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x > 0$.

3° Soit, sur $[0, n[$, $h_n : \left[x \mapsto (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n} \right) + x \right]$. h_n est dérivable sur $[0, n[$, et pour $x \in [0, n[$, $h'_n(x) = \frac{1-x}{n-x}$. Ainsi h_n est strictement croissante sur $[0, 1]$ (et $h_n(0) = 0$), strictement décroissante sur $[1, n[$. Puisque $h_n(1) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow n} h_n(x) = -\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence x_n dans $[1, n[$ tel que $h_n(x_n) = 0$. Ce nombre est unique dans $]0, n[$ vues les variations de h_n .

4° a) On a donc h_n positive dans $]0, x_n[$, donc f_n strictement croissante sur $[0, x_n]$; de même h_n négative dans $]x_n, n[$, donc f_n strictement décroissante sur $[x_n, n[$. f_n coïncide par ailleurs avec g sur $[n, +\infty[$ et décroît donc sur cet intervalle.

x	0	x_n	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0
f_n	0	y_n	0

b) Il découle immédiatement de l'étude précédente que f_n admet un maximum absolu en x_n ; il sera noté y_n .

c) La valeur y_n n'est prise qu'en x_n .

5° a) Pour $0 \leq x < n$ fixé, $h_n(x) = n \ln \left(1 - \frac{x}{n} \right) + x - \ln \left(1 - \frac{x}{n} \right)$.

On a $\lim_n \frac{x}{n} = 0$, donc $h_n(x) = n \left(-\frac{x}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + x - \left(-\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$. Ainsi $h_n(x) = \frac{x \cdot (2-x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Pour tout n , $h_n(x_n) = 0$. On déduit $\frac{x_n \cdot (2-x_n)}{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $x_n \cdot (2-x_n) = o(1)$. Puisque par ailleurs $x_n > 1$ pour tout n , on a $\lim_n x_n = 2$.

6° On note $\alpha_n = x_n - 2$ pour tout n .

a) $h_n(x_n) = 0$ i.e. $n \ln \left(1 - \frac{x_n}{n} \right) + x_n - \ln \left(1 - \frac{x_n}{n} \right) = 0$, et $x_n = 2 + o(1)$. Alors

$$\begin{aligned} n \left(-\frac{x_n}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2} - \frac{x_n^3}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) + x_n - \left(-\frac{x_n}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) &= 0 \\ x_n(2-x_n) + \frac{1}{n} x_n^2 \left(\frac{1}{2n} - \frac{x_n}{3n} \right) &= o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \alpha_n = (2+o(1))^2 \left(\frac{1}{2n} - \frac{2+o(1)}{3n} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

d'où $\alpha_n \sim \frac{-2}{3n}$, puis $x_n = 2 - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Pour tout n , $y_n = f_n(x_n)$ et $x_n < n$. Donc

$$\begin{aligned} y_n &= e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n} \right)^n = \exp \left(-2 + \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{2 - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \right) \right) \\ &= \exp \left(-2 + \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \exp \left(n \left(-\frac{2}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{2}{n^2} \right) \right) \\ &= \exp \left(-2 + \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \exp \left(-2 + \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{2}{n} \right) \\ &= \frac{1}{e^2} \left[1 + \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{3}{2n} + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

d'où $y_n \sim \frac{2}{n \cdot e^2}$. Puisque $\lim_n y_n = 0$, la convergence de $(g_n)_n$ vers g est uniforme.