

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(8 points)

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et E_2 désigne son sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1° Soit Φ de E dans E qui à tout polynôme P de E fait correspondre le polynôme $\Phi(P) = (2X - 1)P - (X^2 + \frac{1}{2})P'$.

- a)** Montrer que Φ est linéaire.
- b)** Pour tout P de E déterminer le degré de $\Phi(P)$.
- c)** Montrer que Φ est injective. Donner son noyau.
- d)** Φ est-elle surjective ?
- e)** Résoudre dans E l'équation $\Phi(P) = 1$, d'inconnue P .

2° Soit φ de E_2 dans E_2 qui à tout polynôme P de E_2 fait correspondre le polynôme $\varphi(P) = (2X - 1)P - (X^2 + \frac{1}{2})P'$.

- a)** Donner l'ensemble de définition de φ .
- b)** Donner $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$.
- c)** Montrer que φ est un automorphisme de E_2 .

3° a) Montrer que $A = \{P \in E_2 / \varphi(P) = -P\}$ est un sous-espace vectoriel de E_2 stable par φ .

- b)** On note $Q = \varphi(X)$. Exprimer $\varphi(Q)$ comme une combinaison linéaire de X et Q .
- c)** En déduire que $B = \text{Vect}(\{X, Q\})$ est stable par φ .
- d)** Etablir que A et B sont supplémentaires dans E_2 .
- e)** Montrer que φ et la projection π de E_2 sur A dans la direction B commutent (i.e. $\varphi \circ \pi = \pi \circ \varphi$).

PROBLÈME

(12 points)

On notera de la même façon les polynômes et les fonctions polynomiales associées. On prendra aussi $\forall z \in \mathbb{C}, \varnothing = 1$ par convention.

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + \frac{1}{z} \end{cases}$$

1° a) Montrer que f est surjective.

b) f est-elle injective ?

c) Donner l'image directe F de U par f , où $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

d) Montrer $f^{-1}\langle F \rangle = U$.

e) Soit $D = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < 1\}$. Montrer que $g : \begin{cases} D & \rightarrow & \mathbb{C} \setminus F \\ z & \mapsto & z + \frac{1}{z} \end{cases}$ est une bijection.

2° a) Montrer que pour tout entier naturel n il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad f(z^n) = P_n(f(z))$$

ces polynômes vérifiant : $\forall n, P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$.

b) Donner explicitement P_0, P_1, P_2 et P_3 .

c) Déterminer le degré de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Etudier la parité de P_n .

3° a) Pour n fixé dans \mathbb{N}^* , trouver dans \mathbb{C} les racines de P_n .

b) Vérifier que P_n admet n racines réelles distinctes.

(ces racines seront notées, dans l'ordre décroissant, $r_{n,0}, r_{n,1} \dots r_{n,n-1}$)

c) Pour $p \geq 2$ et $0 \leq k \leq (p-2)$, montrer $r_{p,k} > r_{p-1,k} > r_{p,k+1}$.

4° Pour $b \in \mathbb{C}$ et $n > 2$ fixés, on note (e_n) l'équation dans $\mathbb{C} : P_n(z) = b$.

a) Dans le cas où b n'est pas réel, montrer que (e_n) admet n solutions distinctes.

b) Dans le cas b réel et $-2 \leq b \leq 2$, exprimer les solutions de (e_n) en fonction de $\theta = \arccos \frac{b}{2}$.

F I N

les barèmes sont donnés à titre indicatif et ne sont pas contractuels.