

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**EXERCICE 1****groupe diédral**

( 9 points)

1°  $ABC$  est un triangle équilatéral du plan euclidien  $\mathcal{P}$ . Son centre est  $\Omega$ , ses côtés sont de longueur 1. On s'intéresse aux isométries<sup>1</sup> laissant globalement invariant le triangle  $ABC$  (on entend par triangle  $ABC$  la réunion des trois segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$ ). Elles forment l'ensemble  $Is$ .

- Justifier que  $(Is, \circ)$  est un groupe.
- Montrer que tout élément de  $Is$  laisse l'ensemble  $\{A, B, C\}$  invariant.
- Montrer que l'image par un élément de  $Is$  du segment  $[AB]$  est l'un des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  ou  $[CA]$ .
- En déduire que  $Is$  est en bijection avec l'ensemble des bijections de  $\{A, B, C\}$  sur lui-même.
- En déduire que  $Is$  est fini ; donner son cardinal.
- Dresser la table de Pythagore de la loi  $\circ$  de  $Is$ .

2°  $(D, *)$  désigne un groupe ; son neutre est  $e$ . Il est dit un groupe diédral d'ordre 3 parce qu'il existe dans  $D$  deux éléments  $x$  et  $y$  vérifiant  $x \neq e$ ,  $y^2 \neq e$ ,  $x^2 = y^3 = (x * y)^2 = e$  tels que tous les éléments de  $D$  puissent être obtenus comme des produits d'éléments  $x$  et  $y$  (comme  $x * y * y * x * y * x$ ,  $y * x * x * y * x * y * x * y$ , ...).

- Montrer que  $(D, *)$  est isomorphe au groupe des isométries du plan laissant globalement invariant un triangle équilatéral.
- Justifier que l'ensemble  $D$  est fini et donner son cardinal.
- Faire l'inventaire de tous les sous-groupes de  $(D, *)$ .

**EXERCICE 2****pas si complexe ...**

( 3 points)

L'équation dans  $\mathbb{C}$  :  $(e) : z^3 + (6 - 2i)z^2 + (10 + 4i)z + 16 + 4i = 0$  admet une solution imaginaire pure. Résoudre  $(e)$ .

<sup>1</sup>une isométrie du plan  $\mathcal{P}$  est une application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  telle que la distance des images de deux points quelconques est égale à la distance des antécédents.

**EXERCICE 3****suite convergente ... encore**

( 8 points)

Soit la suite  $(u_n)_n$  définie par :  $u_0 > 0$  et  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$  pour tout  $n$ .

1° a) Montrer que la suite  $(u_n)_n$  converge vers 0.

b) Établir, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n - u_n^2 + o(u_n^2)$ .

c) En déduire que la suite  $(w_n)_n$ , de terme général  $w_n = \left( \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) - 1$  pour tout  $n$ , converge vers 0.

2° On pose, pour tout  $n \geq 1$ ,  $v_n = \frac{w_1 + \dots + w_n}{n}$ .

a) Pour  $N \geq 1$  et  $n > N$ , établir  $|v_n| \leq \frac{1}{n} |w_1 + \dots + w_N| + \frac{1}{n} (|w_{N+1}| + \dots + |w_n|)$ .

b) Établir alors que  $(v_n)_n$  converge de limite 0. (ce résultat est le "lemme de Césaro").

c) Donner alors  $\lim_n \frac{1}{n \cdot u_n}$ .

d) En déduire un équivalent simple de  $u_n$ .

---

F I N

---

On rappelle quelques comportements de base en 0.

$$\begin{array}{llll}
 \ln(1+x) & = & x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n & +o(x^n) \\
 \exp x & = & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n & +o(x^n) \\
 \sin x & = & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} & +o(x^{2n+2}) \\
 \cos x & = & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} & +o(x^{2n+1}) \\
 \operatorname{sh} x & = & x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} & +o(x^{2n+2}) \\
 \operatorname{ch} x & = & 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} & +o(x^{2n+1}) \\
 (1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha \times \dots (\alpha-n+1)}{n!}x^n & +o(x^n)
 \end{array}$$