

1 DIAGONALISATION

CORRIGÉ

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. a est un réel non nul.

Soit $\psi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

1° Pour λ réel, $A - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & a & a^2 \\ 1/a & -\lambda & a \\ 1/a^2 & 1/a & -\lambda \end{pmatrix}$ et $\det(A - \lambda.I_3) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$.

Ainsi ψ admet deux valeurs propres distinctes : $\lambda = -1$ et $\mu = 2$.

2° $f_1 = a^2.e_1 + a.e_2 + e_3$ est vecteur propre associé à la valeur 2.

3° $f_2 = -a.e_1 + e_2$ et $f_3 = -a^2.e_1 + e_3$ sont vecteurs propres associés à la valeur -1 .

4° a) f_2 et f_3 sont manifestement non colinéaires et sont dans un espace propre en somme directe avec celui de f_1 . Donc $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .

b) C'est une base de vecteurs propres donc la matrice de ψ dans cette base est diagonale, c'est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5° $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} est $P = \begin{pmatrix} a^2 & -a & -a^2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et alors $A =$

$P D P^{-1}$. On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(3a^2) & 1/(3a) & 1/3 \\ -1/(3a) & 2/3 & -a/3 \\ -1/(3a^2) & -1/(3a) & 2/3 \end{pmatrix}$ donc

$$A^n = P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n/3 + 2(-1)^n/3 & 2^n a/3 - (-1)^n a/3 & 2^n a^2/3 - (-1)^n a^2/3 \\ 2^n/(3a) - (-1)^n/(3a) & 2^n/3 + 2(-1)^n/3 & 2^n a/3 - (-1)^n a/3 \\ 2^n/(3a^2) - (-1)^n/(3a^2) & 2^n/(3a) - (-1)^n/(3a) & 2^n/3 + 2(-1)^n/3 \end{pmatrix}.$$

2 TRANSFORMATION DE LAPLACE

CORRIGÉ

Partie A

1° a) \mathcal{H} est bien nulle sur $] -\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$, et pour $\beta > 0$ on a $F_{\mathcal{H}}(t) = \int_0^\beta e^{-pt} dt = \frac{1}{p}(1 - e^{-p\beta})$ définit une fonction $F_{\mathcal{H}}$ bornée. \mathcal{H} est intégrable sur $[0, +\infty[$, \mathcal{H} est dans E .

b) Il n'y a pas de problème pour établir que E , non vide, est stable par somme et produit par un réel. E est un \mathbb{R} -espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de celui des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

2° a) Soit f bornée sur \mathbb{R} , nulle sur $] -\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$. On a alors $|f| \leq M \mathcal{H}$ donc $\left[t \mapsto e^{-pt} f(t) \right]$ est intégrable sur \mathbb{R} pour tout $p > 0$. f vérifie par ailleurs les autres conditions et appartient donc à E .

b) Soit f intégrable sur \mathbb{R} , nulle sur $] -\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$. Pour $p > 0$ et $t \geq 0$, on a $|f(t) e^{-pt}| \leq |f(t)|$ donc $\left[t \mapsto e^{-pt} f(t) \right]$ est intégrable sur \mathbb{R} pour tout $p > 0$. f vérifie par ailleurs les autres conditions et appartient donc à E .

Soit F la primitive de f nulle sur $] -\infty, 0[$. Elle est bien sûr continue sur $[0, +\infty[$. On a, pour tout $y \geq 0$, la valeur $F(y) = \int_0^y f(x) dx$; donc $|F(y)| \leq \int_0^y |f(x)| dx \leq \int_0^{+\infty} |f(x)| dx = M$. La question précédente donne F dans E .

3° a) Soit P polynôme unitaire de degré n . On a $P(t) \sim_{\infty} t^n$. Or, pour $p > 0$, $e^{-pt} = o_{\infty}(t^{-n-2})$. Puisque $\left[t \mapsto t^{-2} \right]$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on a $\left[t \mapsto P(t) e^{-pt} \right]$ intégrable sur $[0, +\infty[$; on en déduit $P \times \mathcal{H}$ dans E .

b) Soit f dans E . Pour $p > 0$, choisissons $0 < q < p$.
Pour t assez grand on a $t^n e^{(q-p)t} \leq 1$ donc $|t^n f(t) e^{-pt}| \leq |f(t) e^{-qt}|$. Cette dernière fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $\left[t \mapsto t^n f(t) e^{-pt} \right]$ aussi pour tout $p > 0$. Ainsi la fonction $\left[t \mapsto t^n f(t) \right]$ est dans E .

Partie B

1° La linéarité de \mathcal{L} découle de la linéarité de l'intégration.

Remarquons que pour f dans E et $p > 0$, $\mathcal{L}(f)(p) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} e^{-pt} f(t) dt$.

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \quad \int_0^{\beta} e^{-pt} dt &= \frac{1}{p} (1 - e^{-p\beta}) \text{ donc } \mathcal{L}(\mathcal{H})(p) = \frac{1}{p}. \\ \int_0^{\beta} e^{-pt} e^{-t} dt &= \left[\frac{1}{p+1} e^{-(p+1)t} \right]_0^{\beta} \text{ donc } \mathcal{L}\left(\frac{\mathcal{H}}{\exp}\right)(p) = \frac{1}{p+1} \\ \int_0^{\beta} e^{-pt} \sin t dt &= \left[\frac{-1}{p^2+1} e^{-pt} (\cos t + p \sin t) \right]_0^{\beta} \text{ donc } \mathcal{L}(\mathcal{H} \times \sin)(p) = \frac{1}{p^2+1} \\ \int_0^{\beta} e^{-pt} \cos t dt &= \left[\frac{-1}{p^2+1} e^{-pt} (p \cos t - \sin t) \right]_0^{\beta} \text{ donc } \mathcal{L}(\mathcal{H} \times \cos)(p) = \frac{p}{p^2+1} \end{aligned}$$

3° Soit $f \in E$. On pose, pour a réel positif, $e_a : \left[t \mapsto f(at) \right]$.

a) Pour $\beta > 0$, $\int_0^{\beta} e_a(t) e^{-pt} dt = \int_0^{a\beta} f(u) e^{-\frac{p}{a}u} \frac{1}{a} du$ donc $\mathcal{L}(e_a)(p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right)$ pour tout $p > 0$.

b) En découle pour $f : \left[t \mapsto \sin \omega t \right]$ $\mathcal{L}(\mathcal{H} \times f) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ et pour $f : \left[t \mapsto e^{-\lambda t} \right]$ $\mathcal{L}(\mathcal{H} \times f) = \frac{1}{p + \lambda}$.

4° Soit $f \in E$. On pose, pour τ réel positif, $r_{\tau} : \left[t \mapsto f(t - \tau) \right]$.

Pour $\beta > \tau$, $\int_0^{\beta} r_{\tau}(t) e^{-pt} dt = \int_{-\tau}^{\beta-\tau} f(u) e^{-p(u+\tau)} du = e^{-p\tau} \int_0^{\beta-\tau} f(u) e^{-pu} du$ donc $\mathcal{L}(r_{\tau})(p) = e^{-p\tau} \mathcal{L}(f)(p)$ pour tout $p > 0$.

5° Soit $f \in E$. On pose, pour λ réel positif, $a_{\lambda} : \left[t \mapsto e^{-\lambda t} f(t) \right]$.

a) Pour $\beta > 0$, $\int_0^{\beta} a_{\lambda}(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\beta} f(t) e^{-(\lambda+p)t} dt$ donc $\mathcal{L}(a_{\lambda})(p) = \mathcal{L}(f)(p + \lambda)$ pour tout $p > 0$.

b) En découle que pour la fonction $f : \left[t \mapsto e^{-\lambda t} \sin \omega t \right]$ on a $\mathcal{L}(\mathcal{H} \times f)(p) = \frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$ pour tout $p > 0$.

6° a) Soit $f \in E$; sa restriction à $[0, +\infty[$ est de classe C^1 . On note f' la prolongée de la dérivée de f à \mathbb{R} , nulle sur $] -\infty, 0[$.
Pour $\beta > 0$, on a en intégrant par parties $\int_0^{\beta} f'(t) e^{-pt} dt = [f(t) e^{-pt}]_0^{\beta} + p \int_0^{\beta} f(t) e^{-pt} dt$. L'existence d'une limite réelle quand β tend vers $+\infty$ prouve que f' est dans E et la valeur donne $\mathcal{L}(f')(p) = p \mathcal{L}(f)(p) - f(0)$ pour tout $p > 0$.

b) Pour tout entier n , g_n est la fonction puissance n -ième : $\left[t \mapsto \mathcal{H}(t) t^n \right]$. Puisqu'on a $g'_{n+1} = (n+1) g_n$ et $g_n(0) = 0$ pour tout n , on a $p \mathcal{L}(g_{n+1})(p) = (n+1) \mathcal{L}(g_n)(p)$ pour tout $p > 0$.

c) De $g_0 = \mathcal{H}$ on tire, pour tout n et tout $p > 0$, $\mathcal{L}(g_n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ par récurrence immédiate. Avec la question précédente, en découle alors, avec $h_n : \left[t \mapsto \mathcal{H}(t) \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t} \right]$, $\mathcal{L}(h_n)(p) = \frac{1}{(p+\lambda)^{n+1}}$ pour tout $p > 0$.

Partie C

On désigne par f la fonction nulle sur $] -\infty, 0[$ dont la restriction à $[0, +\infty[$ est solution de l'équation différentielle (e) : $y'' + 7y' + 6y = 370 \sin x$ sur $[0, +\infty[$ et qui satisfait la condition initiale $(0, 0, 0)$ (i.e. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$).

a) Puisque $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, on a $\mathcal{L}(f')(p) = p \mathcal{L}(f)(p)$ et $\mathcal{L}(f'')(p) = p \mathcal{L}(f')(p) = p^2 \mathcal{L}(f)(p)$ pour tout $p > 0$. f solution de (e) donc, pour tout $p > 0$, $(p^2 + 7p + 6) \mathcal{L}(f)(p) = 2 \mathcal{L}(\sin)(p)$.

On a donc $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{370}{(p^2 + 7p + 6)(p^2 + 1)}$.

b) $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{-2}{p+6} + \frac{37}{p+1} + \frac{5(5-7p)}{p^2+1}$ laisse soupçonner $f : \left[t \mapsto -2e^{-6t} + 37e^{-t} + 25 \sin t - 35 \cos t \right]$ dont on vérifie qu'il convient.

c) La résolution "classique" de (e) utilise l'équation caractéristique (c) : $s^2 + 7s + 6 = 0$ de solutions -6 et -1 . Une solution particulière est cherchée sous la forme $a \sin + b \cos$ et enfin la condition initiale est utilisée pour trouver la solution $f : \left[t \mapsto -2e^{-6t} + 37e^{-t} + 25 \sin t - 35 \cos t \right]$.

F I N