

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les représentations de \mathbb{R}^2 se feront avec 3cm pour unité graphique.

à titre de préliminaire

$$\text{Soit } g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\frac{t^2}{t^2-1}, \frac{t^3}{t^2-1} \right) \end{cases}$$

- 1° Préciser le point $g(2)$. Donner $\vec{g}'(2)$.
- 2° Etablir conjointement les tableaux de variation des composantes g_1 et g_2 de g .
- 3° Donner un développement limité de g en 0 à l'ordre 3.

la courbe

$$\text{Soit } \mathcal{C} \text{ la courbe de } \mathbb{R}^2 \text{ de représentation paramétrique } \begin{cases} x &= \frac{t^2}{t^2-1} \\ y &= \frac{t^3}{t^2-1} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- 1° Donner un vecteur directeur u de la tangente à \mathcal{C} au point A de paramètre 2.
- 2° Justifier que \mathcal{C} contient un point stationnaire et étudier localement les propriétés de \mathcal{C} au voisinage de ce point ; en préciser la nature.
- 3° Faire l'étude des branches infinies de \mathcal{C} et dans les cas où il existe une droite asymptote, étudier la position de \mathcal{C} par rapport à cette droite.
- 4° Tracer \mathcal{C} et ses éléments caractéristiques qu'on peut déduire des études précédentes.

le graphe

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x(x^2 - y^2) + y^2 \end{cases} \quad \text{On définit } G = \{(x, y) / f(x, y) = 0\}.$$

- 1° a) Etablir : $\forall t \, f(g(t)) = 0$.
 b) Prouver : $A = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right) \in G$
 c) Donner le gradient de f en A . Justifier que ce vecteur est orthogonal à u . Cette propriété se généralise-t-elle ?
- 2° a) Justifier que G définit implicitement au voisinage de A une fonction numérique de la variable réelle, qu'on désignera désormais par φ .
 b) Montrer que φ peut être définie sur $I =]1, +\infty[$, et que φ est de classe C^∞ sur cet intervalle.

implicitement

φ est désormais l'application de $I =]1, +\infty[$ dans \mathbb{R} ayant pour graphe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1 \text{ et } f(x, y) = 0\}$.

1° a) Pour $x > 1$, donner une expression de $\varphi'(x)$ en fonction de x et $\varphi(x)$.

b) Préciser la valeur de $\varphi'(\frac{4}{3})$.

c) Donner un développement limité de φ en $\frac{4}{3}$ à l'ordre 2.

2° a) Montrer que φ est solution de l'équation différentielle $2(1-x)yy' - y^2 + 3x^2 = 0$. (on ne demande pas de résoudre cette équation).

b) En déduire que $\psi = \varphi^2$ est solution de l'équation $z'(1-x) - z + 3x^2 = 0$. (dont la résolution est guidée dans la suite).

explicitement

Soient les équations différentielles $(e) : (1-x)z' = z - 3x^2$ et $(e') : (1-x)z' = z$.

1° Donner les solutions de (e') définies sur $I =]1, +\infty[$.

2° Caractériser puis trouver les fonctions h telles que $\left[x \mapsto \frac{h(x)}{x-1} \right]$ soit solution de (e) sur I .

3° a) Justifier : $\forall x \in I \varphi(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

b) Vérifier la conformité de la valeur calculée ici de $\varphi'(\frac{4}{3})$ avec celles trouvées dans les parties précédentes.

F I N
