

1 EULER, GRAND CLASSIQUE

CORRIGÉ

Soient, définies sur $]1, +\infty[$ les fonctions G et Li par $G(x) = \frac{x}{\ln x}$ et $\text{Li}(x) = \int_k^x \frac{dt}{\ln t}$ ($k \in]1, 2]$).

a) Pour $x > 2$, $\ln t < t$, donc $\text{Li}(x) = \int_k^x \frac{dt}{\ln t} > \int_k^x \frac{dt}{t} > \ln x$. Donc Li a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

b) G est C^∞ sur $]1, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions qui le sont. Li est C^∞ sur $[2, +\infty[$ comme primitive d'une fonction qui l'est.

Pour $x > 1$, $G'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ et $\text{Li}'(x) = \frac{1}{\ln x}$.

c) Pour $x > 1$, $\text{Li}'(x) - G'(x) = \frac{1}{\ln^2 x} = o(\text{Li}'(x))$ donc $\text{Li}'(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} G'(x)$.

d) Soit $\varepsilon > 0$. On a A tel que $\ln x > \frac{1}{\varepsilon}$ pour $x > A$. Alors $0 < \text{Li}'(x) - G'(x) < \varepsilon \text{Li}'(x)$ pour $x > A$.

e) On peut en déduire $0 \leq \int_A^x (\text{Li}'(t) - G'(t)) dt \leq \varepsilon \int_A^x \text{Li}'(t) dt$ pour $x > A$, qui donne pour $x > A$ l'encadrement $0 \leq (\text{Li}(x) - G(x)) - (\text{Li}(A) - G(A)) \leq \varepsilon (\text{Li}(x) - \text{Li}(A))$. Or $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Li}(x) = +\infty$ donc on a $B > A$ tel que, pour $x > B$, $\frac{\text{Li}(A)}{\text{Li}(x)} < \frac{1}{2}$ et $\frac{\text{Li}(A) - G(A)}{\text{Li}(x)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour $x > B$, $\left| \frac{\text{Li}(x) - G(x)}{\text{Li}(x)} \right| \leq \varepsilon$.

Ainsi $\text{Li}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} G(x)$.

2 WALLIS, GRAND CLASSIQUE

CORRIGÉ

Pour tout entier n de \mathbb{N} on définit l'intégrale de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1° a) $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, donc $0 \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$. Alors $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$.

La suite $(W_n)_n$ est décroissante, et minorée par 0.

b) Grâce à une intégration par parties on a

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n+1} t dt \\ &= [-\cos t \sin^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t (n+1) \cos t \sin^n t dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^n t dt \\ &= (n+1) (W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

Ainsi $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ pour tout n .

2° a) Notons $V_n = nW_nW_{n-1}$ pour $n > 0$.

On a, pour $n > 0$, $V_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)\left(\frac{n}{n+1}W_{n-1}\right)W_n = V_n$.

La suite $(nW_nW_{n-1})_n$ est donc constante à la valeur $V_1 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$.

b) Pour $n \geq 2$, $\frac{W_n}{W_{n-2}} = \frac{n-1}{n}$ de limite 1. Donc $W_n \sim W_{n-2}$.

Puisque $(W_n)_n$ est décroissante, on a $W_n \leq W_{n-1} \leq W_{n-2}$ donc $1 \leq \frac{W_{n-1}}{W_n} \leq \frac{W_{n-2}}{W_n}$ et le théorème des gendarmes donne $W_n \sim W_{n-1}$.

c) Alors, de $W_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$ pour $n \geq 1$, on déduit $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ donc $(W_n)_n$ converge vers 0.

d) On a de même $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3° a) La relation de récurrence établie précédemment, à partir de $W_1 = 1$, donne $W_3 = \frac{2}{3}W_1 = \frac{2}{3}$, puis alors $W_5 = \frac{4}{5}W_3 = \frac{2.4}{3.5}$. Ceci initialise la preuve par récurrence de la formule $W_{2p+1} = \frac{2.4 \dots (2p)}{3.5 \dots (2p+1)}$ qui s'enchaîne facilement. On obtient ensuite $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$

b) De la même façon, à partir de $W_0 = \frac{\pi}{2}$, on trouve $W_2 = \frac{1}{2}W_0 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$, puis $W_4 = \frac{3}{4}W_2 = \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2}$. Puis enfin $W_{2p} = \frac{1.3 \dots (2p-1)}{2.4 \dots (2p)}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$.

c) De $W_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$ on déduit alors la *formule de Wallis* : $\lim_p \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)! \sqrt{p}} = \sqrt{\pi}$.

3 FONCTION À PARTIR D'UNE INTÉGRALE

CORRIGÉ

$$\varphi : \left[x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt \right] \quad \text{et} \quad F : \left[x \mapsto e^{-x^2} \varphi(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \right]$$

1° $\left[x \mapsto e^{-x^2} \right]$ étant C^∞ sur \mathbb{R} à valeurs positives, φ et F sont définies et C^∞ sur \mathbb{R} .

a) Pour x réel, $F(-x) = e^{-x^2} \int_0^{-x} e^{t^2} dt = -e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2} du = -F(x)$. Ainsi F est impaire.

b) $F(x) > 0$ pour $x > 0$ de manière évidente.

c) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [0, x]$, $1 \leq e^{t^2} \leq e^{x^2}$. Alors $x \leq \varphi(x) \leq x.e^{x^2}$ et donc $x.e^{-x^2} \leq F(x) \leq x$.

2° Étude locale en $+\infty$.

a) En intégrant par parties on a, pour $x > 1$,

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^4} e^{t^2} dt &= \left[\frac{-1}{3t^3} e^{t^2} \right]_1^x - \int_1^x \frac{-2t}{3t^3} e^{t^2} dt \\ &= \left[\frac{-1}{3x^3} e^{x^2} + \frac{1}{3e} \right] + \int_1^x \frac{2}{3t^2} e^{t^2} dt \\ &= \left[\frac{-1}{3x^3} e^{x^2} + \frac{1}{3e} \right] + \left[\frac{-2}{3t} e^{t^2} \right]_1^x - \int_1^x \frac{-4t}{3t} e^{t^2} dt \\ &= \left[\frac{-1}{3x^3} e^{x^2} + \frac{1}{3e} \right] + \left[\frac{-2}{3x} e^{x^2} + \frac{2}{3e} \right] + \int_1^x \frac{4}{3} e^{t^2} dt \\ \text{donc } \int_1^x e^{t^2} dt &= \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \quad (1)\end{aligned}$$

b) Soit $h : \left[t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^2} \right]$. Pour $t \geq 1$, $h'(t) = 2e^{t^2} \frac{t^2 - 1}{t^3} \geq 0$ donc h est croissante sur $[1, +\infty[$.

c) Pour $x > 1$ et $t \in [1, x]$ on a $h(t) \leq h(x)$ donc $0 \leq \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt = \int_1^x \frac{1}{t^2} h(t) dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = e^{x^2} \frac{x-1}{x^3}$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \frac{x-1}{x^3} = 0$ donc $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

e) La relation (1) donne alors $\varphi(x) - \varphi(1) = \int_1^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$.

f) On a alors, puisque φ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, $\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$ et donc $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

3° a) Nous savons que φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et, pour x réel, $\varphi'(x) = e^{x^2}$.

b) F est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et $F'(x) = 1 - 2xF(x)$ pour tout réel x . Bien sûr F est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

c) $F(0) = 0$ et F a pour limite 0 en $+\infty$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne que F admet sur $[0, +\infty[$ un extremum au moins, en un réel qui sera noté a .

d) En un tel réel a on a $F'(a) = 0$ donc $F(a) = \frac{1}{2a}$. Réciproquement, F ne peut admettre d'extremum sur $[0, +\infty[$ qu'en un réel a tel que $F'(a) = 0$ c'est à dire $F(a) = \frac{1}{2a}$. Il y a ainsi unicité du point a de $[0, +\infty[$ où F atteint un extremum puisque $\left[a \mapsto \frac{1}{2a} \right]$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

e) Le tableau des variations de F se déduit sans problème. Pour ce qui concerne la courbe de F , on peut utiliser $a \simeq 0,9241388730$ et $F(a) \simeq 0,5410442245$.

F I N
