

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

logique ?

EXERCICE 1

(3 points)

On donne quelques assertions. Indiquez pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse. (la réponse est justifiée, bien sûr).

1° f et g fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : $[\forall x, f(x)g(x) = 0] \implies [\forall x, f(x) = 0] \text{ ou } [\forall x, g(x) = 0]$.

2° x et y entiers naturels : $(xy \text{ est pair}) \iff (x \text{ est pair ou } y \text{ est pair})$.

3° $\forall x \in]0, +\infty[\quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} < x$.

ensembles

EXERCICE 2

(2 points)

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E telles que $A \triangle B = A \triangle C$.

Peut-on en déduire $B = C$?

EXERCICE 3

(3 points)

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E .

Montrer $(A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}) \iff (A \cap B = A \cap C)$.

(\overline{X} désigne le complémentaire de X dans E)

EXERCICE 4

(2 points)

Soient A, B et C parties de E telles que
$$\begin{cases} A \cup B &= A \cap C \\ B \cup C &= B \cap A \\ C \cup A &= C \cap B \end{cases}$$

Montrer $A = B = C$.

EXERCICE 5

(3 points)

E est un ensemble et A et B des parties de E .

a) A-t-on $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$?

b) Montrer $(A \times B) \cup (B \times A) \subset (A \cup B)^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour qu'il y ait égalité.

fonctions

EXERCICE 6

(2 points)

On rappelle que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel i.e. aucun quotient de deux entiers n'est égal à $\sqrt{2}$.

Montrer que $\delta : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto a + b\sqrt{2} \end{cases}$ est injective.

EXERCICE 7

(3 points)

Soit la fonction $f : \left[x \mapsto \int_0^1 \max(x, t) dt \right]$.

a) Représenter graphiquement f .

b) Donner $f([- 1, 1])$ et $f^{-1}([- 2, 2])$.

EXERCICE 8

(2 points)

ψ est une suite d'entiers naturels strictement croissante. (on entend par là que $\psi(p+1) > \psi(p)$ pour tout p)

Établir : $\psi(n) \geq n$ pour tout n .

F I N
