

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(5 points)

c est un réel donné. On définit la suite $(U_n)_n$ par

$$U_0 = 0 \quad U_1 = 1 \quad \forall n \quad U_{n+2} = cU_{n+1} + (1-c)U_n$$

puis la suite $(V_n)_n$ par $\forall n, V_n = U_{n+1} - U_n$.

- a) Montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique.
- b) En déduire l'expression de U_n en fonction de c et n .
- c) Peut-on choisir c pour que la suite $(U_n)_n$ soit convergente ? Quelle est alors sa limite ?

EXERCICE 2

(5 points)

Pour $(u_n)_n$ une suite bornée de réels, on définit les deux suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ par :

$$\forall n \quad v_n = \max_{i \leq n} u_i \quad \forall n \quad w_n = \min_{i \leq n} u_i$$

- a) Montrer que les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont monotones.
- b) Sont-elles bornées ?
- c) Dans le cas particulier où, pour tout n , $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ préciser les termes généraux v_n et w_n .
- d) Caractériser les suites $(u_n)_n$ pour lesquelles $\forall n, u_n = v_n$.

e) On note \mathcal{B} l'ensemble des suites réelles bornées. f et g sont les applications de \mathcal{B} dans \mathcal{B} qui à toute suite $(u_n)_n$ associent respectivement $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ précédemment définies.

Préciser les applications $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ et $g \circ g$.

EXERCICE 3

(5 points)

- a) Montrer que pour tout $n > 0$ (entier), il existe un réel positif ou nul unique, solution de l'équation

$$e^x + x - n = 0$$

cette solution sera notée x_n .

- b) En utilisant la propriété $\left[\forall t \ e^t \geq t + 1 \right]$, montrer $n \leq 2 e^{x_n}$ pour tout n .
- c) En déduire que $(x_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
- d) Etablir $x_n = o(n)$ puis $x_n \sim \ln n$.
- e) Obtenir enfin $(x_n - \ln n) \sim -\frac{\ln n}{n}$.
-

EXERCICE 4

(5 points)

On rappelle le "lemme de Césaro" :

Théorème. Si $(u_n)_n$ est une suite de limite λ ($\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$), alors la suite $(v_n)_n$ admet également λ pour limite, $(v_n)_n$ étant définie par : $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ pour tout n .

On choisit $a > 0$ et $A > 0$.

- 1° Justifier que les relations

$$u_0 = A \quad \forall n \begin{cases} u_{n+1} > 0 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{a^2}{u_{n+1}} \end{cases}$$

permettent de définir une suite $(u_n)_n$ sur \mathbb{N} .

- 2° a) Montrer que $(u_n)_n$ admet une limite.

- b) Quelle est-elle ?

- 3° On pose, pour tout n , $w_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.

- a) Montrer que $(w_n)_n$ converge, de limite $2a^2$.

- b) Utiliser le lemme de Césaro et démontrer $u_n \sim a\sqrt{2n}$.
-

F I N