

1 EXERCICE

CORRIGÉ

On désigne par \mathcal{E} et \mathcal{L} les courbes respectives des fonctions \exp et \ln dans un même repère du plan.

1° Soit $a \in \mathbb{R}$.

Le point de \mathcal{E} d'abscisse a a pour ordonnée e^a . La tangente à \mathcal{E} en ce point a pour coefficient directeur e^a . D'où (s) :

$$\begin{cases} e^a = m \cdot a + p \\ e^a = m \end{cases}.$$

Ainsi $\varphi : [m \mapsto m(1 - \ln m)]$.

2° Soit $a > 0$.

Le point de \mathcal{L} d'abscisse a a pour ordonnée $\ln a$. La tangente à \mathcal{L} en ce point a pour coefficient directeur $\frac{1}{a}$. D'où (s) :

$$\begin{cases} \ln a = m \cdot a + p \\ \frac{1}{a} = m \end{cases}.$$

Ainsi $\psi : [m \mapsto -1 - \ln m]$.

3° La droite $\Delta : y = mx + p$ est tangente à \mathcal{E} et \mathcal{L} si et seulement si $\begin{cases} p = \varphi(m) \\ p = \psi(m) \end{cases}$.

Une condition nécessaire est $\psi(m) = \varphi(m)$ i.e. $\ln m = \frac{m+1}{m-1}$

Soit $g : \left[m \mapsto \ln m - \frac{m+1}{m-1} \right]$. On a, pour $m > 0$, $m \neq 1$, $g'(m) = -\frac{1+m^2}{m(m-1)^2}$ d'où

m	0	1	$+\infty$
$g'(m)$	+		+
g	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Pour des raisons faciles à rédiger, g s'annule en deux réels exactement. Il y a donc deux tangentes communes à \mathcal{E} et \mathcal{L} .

De $g\left(\frac{1}{m}\right) = -g(m)$ pour tout $m > 0$, on tire que les deux tangentes communes à \mathcal{E} et \mathcal{L} ont des coefficients directeurs inverses.

2 EXERCICE

CORRIGÉ

Dans $\mathbb{C}(X)$, $F = \frac{1}{1+X+X^2}$.

1° $1+X+X^2$ a pour racines j et j^2 qui sont des pôles simples de F . d'où $F < 0$ donc F s'écrit $F = \frac{a}{X-j} + \frac{b}{X-j^2}$ On trouve $a = -b = \frac{-i}{\sqrt{3}}$.

2° Une récurrence évidente donne $F^{(n)} = c_n \left(\frac{1}{(X-j)^{n+1}} - \frac{1}{(X-j^2)^{n+1}} \right)$ avec $c_n = (-1)^n n!$ $a = (-1)^{n+1} \frac{i n!}{\sqrt{3}}$.

3° $n \in \mathbb{N}$

a) D'une part, $\frac{1}{(X-j)^{n+1}} - \frac{1}{(X-j^2)^{n+1}} = \frac{(X-j^2)^{n+1} - (X-j)^{n+1}}{(1+X+X^2)^{n+1}}$ donc $F^{(n)} = \frac{P_n}{(1+X+X^2)^{n+1}}$ où $P_n = c_n((X-j^2)^{n+1} - (X-j)^{n+1})$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

D'autre part, à partir de $F = \frac{1}{1+X+X^2}$, une récurrence évidente permet d'établir que P_n est à coefficients réels entiers.

b) $P_0 = 1 \quad P_1 = -1 - 2X \quad P_2 = 6X(1+X)$

c) Dans le développement de $P_n = c_n((X-j^2)^{n+1} - (X-j)^{n+1})$ sous la forme $P_n = b_0 + b_1X + \dots + b_{n+1}X^{n+1}$, il vient $b_{n+1} = 0$ et $b_n = c_n((n+1)(-j^2) - (n+1)(-j)) = (n+1)c_n(j-j^2) = (-1)^n (n+1)! \neq 0$

D'où P_n de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n (n+1)!$.

4° a) Pour z complexe, $\min_{x \in \mathbb{R}} |z - x| = 2|\operatorname{Im}(z)|$

b) Alors, pour x dans \mathbb{R} et n quelconque,

$$\begin{aligned} \frac{|F^{(n)}(x)|}{n!} &= \frac{1}{n!} \left| c_n \left(\frac{1}{(X-j)^{n+1}} - \frac{1}{(X-j^2)^{n+1}} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{n!} |c_n| \left(\left| \frac{1}{(X-j)^{n+1}} \right| + \left| \frac{1}{(X-j^2)^{n+1}} \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{n!} |c_n| \left(\frac{1}{(\operatorname{Im}(j))^{n+1}} + \frac{1}{(\operatorname{Im}(j^2))^{n+1}} \right) \\ &\leq \frac{2^{n+2}}{\sqrt{3}^{n+2}} \end{aligned}$$

D'où $\frac{|F^{(n)}(x)|}{n!} \leq \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n$.

5° $n > 0$. Nous avons $P_n = c_n((X-j^2)^{n+1} - (X-j)^{n+1})$. Donc les racines de P_n sont les complexes z tels que (e) : $(z-j^2)^{n+1} = (z-j)^{n+1}$. j n'étant pas solution, (e) $\iff \frac{z-j^2}{z-j}$ est une racine $(n+1)^{\text{ème}}$ de l'unité.

Les racines de P_n sont les $\frac{j^2 - e^{\frac{ik2\pi}{n+1}}}{j - e^{\frac{ik2\pi}{n+1}}}$ où $k \in \{1, \dots, n\}$.

3 EXERCICE

CORRIGÉ

1° Dans $\mathbb{C}[X]$ $F = \frac{3X^4 + 4X^3 - 5X^2 + 1}{X^2 + X - 2} = 3X^2 + X + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+2}$

2° Dans $\mathbb{C}[X]$ la fraction $F = \frac{2X^3 - 7X^2 + 9X - 1}{X(X-1)^3}$

$d^\circ(F) < 0$ donc F est égale à sa partie fractionnaire. Son dénominateur est scindé, donc F est la somme de ses parties polaires.

a) 0 est pôle simple de F , la partie polaire relative à 0 est donc $\frac{a}{X}$ avec $a = \frac{A(0)}{(0-1)^3}$, A le numérateur de F . C'est donc $G = \frac{1}{X}$

b) $H = F - G = \frac{X^2 - 4X + 6}{(X-1)^3}$ donc $H(X+1) = \frac{X^2 - 2X + 3}{X^3}$.

c) On a donc $H(X+1) = \frac{1}{X} - \frac{2}{X^2} + \frac{3}{X^3}$ donc $H = \frac{1}{X-1} - \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{3}{(X-1)^3}$ et pour finir $F = \frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} - \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{3}{(X-1)^3}$

3° Pour $x \geq 0$, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^{7/8}$ donc $\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx = \frac{8}{15}$

4° On pose $f : [x \mapsto \sqrt{1+x} \ln x]$, et $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.

Une primitive de f sur \mathcal{D}_f est par exemple $F : \left[x \mapsto \int_1^x \sqrt{1+t} \ln t dt \right]$

Pour $x > 0$ $F(x) = \left[\frac{2}{3} \sqrt{1+t}^3 \ln t \right]_1^x - \frac{2}{3} \int_1^x \frac{\sqrt{1+t}^3}{t} dt$

Or, avec le changement de variable obtenu en composant par $\varphi : [t \mapsto t^2 - 1]$, on a $\int_1^x \frac{\sqrt{1+t}^3}{t} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} \frac{t^3}{t^2 - 1} dt$

De $\frac{X^3}{X^2 - 1} = X + \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/2}{X+1}$ on tire $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} \frac{t^3}{t^2 - 1} dt = \left[\ln t + \ln \sqrt{(t^2 - 1)} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}}$ ce qui termine la résolution.

4 PROBLÈME

CORRIGÉ

Partie A

$I = \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$ et f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1° $f(x) = 1 - 2x + \frac{8}{3}x^2 + o(x^2)$ donne un développement limité d'ordre 2 de f en 0.

2° a) f est continue et dérivable en 0 puisqu'elle y admet au moins une DL_1 . Les théorèmes généraux donnent facilement par ailleurs que f est C^∞ sur $\left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$ et $]0, +\infty[$.

b) Le DL en 0 fournit $f'(0) = -2$. Pour $x \neq 0$, $x \in I$ on a $f'(x) = \frac{2}{x(1+2x)} - \frac{\ln(1+2x)}{x^2}$ qui se développe en 0 :

$f'(x) = \frac{2}{x}(1 - 2x + o(x)) - \frac{1}{x^2} \left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \right) = -2 + o(1)$ qui donne la continuité de f' en 0.

c) Sans indétermination, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = +\infty$

Pour $x \neq 0$, $x \in I$ on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}g(x)$ avec g définie sur I par : $g(x) = \ln(1+2x) - \frac{2x}{1+2x}$

g est C^∞ sur I et pour $x \in I$ on a $g'(x) = \frac{4x}{(1+2x)^2}$. D'où

x	$-1/2$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
g		\searrow	\nearrow
		0	

On tire ainsi f décroissante sur I :

x	$-1/2$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	1	-1

d) On rédige alors tout naturellement l'existence et l'unicité de α de I qui annule f . De $f(1) > 0 > f(2)$ on tire $1 < \alpha < 2$.

Partie B

On note g la fonction $[x \mapsto \ln(1 + 2x)]$ et on définit la suite $(u_n)_n$ par la donnée de $u_0 \in]0, \alpha]$ et la relation : $\forall n \ u_{n+1} = g(u_n)$.

1° Pour $x > 0$, on a $\ln(1 + 2x) > 0$. Ceci assure $\mathcal{D}_u = \mathbb{N}$.

2° a) g est croissante sur $]0, \alpha]$ et $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(\alpha) = \alpha \end{cases}$ donc pour $x \in]0, \alpha]$ on a $g(x) \in]0, \alpha]$. D'où $\forall n \ u_n \in]0, \alpha]$.

b) Pour $0 < x < \alpha$, on a $0 < f(x)$ donc $\ln(1 + 2x) > x$, qui assure que $(u_n)_n$ est croissante.

c) $(u_n)_n$ est croissante et majorée par α et donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $0 < \ell \leq \alpha$.

d) Puisque g est continue en ℓ , on a $g(\ell) = \ell$, donc $f(\ell) = 0$ donc $\ell = \alpha$.

3° $u_0 = 1$.

a) Pour $x \in \mathcal{D}_g$ on a $g'(x) = \frac{2}{1+2x}$. g' est décroissante sur $x \in [1, \alpha]$. Donc pour $x \in [1, \alpha]$ $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

Le théorème de l'inégalité des accroissements finis appliqué à g sur $[1, \alpha]$ donne $|g(x) - g(y)| \leq \frac{2}{3}|x - y|$ pour tout $x \in [1, \alpha]$.

Ayant $(u_n)_n$ croissante et $u_0 = 1$, on a $\forall n \ u_n \in [1, \alpha]$.

Ainsi $\forall n \ |g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$ et donc $\forall n \ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.

Une récurrence évidente initialisée à $|u_0 - \alpha| \leq 1$ donne $\forall n \ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) u_n approche donc α à moins de 10^{-4} dès que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-4}$ donc pour $n \geq \frac{4}{\log 3 - \log 2}$.

Partie C

F est la primitive de f sur I nulle en 0.

1° F dérivable sur I de dérivée f . Le signe de f est connu, on en déduit les variations de F .

2° $F'(0) = f(0) = 1$ donc $F(x) \underset{0}{\sim} x$.

3° $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -1$ donc il existe A tel que $F'(t) = f(t) \leq -\frac{1}{2}$ pour $t > A$.

Pour $x > A$ le théorème des accroissements finis donne donc $F(x) - F(A) \leq -\frac{1}{2}(x - A)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$.

4° a) $J = \left] -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right]$.

Sur J $\left[t \mapsto \ln(1+2t) + \frac{1}{\sqrt{1+2t}} \right]$ se dérive en $\left[t \mapsto \frac{\sqrt{1+2t}-1}{\sqrt{1+2t}^3} \right]$ et admet donc un minimum en 0. Ainsi, pour $t \in \left] -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right]$, $\ln(1+2t) \geq \frac{-1}{\sqrt{1+2t}}$.

D'où, pour $t \in J$, $\frac{\ln(1+2t)}{t} \leq \frac{-1}{t\sqrt{1+2t}} \leq \frac{4}{\sqrt{1+2t}}$ et donc $f(t) \leq \frac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1$.

b) Pour $x \in J$, $F(x) - F\left(\frac{-1}{4}\right) = \int_{-1/4}^x f(t) dt$.

Le théorème de croissance de l'intégrale donne $F(x) - F\left(\frac{-1}{4}\right) \geq \int_{-1/4}^x \left(\frac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1 \right) dt = [4\sqrt{1+2t} - t]_{-1/4}^x$ donc

$F(x) - F\left(\frac{-1}{4}\right)$ est minoré sur J .

$F' = f$ et $f > 0$ sur J donc F croissante sur J . Etant minorée sur J , F admet une limite réelle en $-\frac{1}{2}$ à droite, (cette limite est $\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6}$), et est donc prolongeable par continuité en $-\frac{1}{2}$ à droite.

F I N
