

### 1 NOMBRES PARFAITS

CORRIGÉ

**1° a)**  $n \in \mathbb{N}^*$  quelconque.  $n$  est premier si et seulement si  $n$  n'admet comme diviseurs positifs que 1 et lui-même donc si et seulement si  $\sigma(n) = n + 1$ .

**b)**  $p \in \mathbb{N}^*$  premier.  $p$  est premier avec tous les nombres qui ne sont pas multiples de  $p$ . Les diviseurs de  $p^k$  sont les  $p^j$ , où  $0 \leq j \leq k$ . Donc

$$\sigma(p^k) = \sum_{j=0}^k p^j = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

**2° a)**  $a$  et  $b$  sont quelconques dans  $\mathbb{N}^*$ . Avec  $\alpha \in \text{Div}(a)$  et  $\beta \in \text{Div}(b)$ , on a bien sûr  $(\alpha\beta) \mid (ab)$ . Réciproquement, avec  $c \mid ab$ , on pose  $\alpha = \text{pgcd}(c, a)$ . Alors  $c = \alpha\beta$  et  $a = \alpha a'$ . Alors  $\beta \mid (a'b)$  et  $\beta$  et  $a'$  étant premiers entre eux le théorème de Gauss donne  $\beta \mid b$ .

Ainsi  $\text{Div}(ab) = \{\alpha\beta / \alpha \in \text{Div}(a), \beta \in \text{Div}(b)\}$ .

**b)** On pose  $\xi : \begin{cases} \text{Div}(a) \times \text{Div}(b) & \rightarrow & \text{Div}(ab) \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{cases}$  avec  $a$  et  $b$  positifs et premiers entre eux. La question précédente donne la surjectivité de  $\xi$ .

Pour  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dans  $\text{Div}(a)$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans  $\text{Div}(b)$ , on pose  $(\alpha_1\beta_1) = (\alpha_2\beta_2)$ .  $a$  premier avec  $b$  impose  $\alpha_i$  premier avec  $\beta_j$ , donc  $\alpha_1 \mid \alpha_2$  et  $\alpha_2 \mid \alpha_1$ . On a ainsi  $\alpha_1 = \alpha_2$  et de même  $\beta_1 = \beta_2$ .  $\xi$  est injective.

En conclusion,  $\xi$  est une bijection.

**c)**  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{N}^*$  sont premiers entre eux. D'après la question précédente

$$\sigma(ab) = \sum_{c \mid ab} c = \sum_{\alpha \mid a, \beta \mid b} \alpha\beta = \sum_{\alpha \mid a} \alpha \cdot \sum_{\beta \mid b} \beta = \sigma(a)\sigma(b)$$

**3° a)**  $m$  un nombre parfait pair :  $m = 2^k b$  où  $b$  impair et  $k$  positif.  $b$  est impair donc premier avec  $2^k$ . Ainsi

$$\sigma(m) = \sigma(2^k)\sigma(b) = (2^{k+1} - 1)\sigma(b)$$

Or  $\sigma(m) = 2m = 2^{k+1}b$  et  $2^{k+1}$  premier avec  $(2^{k+1} - 1)$  qui est impair. Le théorème de Gauss donne donc  $\sigma(b) = 2^{k+1}c$  et donc  $b = (2^{k+1} - 1)c$ .

**b)** De  $\sigma(b) = 2^{k+1}c$  et  $b = (2^{k+1} - 1)c$  on tire  $\sigma(b) = b + c$ .  $c$  étant un diviseur de  $b$ ,  $c \neq 1$  imposerait  $\sigma(b) \geq b + c + 1$ . D'où  $c = 1$ .

Alors  $\sigma(b) = b + 1$  et donc  $b$  est premier d'après la première question.

**c)**  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{N}^*$ . On a  $2^{\alpha\beta} = (2^\alpha)^\beta$  et donc

$$(2^{\alpha\beta} - 1) = (2^\alpha - 1) \sum_{k=0}^{\beta-1} (2^\alpha)^k$$

On a obtenu  $b = (2^{k+1} - 1)$  et  $b$  premier. Avec  $(k + 1) = \alpha\beta$  on tire alors  $(2^\alpha - 1) = 1$  qui impose  $\alpha = 1$ . Ainsi  $k + 1$  est premier.

**4° a )** La question précédente établit que les nombres parfaits pairs sont des nombres d'Euclide.

**b )** Soit  $E_n = 2^{n-1} (2^n - 1)$  un nombre d'Euclide.  $(2^n - 1)$  est premier et impair, donc premier avec  $2^{n-1}$ . Alors

$$\sigma(E_n) = \sigma(2^{n-1}) \sigma(2^n - 1) = (2^n - 1) (2^n - 1 + 1) = 2 E_n$$

On déduit donc que les nombres d'Euclide sont tous parfaits.

**c )** Les premières valeurs de  $(2^n - 1)$  premières sont 3, 7, 31, 127 et donc les premiers nombres d'Euclide, qui sont les premiers nombres parfaits pairs sont 6, 28, 496, 8128.

## 2 FORMULE DE STIRLING

CORRIGÉ

### Partie A

**1°**  $x_0 \in ]a, b[$ ;  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$  et vérifie  $f(a) = f(b) = 0$ . On pose  $\varphi : \left[ x \mapsto f(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)} (x - a)(x - b) \right]$

$\varphi$  est de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$  et vérifie  $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(x_0) = 0$ . Le théorème de Rolle appliqué sur  $[a, x_0]$  et sur  $[x_0, b]$  donne  $x_2 \in [a, x_0]$  et  $x_3 \in [x_0, b]$  tels que  $\varphi'(x_2) = \varphi'(x_3) = 0$ .

Le théorème de Rolle appliqué à  $\varphi' C^1$  sur  $[x_2, x_3]$  donne  $x_1 \in ]a, b[$  tel que  $\varphi'(x_1) = 0$ , i.e.

$$f(x_0) = \frac{f''(x_1)}{2} (x_0 - a)(x_0 - b)$$

**2°**  $g$  de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$  vérifie  $m \leq g''(x) \leq M$  pour tout  $x$  de  $[a, b]$ .

**a )**  $h : \left[ x \mapsto g(x) - g(a) \frac{x-b}{a-b} - g(b) \frac{x-a}{b-a} \right]$ . On a  $h C^2$  sur  $[a, b]$  et pour tout  $x$ ,  $h'(x) = g'(x) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$  et  $h''(x) = g''(x)$ .

Pour  $x$  de  $]a, b[$  la question précédente appliquée à  $h$  donne  $x_1 \in ]a, b[$  tel que  $h(x) = \frac{h''(x_1)}{2} (x - a)(x - b)$ . De  $m \leq g''(x_1) = h''(x_1) \leq M$  on tire

$$M \frac{(x - a)(x - b)}{2} \leq g(x) - g(a) \frac{x - b}{a - b} - g(b) \frac{x - a}{b - a} \leq m \frac{(x - a)(x - b)}{2}$$

qui reste vérifié pour  $x = a$  ou  $x = b$ .

**b )** On calcule  $\int_a^b \left( g(a) \frac{x - b}{a - b} + g(b) \frac{x - a}{b - a} \right) dx = \frac{b - a}{2} [g(a) + g(b)]$ .

**c )** De la question précédente on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( M \frac{(x - a)(x - b)}{2} \right) dx &\leq \int_a^b \left( g(x) - g(a) \frac{x - b}{a - b} - g(b) \frac{x - a}{b - a} \right) dx \\ \int_a^b \left( g(x) - g(a) \frac{x - b}{a - b} - g(b) \frac{x - a}{b - a} \right) dx &\leq \int_a^b \left( m \frac{(x - a)(x - b)}{2} \right) dx \end{aligned}$$

puis

$$-M \frac{(b - a)^3}{12} \leq \int_a^b g(x) dx - \frac{b - a}{2} (g(a) + g(b)) \leq -m \frac{(b - a)^3}{12}$$

## Partie B

**1° a )** Par parties on calcule  $\int_n^{n+1} \ln(x) dx = (n+1) \ln(n+1) - n \ln n - 1$  où  $n$  est un entier positif.

**b )**  $\ln'' x = -\frac{1}{x^2}$  pour  $x > 0$  et donc  $-\frac{1}{n^2} \leq \ln'' x \leq -\frac{1}{(n+1)^2}$  pour  $x \in [n, (n+1)]$ .

La partie précédente appliquée à  $\ln$  sur  $[n, (n+1)]$  donne

$$\frac{1}{12(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \ln(x) dx - \frac{1}{2} (\ln(n+1) + \ln(n)) \leq \frac{1}{12n^2}$$

donc 
$$\frac{1}{12(n+1)^2} \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1 \leq \frac{1}{12n^2}$$

**2° a )** Pour  $n \geq 2$  on pose  $U_n = \ln(n^{n+1/2} e^{-n}) - \ln(n!)$  et  $V_n = U_n + \frac{1}{12(n-1)}$ .

Bien sûr  $\lim_n (U_n - V_n) = 0$ .

De plus  $U_{n+1} - U_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) [\ln(n+1) - \ln(n)] - 1$  donc  $U_{n+1} - U_n \geq \frac{1}{12(n+1)^2} > 0$  pour tout  $n$ . Ainsi  $(U_n)_n$  est croissante.

Enfin  $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n - \frac{1}{12n(n-1)} \leq \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n(n-1)} < 0$  pour tout  $n$ . Ainsi  $(V_n)_n$  est décroissante.

Les suites  $(U_n)_n$  et  $(V_n)_n$  sont donc adjacentes et elles convergent vers le même réel  $C$  qui vérifie  $U_n \leq C \leq V_n$  pour tout  $n$ .

**b )**  $\lim_n \ln(n^{n+1/2} e^{-n}) - \ln(n!) = C$  et  $\exp$  est continue en  $C$ . Ainsi  $\lim_n \frac{n^{n+1/2} e^{-n}}{n!} = e^C$  donc  $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{-C}$

**3° a )** On a  $\lim_n \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 n} = \pi$ . Or  $\frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 n} \sim \frac{2^{4n} n^{4n} e^{-4n} n^2 e^{-4C}}{((2n)^{2n})^2 e^{-4n} n e^{-2C} n}$  donc  $C = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$ .

**b )** On a  $e^{-C} = \sqrt{2\pi}$  d'où la formule de Stirling  $\boxed{n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$ .