

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**lectures quantifiées**

(3 points)

Soit $f : E \longrightarrow F$. Que peut-on déduire de chacune des huit affirmations suivantes ?

- | | |
|--|--|
| a) $\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad f(x) = y.$ | b) $\forall x \in E \quad \exists y \in F \text{ t.q. } f(x) = y.$ |
| c) $\exists x \in E \text{ t.q. } \forall y \in F \quad f(x) = y.$ | d) $\exists x \in E \text{ t.q. } \exists y \in F \text{ t.q. } f(x) = y.$ |
| e) $\forall y \in F \quad \forall x \in E \quad f(x) = y.$ | f) $\forall y \in F \quad \exists x \in E \text{ t.q. } f(x) = y.$ |
| g) $\exists y \in F \text{ t.q. } \forall x \in E \quad f(x) = y.$ | h) $\exists y \in F \text{ t.q. } \exists x \in E \text{ t.q. } f(x) = y.$ |

EXERCICE 2**lectures ordonnées**

(3 points)

$E = \mathcal{F}([0; 1], \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . On définit sur E la relation \preceq par :

$$f \preceq g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in [0; 1], \quad f(x) \leq g(x)$$

- (Re)Démontrer que \preceq est une relation d'ordre sur E .
- Cet ordre est-il total ?
- Pour $f \in E$ quelconque, comparer les deux phrases : « f est majorée » et « $\{f\}$ est majoré ».
- $F = \{f_i / i \in \mathbb{N}\}$ est une partie de E majorée. Montrer que F admet une borne supérieure.

EXERCICE 3

(6 points)

On rappelle la relation : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}$.

1° Soit l'équation différentielle

$$(\arctan x) y' - \frac{1}{1+x^2} y = (\arctan x)^2 \quad (\mathbf{E})$$

- Résoudre l'équation **(E)** sur les intervalles $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$.
- Dégager des conditions nécessaires sur les restrictions à $]0; +\infty[$ puis à $]-\infty; 0[$ d'une solution de **(E)** sur \mathbb{R} .
- Déduire les solutions de **(E)** sur \mathbb{R} qui s'annulent en 1.

2° Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_a : [x \mapsto f_a(x) = (x+a) \arctan x]$. On note \mathcal{C}_a la courbe représentant la fonction f_a dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) De quelle façon la courbe \mathcal{C}_{-a} se déduit-elle de la courbe \mathcal{C}_a ?

Dans toute la suite, on suppose $a \geq 0$.

b) Calculer f'_a et f''_a . Montrer que, pour tout a , l'équation $f'_a(x) = 0$ admet une solution et une seule. Étudier les variations de f_a .

c) Pour $a > 0$, déterminer les asymptotes de \mathcal{C}_a et la position locale de \mathcal{C}_a par rapport à ses asymptotes.

d) Construire \mathcal{C}_1 (on ne demande pas de calculer explicitement les coordonnées du sommet).

PROBLÈME

divergence complexe

(8 points)

On se propose d'étudier, dans deux cas de condition initiale u_0 , la suite $(u_n)_n$ satisfaisant la relation de récurrence

$$\forall n, \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n$$

u_0 **réel**

1° a) Montrer que si $u_0 \in [-\frac{1}{4}; 0]$ alors $(u_n)_n$ converge de limite 0, et que si $u_0 > 0$ alors $(u_n)_n$ diverge de limite $+\infty$.

b) Que se passe-t-il pour $u_0 < -\frac{1}{4}$?

2° Vitesse de convergence pour $u_0 \in]-1; 0[$.

a) Montrer que, pour tout $n > 0$, on a $-\frac{1}{n+1} < u_n < 0$.

b) Montrer que la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = n u_n$ pour tout n , est décroissante.

c) Établir que $(v_n)_n$ converge. Montrer sa limite ℓ appartient à $[-1; 0[$.

3° On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$ pour tout n , ce qui définit la suite $(w_n)_n$.

a) Vérifier que $(w_n)_n$ converge vers $\ell(1 + \ell)$.

b) Dans l'hypothèse $\ell > -1$, montrer l'existence d'un réel $\lambda < 0$ et d'un entier N tels que $w_n < \lambda$ pour $n \geq N$. En déduire qu'alors on a $\lim_n v_n = -\infty$.

c) Déduire $\ell = -1$ de ce qui précède.

u_0 **complexe**, $|u_0| \geq 2$

1° a) Établir que pour z un complexe vérifiant $|z| \geq 2$, on a $|1 + z| \geq 1$, l'égalité n'étant vérifiée que pour $z = -2$.

b) En déduire, puisque $|u_0| \geq 2$, $|u_n| > 2$ pour tout $n \geq 2$.

2° On pose $\varepsilon = |u_2| - 2$.

a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $|u_{n+1}| \geq (1 + \varepsilon) |u_n|$.

b) Conclure quant au comportement asymptotique de $(u_n)_n$.

F I N
