

1 EXERCICE

CORRIGÉ

A et B deux parties d'un ensemble E . $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$

a) Pour $b \in B$ quelconque, l'existence de $X \subset E$, tel que $f(X) = (\emptyset, \{b\})$ impose $b \notin A$.

Ainsi il est nécessaire que A et B soient disjoints pour que f soit surjective.

b) Avec $A \cap B = \emptyset$, on a, pour $A' \subset A$ et $B' \subset B$, $f(A' \cup B') = (A', B')$.

Ainsi il est suffisant que A et B soient disjoints pour que f soit surjective.

2 EXERCICE

CORRIGÉ

f fonction de E dans F . Soit B une partie de F .

Pour $x \in E$, x appartient à $f^{-1}(\overline{B})$ si et seulement si $f(x) \in \overline{B}$, donc si et seulement si $f(x) \notin B$, donc si et seulement si x n'appartient pas à $f^{-1}(B)$. D'où $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.

Ainsi «l'image réciproque du complémentaire est le complémentaire de l'image réciproque».

3 EXERCICE

CORRIGÉ

E et F sont deux ensembles. u application de E dans F , et v application de F dans E telles que $u \circ v = id_F$ et $v \circ u = id_E$.

$u \circ v = id_F$ impose v injective et u surjective. De même $v \circ u = id_E$ impose u injective et v surjective. Ainsi u et v sont des bijections.

En composant par la réciproque de u , on a $u^{-1} \circ (u \circ v) = u^{-1} \circ id_F$ donc $v = u^{-1} : u$ et v sont réciproques l'une de l'autre.

4 EXERCICE

CORRIGÉ

Soit X l'ensemble $\{5, 7, 9, 11, 17, 20, 77, 545\}$ et $\mathcal{P}(x)$ le prédicat défini sur X : «Si $x + 3$ est un multiple de 4 alors $x + 4$ est un multiple de 3»

a) $\mathcal{P}(9)$ est faux (car 12 multiple de 4 et 13 non multiple de 3), donc l'assertion $\forall x, \mathcal{P}(x)$ est fausse.

b) $\mathcal{P}(9)$ est faux mais $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour tout élément x de $\{5, 7, 11, 17, 20, 77, 545\}$.

5 EXERCICE

CORRIGÉ

Soit la conjecture \mathcal{C} : « Pour tout entier n , si n est impair alors il existe un entier p tel que $n^2 = 8p + 1$ » énoncée sur \mathbb{N} .

a) La négation de l'assertion \mathcal{C} est : « Il existe un entier n , impair, tel que $n^2 \neq 8p + 1$ pour tout entier p ».

b) Soit n un entier impair quelconque. On a donc $n = 2k + 1$ où k entier. Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k + 1)k + 1$. Or k ou $(k + 1)$ est pair donc $k(k + 1)$ multiple de 2. Donc $k(k + 1) = 2p$ avec p entier. D'où $n^2 = 8p + 1$.

Ainsi \mathcal{C} est vraie.

6 EXERCICE

CORRIGÉ

f une application de E dans F et Ψ de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E) : \forall B \Psi(B) = f^{-1}\langle B \rangle$.

a) F vide ou singleton donne immédiatement f surjective et Ψ injective.

Pour F d'au moins deux éléments, prenons y et z quelconques, distincts, dans F . Ψ injective impose $\Psi(\{y, z\}) \neq \Psi(\{y\})$ donc $f^{-1}\langle \{y, z\} \rangle \neq f^{-1}\langle \{y\} \rangle$ qui impose que z ait un antécédent par f au moins.

Ainsi « f surjective» est une condition nécessaire pour que Ψ soit injective.

b) Soit f surjective.

Pour B et C parties distinctes de F , considérons $y \in (B \setminus C)$ (s'il n'y en a pas, il suffit d'échanger B et C). y admet au moins un antécédent dans E par f , prenons x . Alors $f(x) \in B$ et $f(x) \notin C$. Donc $x \in f^{-1}\langle B \rangle$ et $x \notin f^{-1}\langle C \rangle$ et donc $\Psi(B) \neq \Psi(C)$.

Ainsi Ψ est injective.

7 EXERCICE

CORRIGÉ

On définit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \end{cases}$

a) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$ et $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x + 1)^2}$.

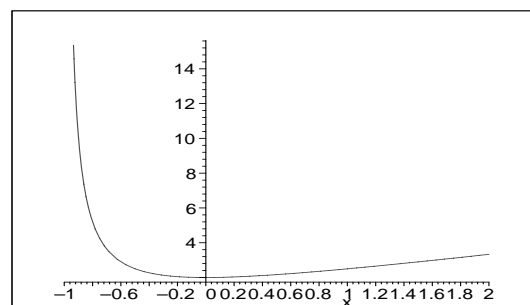
D'où les variations de f :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow -2$	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow 2$	$\nearrow +\infty$

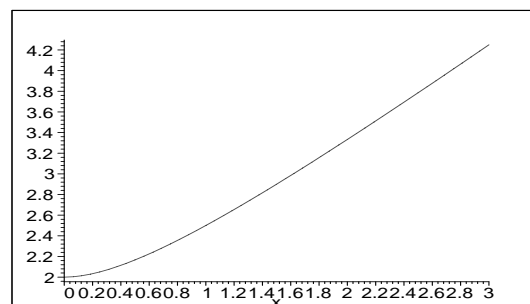
b) f n'est pas injective puisque $f(1 + \sqrt{3}) = f(1 - \sqrt{3}) = 4$.

f n'est surjective puisque 0 n'a pas d'antécédent par f (pas de racine à $x^2 + 2x + 2$).

c) $f(\langle -1, 2 \rangle) = [2, +\infty[$



$$f([0, 3]) = [2, \frac{17}{4}]$$



$$f^{-1}(\langle -1, 2 \rangle) = \{0\} \quad f^{-1}(\langle 2, 4 \rangle) =]1 - \sqrt{3}, 0[\cup]0, 1 + \sqrt{3}[$$

