

1 PREMIÈRE SUITE

CORRIGÉ

1° Une primitive φ de \ln sur $]0, +\infty[$ est donnée par $\varphi(x) = \int_1^x \ln t \, dt$ pour $x > 0$.

$$\text{Or } \varphi(x) = \int_1^x 1 \cdot \ln t \, dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} \, dt = [t \ln t - t]_1^x = x \ln x - x + 1.$$

$$2^\circ \text{ a) Pour } n > 0, u_n = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n \ln(n+k) - n \ln n \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(n+k) - \ln n) = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right].$$

b) \ln est croissante sur $[1, 2]$ donc, pour $1 \leq k \leq n$, sur $\left[1 + \frac{k-1}{n}, 1 + \frac{k}{n}\right]$. Ainsi pour tout $x \in \left[1 + \frac{k-1}{n}, 1 + \frac{k}{n}\right]$, on a $\ln\left(1 + \frac{k-1}{n}\right) \leq \ln x \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

$$\text{On a donc } \int_{1+\frac{k-1}{n}}^{1+\frac{k}{n}} \ln\left(1 + \frac{k-1}{n}\right) \, dx \leq \int_{1+\frac{k-1}{n}}^{1+\frac{k}{n}} \ln x \, dx \leq \int_{1+\frac{k-1}{n}}^{1+\frac{k}{n}} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \, dx \text{ donc}$$

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k-1}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k-1}{n}}^{1+\frac{k}{n}} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

$$\text{c) On déduit } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k-1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \int_{1+\frac{k-1}{n}}^{1+\frac{k}{n}} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \text{ en ajoutant les inégalités précédentes.}$$

Ceci s'écrit

$$u_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln x \, dx \leq u_n.$$

d) De l'inégalité précédente on déduit $\int_1^2 \ln x \, dx \leq u_n \leq \int_1^2 \ln x \, dx + \frac{1}{n} \ln 2$ pour tout $n > 0$. Le théorème des gendarmes donne alors la convergence de $(u_n)_n$ de limite $\int_1^2 \ln x \, dx = \varphi(2) = 2 \ln 2 - 1$.

2 RÉCRÉATION COMBINATOIRE

CORRIGÉ

1° a) $\sum_{k=0}^n \mathbf{C}_k^i = \mathbf{C}_{n+1}^{i+1}$ se montre par récurrence sur n . Pour $n = i$ on a bien $\sum_{k=0}^i \mathbf{C}_k^i = \mathbf{C}_i^i = 1 = \mathbf{C}_{i+1}^{i+1}$. En admettant l'égalité $\sum_{k=0}^n \mathbf{C}_k^i = \mathbf{C}_{n+1}^{i+1}$ à un rang $n \geq i$ quelconque, on déduit $\sum_{k=0}^{n+1} \mathbf{C}_k^i = \sum_{k=0}^n \mathbf{C}_k^i + \mathbf{C}_{n+1}^i = \mathbf{C}_{n+1}^{i+1} + \mathbf{C}_{n+1}^i = \mathbf{C}_{n+2}^{i+1}$ qui termine l'enchaînement.

b) $(n+1) \mathbf{C}_n^i = (i+1) \left(\mathbf{C}_n^{i+1} + \mathbf{C}_n^i \right)$ se montre par calcul direct :

$$(i+1) \left(\mathbf{C}_n^{i+1} + \mathbf{C}_n^i \right) = \frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!} (i+1) + \frac{n!}{i!(n-i)!} (i+1) = \frac{n!}{i!} \left(\frac{1}{(n-i-1)!} + \frac{i+1}{(n-i)!} \right) = \frac{n!}{i!} \frac{n+1}{(n-i)!} = \mathbf{C}_n^i (n+1)$$

2° a) $B_{2,n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ se montre par récurrence sur n . Pour $n = 1$ on a bien $B_{2,1} = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$. En admettant, pour $n \geq 1$ quelconque, $B_{2,n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on déduit $B_{2,n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$.

b) $\left[\sum_{k=1}^n (k+1)^4 = \sum_{k=1}^n k^4 + 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n \right]$ pour tout n .

On en déduit $(n+1)^4 = 1 + 4B_{3,n} + 6B_{2,n} + 4B_{1,n} + B_{0,n}$ donc $B_{3,n} = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) = (B_{1,n})^2$.

3° Notons qu'à i fixé les valeurs de \mathbf{C}_n^i sont celles d'une fonction polynomiales en n de degré i .

a) Pour tout n , $n^1 = \sum_{i=1}^1 S_{i,1} \mathbf{C}_n^i = S_{1,1} \mathbf{C}_n^1 = S_{1,1} n$ donc $S_{1,1} = 1$.

Pour tout n , $n^2 = \sum_{i=1}^2 S_{i,2} \mathbf{C}_n^i = S_{1,2} \mathbf{C}_n^1 + S_{2,2} \mathbf{C}_n^2 = S_{1,2} n + S_{2,2} \frac{n(n-1)}{2}$ donc $S_{1,2} = 1$ et $S_{2,2} = 2$.

b) Pour tous n et p , $n^{p+1} = n^p(n+1)$. Or $n^p = \sum_{i=1}^p S_{i,p} \mathbf{C}_n^i$ et $n^{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} S_{i,p+1} \mathbf{C}_n^i$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p+1} S_{i,p+1} \mathbf{C}_n^i &= (n+1) \sum_{i=1}^p S_{i,p} \mathbf{C}_n^i - \sum_{i=1}^p S_{i,p} \mathbf{C}_n^i \\ &= \sum_{i=1}^p S_{i,p} (i+1) \mathbf{C}_n^{i+1} + \sum_{i=1}^p S_{i,p} (i+1) \mathbf{C}_n^i - \sum_{i=1}^p S_{i,p} \mathbf{C}_n^i \\ &= \sum_{i=1}^p S_{i,p} (i+1) \mathbf{C}_n^{i+1} + \sum_{i=1}^p S_{i,p} i \mathbf{C}_n^i \\ &= \sum_{i=2}^{p+1} S_{i-1,p} i \mathbf{C}_n^i + \sum_{i=1}^p S_{i,p} i \mathbf{C}_n^i \end{aligned}$$

On en déduit par identification des degrés $p+1$, $S_{p+1,p+1} = (p+1)S_{p,p}$; pour les degrés 1, $S_{1,p+1} = S_{1,p}$, et pour le degré i , $1 < i < p+1$, $S_{i,p+1} = i(S_{i,p} + S_{i-1,p})$.

c) D'où une relation de type "triangle" :

i	1	2	3	4	
p	1				
1	1				
2	1	2			
3	1	6	6		
4	1	14	36	24	

pour la lecture des $S_{i,p}$.

4° a) On a alors $B_{p,n} = \sum_{k=1}^n k^p = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^p S_{i,p} \mathbf{C}_k^i \right) = \sum_{i=1}^p S_{i,p} \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{C}_k^i \right) = \sum_{i=1}^p S_{i,p} \mathbf{C}_{n+1}^{i+1}$.

b) Dans le cas $p = 3$, on a

$$\begin{aligned} B_{3,n} &= \sum_{i=1}^3 S_{i,3} \mathbf{C}_{n+1}^{i+1} = S_{1,3} \mathbf{C}_{n+1}^2 + S_{2,3} \mathbf{C}_{n+1}^3 + S_{3,3} \mathbf{C}_{n+1}^4 \\ &= 1 \cdot \frac{(n+1)n}{2} + 6 \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + 6 \cdot \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} \\ &= (n+1)n \frac{n^2+n}{4} \end{aligned}$$

$$\theta \in]0, \pi[\text{ fixé. Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sin n\theta}{n} \quad A_n = \sum_{k=1}^n \sin k\theta \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

1° a) Pour $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} A_n &= \sum_{k=1}^n \sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{2} \left(\cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \theta - \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \theta \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right). \end{aligned}$$

b) On a alors $|A_n \sin \frac{\theta}{2}| \leq 1$ donc $|A_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$ pour $n \geq 1$.

2° a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} A_{n+k} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \right) + \frac{A_{n+p}}{n+p} - \frac{A_n}{n+1} &= \sum_{k=1}^p \frac{A_{n+k}}{n+k} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{A_{n+k}}{n+k+1} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{A_{n+k} - A_{n+k-1}}{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{\sin(n+k)\theta}{n+k}. \end{aligned}$$

b) Alors, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^p \frac{\sin(n+k)\theta}{n+k} \right| &\leq \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k}| \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \right) + \frac{|A_{n+p}|}{n+p} + \frac{|A_n|}{n+1} \\ &\leq \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \left[\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \right) + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} \right] \\ &\leq \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} \right] \leq \frac{M}{n} \end{aligned}$$

$$\text{avec } M = \frac{2}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

3° a) L'inégalité précédente s'écrit $|S_{n+p} - S_n| \leq \frac{M}{n}$ pour n et p quelconques. Ainsi toutes les valeurs de $(S_n)_n$ sont dans l'intervalle ouvert de centre S_1 et de rayon M . La suite $(S_n)_n$ est bornée.

b) On pose, pour tout $n \geq 1$, $\alpha_n = \sup\{S_m / m \geq n\}$. On a $\alpha_n \in [S_1 - M, S_1 + M]$ pour tout n , $(\alpha_n)_n$ est bornée. $(\alpha_n)_n$ est clairement décroissante ; elle est alors convergente. (on notera s sa limite).

c) Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de $(\alpha_n)_n$ donne l'existence d'un entier N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$, $|\alpha_n - s| < \varepsilon$. De plus, pour n fixé, $\alpha_n - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{S_m / m \geq n\}$ et il existe donc $q > n$ tel que $\alpha_n - \varepsilon < S_q \leq \alpha_n$. Rappelons que pour $q > n$, $|S_q - S_n| \leq \frac{M}{n}$ et donc $|S_q - S_n| < \varepsilon$ pour $n > \frac{M}{\varepsilon}$.

Ainsi, pour $N > \max(N_1, \frac{M}{\varepsilon})$, on a pour tout $n \geq N$

$$\cdot |\alpha_n - s| < \varepsilon$$

$$\cdot \text{l'existence d'un } q > n \text{ tel que } |S_q - \alpha_n| < \varepsilon \text{ et } |S_n - S_q| < \varepsilon.$$

d) Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ donné, on a l'existence d'un N tel que pour $n > N$, $|S_n - s| < 3\varepsilon : (S_n)_n$ converge vers s .

F I N
