

**1 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE**

CORRIGÉ

Pour  $f$  définie et de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , on note  $(c)$  la condition :  $\forall x > 0 \quad f' \left( \frac{1}{x} \right) = f(x)$ .

**1° a )** Si  $f$  satisfait la condition  $(c)$ , alors  $\forall x > 0 \quad f'(x) = f \left( \frac{1}{x} \right)$  donc  $f' = f \circ i$  sur  $]0, +\infty[$ , avec  $i$  la fonction inverse.  $i$  étant de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ , on obtient  $f'$  de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , et donc  $f$  de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$ . Par récurrence immédiate, on tire que  $f$  est nécessairement de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

**b )** Pour  $f$  satisfaisant la condition  $(c)$ ,  $f$  est nécessairement de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$  et

$$\forall x > 0 \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2} f' \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{-1}{x^2} f(x)$$

et donc  $f$  est solution sur  $]0, +\infty[$  de l'équation différentielle linéaire  $(e) : x^2 y'' + y = 0$ .

**2°** On pose  $g = f \circ \exp$  (i.e.  $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = f(e^t)$ ).

**a )**  $\exp$  étant de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ , et bijective de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$  si et seulement si  $g$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $f$  deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$ ,  $f$  est solution de  $(e)$  sur  $]0, +\infty[$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad x^2 f''(x) + f(x) &= 0 \\ \forall t \quad g''(t) - g'(t) + g(t) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est solution de  $(e)$  sur  $]0, +\infty[$  si et seulement si  $g$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(\epsilon) : y'' - y' + y = 0$ .

**b )**  $(\epsilon)$  étant homogène, les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $(\epsilon)$  sont les  $\left[ t \mapsto e^{t/2} \left( \alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right]$  où  $\alpha$  et  $\beta$  réels quelconques.

Ainsi les solutions de  $(e)$  sur  $]0, +\infty[$  sont les  $\left[ t \mapsto \sqrt{x} \left( \alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right]$  où  $\alpha$  et  $\beta$  réels quelconques.

**3°** Posons :  $f : \left[ x \mapsto \sqrt{x} \left( \alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right]$  condition nécessaire pour vérifier la condition  $(c)$ .

$$\text{Alors } \forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left( \alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \sqrt{x} \left( -\alpha \frac{\sqrt{3}}{2x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \beta \frac{\sqrt{3}}{2x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right)$$

Et  $f$  vérifie la condition  $(c)$  impose  $\forall x > 0 \quad f'(x) = f \left( \frac{1}{x} \right)$  donc  $\alpha = \sqrt{3} \beta$ .

Les fonctions de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  satisfaisant  $(c)$  sont donc les  $\left[ x \mapsto k \sqrt{x} \left( \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right]$ , où  $k \in \mathbb{R}$ .

## Partie A

On note  $F$  l'ensemble des fonctions définies et continues sur  $[0, \pi]$  et  $F_\infty$  le sous-ensemble de ses fonctions de classe  $C^\infty$ .  $E_2$  désigne l'ensemble des fonctions définies et de classe  $C^2$  sur  $[0, \pi]$ , nulles en 0 et en  $\pi$ . Enfin  $E_\infty$  est le sous-ensemble de  $E_2$  de ses fonctions de classe  $C^\infty$ .

**1°**  $E_2$ , avec les lois habituelles, est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et  $E_\infty$  en est bien sûr un sous-espace vectoriel. (se placer comme sous-espace de l'ensemble des fonctions définies sur  $[0, \pi]$ ).

**2°** On note  $D : \begin{cases} E_2 & \rightarrow & F \\ f & \mapsto & f'' \end{cases}$

**a)** Pour  $f$  de classe  $C^2$  sur  $[0, \pi]$ , on a  $f''$  continue sur  $[0, \pi]$ . Donc pour  $f \in E_2$ , on a  $f'' \in F$ . Donc  $\mathcal{D}_D = E_2$ . La linéarité de  $D$  est celle de la dérivation.

**b)** Soit  $f \in E_2$ .  $f''$  nulle sur  $[0, \pi]$  impose  $f'$  constante sur  $[0, \pi]$  et donc  $f$  affine sur  $[0, \pi]$ . Enfin  $f(0) = f(\pi) = 0$  impose  $f$  nulle sur  $[0, \pi]$ . D'où  $\text{Ker } D = \{0\}$ .

Soit  $f \in F$ .  $f$  est continue sur  $[0, \pi]$  donc admet au moins une primitive sur  $[0, \pi]$ . Soit  $\phi$  l'une d'elles.  $\phi$  est elle-même continue sur  $[0, \pi]$ . On pose  $k = \int_0^\pi \phi$  puis  $\psi : \left[ x \mapsto \int_0^x \left( \phi(t) - \frac{k}{\pi} \right) dt \right]$ . On a bien sûr  $\psi$  de classe  $C^2$  sur  $[0, \pi]$  et  $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ , donc  $\psi \in E_2$ . Ainsi  $\text{Im } D = F$ .

**3° a)** Soit  $f \in E_2$  et  $(f, f'')$  liée.  $f = 0$  donne  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $[0, \pi]$ .

$f \neq 0$  donne  $f'' = \lambda f$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; alors, sur  $[0, \pi]$ ,  $f$  de classe  $C^2$  donne  $f''$  de classe  $C^2$  donc  $f$  de classe  $C^4$ , et ainsi de suite. Une récurrence évidente donne  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $[0, \pi]$ .

Ainsi  $(f, f'')$  impose  $f \in E_\infty$ .

**b)** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  on pose  $\varphi_k : [t \mapsto \sin kt]$ . Alors  $\varphi_k'' : [t \mapsto -k^2 \sin kt]$  et donc  $(\varphi_k, \varphi_k'')$  est liée.

**c)** Soit  $\Delta : \begin{cases} E_\infty & \rightarrow & F_\infty \\ f & \mapsto & D(f) \end{cases}$ . Pour  $f \in E_\infty$ ,  $f''$  est bien sûr aussi de classe  $C^\infty$  sur  $[0, \pi]$  et donc  $D(f) \in F_\infty$ . D'où

$\mathcal{D}_\Delta = F_\infty$ . La linéarité de  $\Delta$  est celle de  $D$ . Ainsi  $\Delta$  est une application linéaire.

**d)** 0 n'est pas valeur propre de  $\Delta$  puisque  $\text{Ker } \Delta = \text{Ker } D = \{0\}$ .

$f$  vecteur propre de  $\Delta$  associé à la valeur propre  $\delta \neq 0$  impose  $f'' = \delta f$  et  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $[0, \pi]$ . Donc impose  $f$  solution sur  $[0, \pi]$  de l'équation différentielle  $(h) : y'' - \delta y = 0$ .

Pour  $\delta > 0$  les solutions de  $(h)$  sur  $[0, \pi]$  sont les  $[x \mapsto k.e^{\sqrt{\delta}x}]$ . Une telle fonction n'est nulle en 0 que pour  $k = 0$ . Il n'y a donc pas de valeur propre de  $\Delta$  positive.

Pour  $\delta < 0$  les solutions de  $(h)$  sur  $[0, \pi]$  sont les  $[x \mapsto a.\cos \sqrt{-\delta}x + b.\sin \sqrt{-\delta}x]$ . Une telle fonction nulle en 0 impose  $a = 0$  et nulle en  $\pi$  avec  $b \neq 0$  impose  $\sqrt{-\delta}\pi$  multiple de  $\pi$ , donc  $\delta = -p^2$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Réciproquement, on sait déjà  $\varphi_p$  vecteur propre de  $\Delta$ , associé à  $-p^2$ , lorsque  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Au total, les valeurs propres de  $\Delta$  sont les  $-p^2$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ . Les vecteurs propres associés à  $-p^2$  sont les  $[x \mapsto b.\sin px]$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Les sous-espaces propres sont ainsi les  $\text{Vect}(\varphi_k)$  où  $k \in \mathbb{N}^*$ , chacun de dimension 1.

## Partie B

On s'intéresse à la fonction  $\gamma : [x \mapsto x^4 - 2\pi x^3 + \pi^2 x^2]$  définie sur  $[0, \pi]$ .

**1°**  $\gamma$  fonction polynômiale donc de classe  $C^\infty$  sur  $[0, \pi]$ .  $\gamma(0) = \gamma(\pi) = 0$  donc  $\gamma$  appartient à  $E_\infty$ .

**2°** Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^\pi \gamma(t) \sin kt \, dt = d_k$ . Par intégrations par parties successives, on tire  $d_k = 2 \frac{12 - k^2\pi^2 + (-1)^k(k^2\pi^2 - 12)}{k^5}$   
c'est-à-dire  $d_k = 0$  pour  $k$  pair, et  $d_k = 4 \frac{12 - k^2\pi^2}{k^5}$  pour  $k$  impair.

## Partie C

On pose, pour  $f$  et  $g$  dans  $E_2$ ,  $S(f, g) = \int_0^\pi f(t) g(t) \, dt$ .

**1° a)**  $S$  est facilement une forme bilinéaire symétrique définie sur  $E_2$ .

Pour  $f \in E_2$ , on a  $S(f, f) = \int_0^\pi f^2(t) \, dt$ , donc  $S(f, f) \geq 0$  puisque  $f^2 \geq 0$  sur  $[0, \pi]$ .

Enfin,  $S(f, f) = 0$  impose  $f^2$  nulle sur  $[0, \pi]$  puisque  $f^2$  est continue à valeurs positives ou nulles sur le segment  $[0, \pi]$ , et donc  $f$  nulle.

On a donc  $S$  forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $E_2$ , et donc  $S$  est un produit scalaire sur  $E_2$ . (on notera ainsi désormais  $(f|f) = S(f, f)$  et  $\|f\| = \sqrt{S(f, f)}$ ).

**b)** Pour  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on a  $\int_0^\pi \varphi_\lambda(t) \varphi_\mu(t) \, dt = \int_0^\pi -\frac{1}{2}(\cos(\lambda + \mu)t - \cos(\lambda - \mu)t) \, dt = 0$ .

Donc la famille  $\mathcal{F} = (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une famille orthogonale de  $E_2$ .

**c)** Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $a_k = \|\varphi_k\| = \sqrt{\int_0^\pi \sin^2 kt \, dt} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

**2°** On note  $G$  le sous-espace vectoriel de  $E_2$  engendré par  $\mathcal{F}$ .

**a)**  $\mathcal{F}$  est ainsi génératrice de  $G$ , mais est aussi une famille libre puisqu'orthogonale. Elle est une base orthogonale de  $G$ . En la normant, on tire  $\left(\frac{1}{a_k} \cdot \varphi_k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une base orthonormale de  $G$ .

**b)** Le projeté orthogonal de  $\gamma$  sur le sous-espace de  $G : \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  est  $g$ , combinaison linéaire de  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ . Or  $\left(\frac{1}{a_1} \cdot \varphi_1, \frac{1}{a_2} \cdot \varphi_2, \frac{1}{a_3} \cdot \varphi_3\right)$  est une base orthonormale de  $\text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ , et donc

$$\begin{aligned} g &= \left(g \left| \frac{1}{a_1} \cdot \varphi_1 \right.\right) \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \varphi_1 + \left(g \left| \frac{1}{a_2} \cdot \varphi_2 \right.\right) \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \varphi_2 + \left(g \left| \frac{1}{a_3} \cdot \varphi_3 \right.\right) \cdot \frac{1}{a_3} \cdot \varphi_3 \\ &= \left(\gamma \left| \frac{1}{a_1} \cdot \varphi_1 \right.\right) \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \varphi_1 + \left(\gamma \left| \frac{1}{a_2} \cdot \varphi_2 \right.\right) \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \varphi_2 + \left(\gamma \left| \frac{1}{a_3} \cdot \varphi_3 \right.\right) \cdot \frac{1}{a_3} \cdot \varphi_3 \\ &= \frac{2}{\pi} ((\gamma|\varphi_1) \cdot \varphi_1 + (\gamma|\varphi_2) \cdot \varphi_2 + (\gamma|\varphi_3) \cdot \varphi_3) \\ &= \left(\frac{96}{\pi} - 8\pi\right) \varphi_1 + \left(\frac{32}{81\pi} - \frac{8}{27}\pi\right) \varphi_3 \end{aligned}$$

Ainsi  $g : \left[ x \mapsto \left(\frac{96}{\pi} - 8\pi\right) \sin x + \left(\frac{32}{81\pi} - \frac{8}{27}\pi\right) \sin 3x \right]$ .

**c)** On montre en fait que le projeté orthogonal de tout élément de  $E_\infty$  sur  $G$  est lui-même, c'est à dire que  $G = E_\infty$ .

F I N