

1

CORRIGÉ

Soit l'équation $(e) : x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0$ où a et b sont des coefficients réels. (on appelle solution de (e) dans \mathbb{C} tout élément α de \mathbb{C} tel que $f(\alpha) = 0$ où $f : [x \mapsto x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1]$).

1° a) Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$ puisque les coefficients a et b sont réels. Ainsi, si x_0 est solution de (e) , alors \bar{x}_0 est solution aussi.

Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4} f(x)$. Il est clair que 0 n'est pas solution de (e) , donc lorsque x_0 est solution de (e) , $\frac{1}{x_0}$ aussi.

b) Supposons x_0 non réel solution de (e) . Alors \bar{x}_0 est solution distincte de x_0 . De plus

- cas $|x_0| \neq 1$: on a donc $\frac{1}{x_0}$ solution distincte de x_0 et de \bar{x}_0 . De même, $\frac{1}{\bar{x}_0}$ est aussi une solution, distincte de x_0 , \bar{x}_0 et $\frac{1}{x_0}$.

L'ensemble des solutions de (e) est alors $\left\{x_0, \frac{1}{x_0}, \bar{x}_0, \frac{1}{\bar{x}_0}\right\}$.

- cas $x_0 = 1$: x_0 s'écrit $e^{i\phi}$ et $\frac{1}{x_0} = e^{-i\phi}$ est aussi solution. $f(x)$ est alors factorisable par $(x - e^{i\phi})$ et par $(x - e^{-i\phi})$, donc par $(x^2 - 2\cos\phi x + 1)$. De manière évidente on a $f(x) = (x^2 - 2\cos\phi x + 1)(x^2 + \alpha x + 1)$ puis $\alpha = 2a - 2\cos\theta$. Qui termine la résolution.

2° a) (e) admet pour solution le nombre $\rho e^{i\theta}$ où ρ et θ sont deux réels tels que $0 < \rho < 1$ et $0 < \theta < \pi$. $\rho e^{i\theta}$ est non réel donc $\rho e^{-i\theta}$ est solution de (e) .

$$\text{Ainsi } \begin{cases} \rho^4 e^{i4\theta} + 2a(\rho^3 e^{i3\theta} + \rho e^{i\theta}) + b\rho^2 e^{i2\theta} + 1 = 0 \\ \rho^4 e^{-i4\theta} + 2a(\rho^3 e^{-i3\theta} + \rho e^{-i\theta}) + b\rho^2 e^{-i2\theta} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \rho^4 e^{i2\theta} + 2a(\rho^3 e^{i\theta} + \rho e^{-i\theta}) + b\rho^2 + e^{-i2\theta} = 0 \\ \rho^4 e^{-i2\theta} + 2a(\rho^3 e^{-i\theta} + \rho e^{i\theta}) + b\rho^2 + e^{i2\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\text{et donc } \begin{cases} a = \frac{(1-\rho^4)\sin 2\theta}{2(\rho^3-\rho)\sin\theta} = -\frac{1+\rho^2}{\rho}\cos\theta \\ b = \frac{(\rho-\rho^7)\sin\theta + (\rho^3-\rho^5)\sin 3\theta}{\rho\sin\theta - \rho^3\sin\theta} = \frac{1}{\rho^2} + 4\cos^2\theta + \rho^2 \end{cases}$$

b) D'après ce qui précède, (e) admet donc aussi, puisque $\rho e^{i\theta}$ est non réel de module différent de 1, les nombres $\rho e^{-i\theta}$, $\frac{1}{\rho} e^{i\theta}$ et $\frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$. L'ensemble des solutions de (e) est donc $\mathcal{S} = \left\{\rho e^{i\theta}, \rho e^{-i\theta}, \frac{1}{\rho} e^{i\theta}, \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}\right\}$.

c) $f(x)$ se factorise donc dans \mathbb{C} par $f(x) = (x - \rho e^{i\theta})(x - \rho e^{-i\theta})\left(x - \frac{1}{\rho} e^{i\theta}\right)\left(x - \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}\right)$ et donc dans \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 2\rho\cos\theta x + \rho^2)\left(x^2 - \frac{2\cos\theta}{\rho}x + \frac{1}{\rho^2}\right)$

préliminaire

On rappelle que la constante γ d'Euler est définie comme $\lim_n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma$.

1° Soit $G_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$. De $\lim_n (2G_n - \ln n) = \gamma$, on tire $\lim_n 2 \frac{G_n}{\ln n} - 1 = 0$. Donc $G_n \sim \frac{\ln n}{2}$.

$$(x_n)_n \text{ définie par } x_0 > 0 \text{ et } \forall n, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$

1° x_0 est fixé, étude du comportement limite de x_n .

a) Une récurrence évidente donne $\forall n \quad x_n > 0$ qui donne immédiatement $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante.

b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut avoir que de limite supérieure à x_0 , donc positive. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger de limite $\ell \neq 0$ car le théorème sur les opérations sur les limites donnerait $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$ qui n'a pas de solution. Le théorème de convergence monotone donne alors, puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $\lim_n x_n = +\infty$.

c) $\forall n \geq 1 \quad x_n^2 = x_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$ se montre par récurrence initialisée à 0 ou à 1.

d) $\forall n, \quad x_n^2 \geq 2n$ en découle immédiatement.

e) On tire alors $\forall n \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k} = G_{n-1}$ donc $\forall n \quad \frac{x_0^2}{n} + 2 \leq \frac{x_n^2}{n} \leq \frac{x_0^2}{n} + 2 + \frac{G_{n-1}}{n}$. Or puisque $G_n \sim \ln n$, on a $\lim_n \frac{G_{n-1}}{n} = \lim_n \frac{\ln(n-1)}{n} = 0$. Le théorème des gendarmes donne alors $\lim_n \frac{x_n^2}{n} = 2$ donc $x_n \sim \sqrt{2n}$.

2° On note désormais $x_0 = t$ la variable. Ainsi :

$$\begin{aligned} x_1 &= t + \frac{1}{t} &= \frac{t^2 + 1}{t} \\ x_2 &= t + \frac{1}{t} + \frac{t}{t^2 + 1} &= \frac{t^4 + 3t^2 + 1}{t(t^2 + 1)} \\ x_3 &= t + \frac{1}{t} + \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{t(t^2 + 1)}{t^4 + 3t^2 + 1} &= \frac{t^8 + 7t^6 + 13t^4 + 7t^2 + 1}{t(t^2 + 1)(t^4 + 3t^2 + 1)} \end{aligned}$$

a) $x_0 = t$ initialise une récurrence enchaînée par : si $x_n \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t$ alors $\frac{1}{x_n} = o_{+\infty}(t)$ puis $x_{n+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t$. En conclusion : $\forall n, \quad x_n \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t$

b) $x_0 = t$ initialise une récurrence enchaînée par : si $x_n = t + \frac{n}{t} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)$ alors $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{t} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)$ puis $x_{n+1} = t + \frac{n+1}{t} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)$. En conclusion : $\forall n, \quad x_n = t + \frac{n}{t} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)$

c)La description plus fine des premiers termes donne :

$$\begin{aligned}x_0 &= t &= t + \frac{0}{t} + \frac{0}{t^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right) \\x_1 &= t + \frac{1}{t} &= t + \frac{1}{t} + \frac{0}{t^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right) \\x_2 &= t + \frac{1}{t} + \frac{t}{t^2 + 1} &= t + \frac{2}{t} + \frac{-1}{t^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right) \\x_3 &= t + \frac{1}{t} + \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{t(t^2 + 1)}{t^4 + 3t^2 + 1} &= t + \frac{3}{t} + \frac{-3}{t^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right)\end{aligned}$$

Ces quelques exemples initialisent une récurrence qui est bien enchaînée par : si $x_n = t + \frac{n}{t} + \frac{b_n}{t^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right)$ alors, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= t + \frac{n}{t} + \frac{b_n}{t^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right) + \frac{1}{t + \frac{n}{t} + \frac{b_n}{t^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right)} \\&= t + \frac{n}{t} + \frac{b_n}{t^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right) + \frac{1}{t} \left[\frac{1}{1 + \frac{n}{t^2} + \frac{b_n}{t^4} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^4} \right)} \right] \\&= t + \frac{n}{t} + \frac{b_n}{t^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right) + \frac{1}{t} \left[1 - \frac{n}{t^2} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right) \right] \\&= x_{n+1} = t + \frac{n+1}{t} + \frac{b_n - n}{t^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right)\end{aligned}$$

D'où l'existence d'une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n, x_n = t + \frac{n}{t} + \frac{b_n}{t^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right)$, vérifiant $b_0 = b_1 = 0, b_2 = -1$ et $\forall n \geq 2, b_{n+1} = b_n - n$.

Une récurrence évidente complétée à 0 et 1 amène alors à $b_n = \frac{n(1-n)}{2}$ pour tout n .

3

CORRIGÉ

La suite réelle $(u_n)_n$ est définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.

1° Pour tout réel $a \geq 0$, on a $(\sqrt{a} - 1)^2 = a - 2\sqrt{a} + 1 \geq 0$ donc $\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(1 + a)$.

2° Une récurrence évidente donne $\forall n, u_n \geq 0$ qui donne immédiatement $\forall n, u_{n+1} \geq \sqrt{n}$.

De plus, $u_0 \leq \frac{u_0}{2^0}$ initialise une récurrence bien enchaînée par :

si $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$ alors $u_{n+1} \leq \sqrt{n + n + \frac{u_0}{2^n}} \leq \frac{1}{2} \left(1 + 2n + \frac{u_0}{2^n} \right)$ puis $u_{n+1} \leq n + 1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}$.

En conclusion, le théorème de récurrence donne : $\forall n, u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

D'où, pour tout $n \geq 1$, on a $\sqrt{n-1} \leq u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$

3° On a déjà $\sqrt{n-1} \leq u_n$ pour tout n .

On a de plus, pour tout $n, u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$. Or $\lim_n \frac{u_0}{2^n} = 0$ et donc il existe N tel que, pour $n > N, \frac{u_0}{2^n} < 1$. Alors, pour $n > N$,

$u_n \leq n + 1$, donc $u_{n+1} \leq \sqrt{2n+1}$, donc $u_{n+2} \leq \sqrt{n+1 + \sqrt{2n}}$.

Ainsi, pour $n > N + 2$, on a $\sqrt{n-1} \leq u_n \leq \sqrt{n + \sqrt{2n}}$ donc $\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n + \sqrt{2n}}}{\sqrt{n}}$ qui donne

$$\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \sqrt{\frac{2}{n}}}$$

Le théorème des gendarmes donne alors $\lim_n \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$ donc $u_n \sim \sqrt{n}$.

4° Soit $\forall n, w_n = u_n - \sqrt{n}$.

Pour n quelconque, on a $w_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{n+1} = \sqrt{n+u_n} - \sqrt{n+1} = \frac{u_n - 1}{\sqrt{n+u_n} + \sqrt{n+1}} = \frac{\frac{u_n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{u_n}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$.

Donc $\lim_n w_{n+1} = \frac{1}{2}$: la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge de limite $\frac{1}{2}$.

5° On déduit $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$ donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + o(1)$ et donc $u_{n+1} - u_n \sim \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Or $\forall n, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$, donc il existe N tel que pour $n > N$ on a $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui exprime que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

F I N
