

1 EXERCICE

CORRIGÉ

1° Premier modèle de propagation : $u_0 = \frac{1}{N}$ et $\forall n, \quad u_{n+1} - u_n = C \Delta (1 - u_n)$

2° ? Pour α réel on a $\forall n, \quad u_{n+1} - \alpha = (1 - C \Delta) (u_n - \alpha) + C \Delta (1 - \alpha)$. Ainsi la suite $(u_n - 1)_n$ est géométrique, de raison $(1 - C \Delta)$.

3° ? On en déduit $\forall n, \quad u_n - 1 = (1 - C \Delta)^n (u_0 - 1)$ donc $\forall n, \quad u_n = 1 - \frac{N-1}{N} (1 - C \Delta)^n$

4° ? Puisque $0 < \Delta < \frac{1}{C}$ on a $0 < 1 - C \Delta < 1$ et donc $\lim_n (1 - C \Delta)^n = 0$. Ainsi $(u_n)_n$ converge et $\lim_n u_n = 1$: la population entière finit par partager l'information.

5° ? Pour $0 \leq \delta < 1$ on a

$$\begin{aligned} u_n \geq \delta &\iff \frac{N-1}{N} (1 - C \Delta)^n \leq 1 - \delta \\ &\iff n \geq \frac{\log \frac{N}{N-1} (1 - \delta)}{\log(1 - C \Delta)} \end{aligned}$$

application numérique : on prend $N = 6000$, $\Delta = 1$ heure, $C = 0,029$. Pour $\delta = 50\%$, On trouve $u_n \geq \delta$ dès que $n \geq 24$. Pour $\delta = 99\%$, on trouve $u_n \geq \delta$ dès que $n \geq 157$.

6° Deuxième modèle de propagation : $u_0 = \frac{1}{N}$ et $\forall n, \quad u_{n+1} - u_n = C \Delta u_n (1 - u_n)$.

7° ? Soit $h : [x \mapsto (1 + C \Delta) x - C \Delta x^2]$. h est une fonction trinôme et atteint son maximum en $m = \frac{1 + C \Delta}{2 C \Delta}$. Or $C \Delta < 1$ donc $m > 1$. Ainsi h est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{N}, 1\right]$: pour $\frac{1}{N} \leq x < 1$, on a $\frac{1}{N} + \frac{(N-1) C \Delta}{N^2} \leq h(x) < 1$ donc $\frac{1}{N} \leq h(x) < 1$.

À partir de $u_0 = \frac{1}{N}$, une récurrence évidente amène alors à $\forall n, \quad \frac{1}{N} \leq u_n < 1$.

8° ? $(u_n)_n$ est donc bornée. On a de plus, pour n quelconque, $\frac{1}{N} \leq u_n < 1$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. $(u_n)_n$ est croissante et majorée, elle converge.

9° ? Soit ℓ sa limite. $(u_n)_n$ est croissante donc $\ell \geq \frac{1}{N}$. De la relation $\forall n, \quad u_{n+1} = u_n + C \Delta u_n (1 - u_n)$ on tire $\ell = \ell + C \Delta \ell (1 - \ell)$, donc $\ell = 1$.

10° ? application numérique : on prend $N = 6000$, $\Delta = 1$ heure, $C = 0,029$. On trouve $u_{24} \simeq 0,00033$.

Partie A

$(y_n)_n$ est une suite de réels positifs ou nuls.

1° Soit $\lambda > 0$. Pour tout n , $y_n - \lambda = (\sqrt{y_n} + \sqrt{\lambda})(\sqrt{y_n} - \sqrt{\lambda})$.

Ainsi, puisque $\sqrt{\lambda} > 0$ $|\sqrt{y_n} - \sqrt{\lambda}| = \frac{|y_n - \lambda|}{\sqrt{y_n} + \sqrt{\lambda}} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} |y_n - \lambda|$.

2° Considérons $(y_n)_n$ convergente de limite ℓ . On a $\ell \geq 0$.

Dans le cas $\ell = 0$: pour $\epsilon > 0$, on a $\sqrt{y_n} < \epsilon$ dès que $|y_n| < \epsilon^2$, ce qui se produit à coup sûr à partir d'un certain rang. Ainsi $(\sqrt{y_n})_n$ est convergente de limite $0 = \sqrt{\ell}$.

Dans le cas $\ell > 0$: pour $\epsilon > 0$, de $|\sqrt{y_n} - \sqrt{\ell}| \leq \frac{1}{\sqrt{\ell}} |y_n - \ell|$ on tire $|\sqrt{y_n} - \sqrt{\ell}| < \epsilon$ dès que $|y_n - \ell| < \sqrt{\ell} \epsilon$, ce qui se produit à coup sûr à partir d'un certain rang. Ainsi $(\sqrt{y_n})_n$ est convergente de limite $0 = \sqrt{\ell}$.

Partie B

On dit qu'une suite $(X_n)_n$ vérifie la propriété (P) si et seulement si $\forall n$, $X_{n+2} = \frac{1}{3}(X_{n+1} + X_n)$.

1° a) On considère deux suites, $(r_n)_n$ et $(s_n)_n$, vérifiant la propriété (P). On pose $t_n = r_n + s_n$ pour tout n .

Pour n quelconque on a $t_{n+2} = r_{n+2} + s_{n+2} = \frac{1}{3}(r_{n+1} + r_n) + \frac{1}{3}(s_{n+1} + s_n) = \frac{1}{3}(t_{n+1} + t_n)$. Ainsi la suite $(r_n + s_n)_n$ vérifie aussi la propriété (P).

2° ? On considère une suite $(r_n)_n$ vérifiant la propriété (P) et un réel μ quelconque. On pose $t_n = \mu r_n$ pour tout n . Pour n quelconque on a $t_{n+2} = \mu r_{n+2} = \mu \frac{1}{3}(r_{n+1} + r_n) = \frac{1}{3}(t_{n+1} + t_n)$. Ainsi la suite $(\mu r_n)_n$ vérifie aussi la propriété (P).

3° a) La suite nulle vérifie (P). Soit une suite géométrique non nulle de raison q . Cette suite vérifie (P) si et seulement si $q^{n+2} = \frac{1}{3}(q^{n+1} + q^n)$ pour tout n . Ayant q non nul, la suite vérifie (P) si et seulement si $q^2 = \frac{1}{3}(q + 1)$.

Les suites géométriques non nulles vérifiant la propriété (P) sont celles de raison $\frac{1 + \sqrt{13}}{6}$ ou $\frac{1 - \sqrt{13}}{6}$.

4° ? Ayant $0 < \frac{1 + \sqrt{13}}{6} < 1$ et $-1 < \frac{1 - \sqrt{13}}{6} < 0$, on déduit que les suites géométriques vérifiant (P) convergent de limite 0.

5° Soit $(x_n)_n$ une suite quelconque vérifiant la propriété (P). On pose $q = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$ et $q' = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$.

6° ? Comme $q \neq q'$, le système $\begin{cases} x_0 = \alpha + \beta \\ x_1 = \alpha q + \beta q' \end{cases}$ d'inconnue (α, β) a un déterminant non nul donc une solution unique.

Soit (α, β) cette solution.

7° ? On a $\begin{cases} x_0 = \alpha + \beta \\ x_1 = \alpha q + \beta q' \end{cases}$ Pour p quelconque, supposons $\begin{cases} x_p = \alpha q^p + \beta q'^p \\ x_{p+1} = \alpha q^{p+1} + \beta q'^{p+1} \end{cases}$

Alors $x_{p+2} = \frac{1}{3}(x_{p+1} + x_p) = \alpha \left[\frac{1}{3}(q^{p+1} + q^p) \right] + \beta \left[\frac{1}{3}(q'^{p+1} + q'^p) \right] = \alpha q^{p+2} + \beta q'^{p+2}$.

Le théorème de récurrence donne alors : $\forall n$, $\alpha q^n + \beta q'^n = x_n$.

8° ? Puisque $\lim_n q^n = \lim_n q'^n = 0$, on a que la suite $(x_n)_n$ converge vers 0.

Partie C

Soient deux réels $a \geq 1$ et $b \geq 1$. On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et la relation $\forall n, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$.

1° a) Une récurrence évidente amène à u_n est défini pour tout n , et $u_n \geq 1$.

2° ? Dans l'hypothèse où $(u_n)_n$ converge de limite ℓ , on a donc $\ell \geq 1$. De plus toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge de limite ℓ et la première partie donne $\ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell}$. Donc la seule limite possible de la suite $(u_n)_n$ est 4.

3° On pose $\forall n, v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$ ce qui définit la suite $(v_n)_n$.

4° ? Pour n quelconque,

$$2(2 + v_{n+2})v_{n+2} = 2\sqrt{u_{n+2}} - 4 + \frac{1}{2}u_{n+2} - 2\sqrt{u_{n+2}} + 2 = \frac{1}{2}u_{n+2} - 2 = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 = v_{n+1} + v_n$$

De plus $u_{n+2} \geq 1$, donc $v_{n+2} > -2$. Ainsi $v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.

5° ? Soit n quelconque. De $u_{n+2} \geq 1$ on tire plus précisément $v_{n+2} \geq -\frac{1}{2}$ donc $2(2 + v_{n+2}) \geq 3$.

Ainsi $|v_{n+2}| = \frac{|v_{n+1} + v_n|}{2(2 + v_{n+2})} \leq \frac{|v_{n+1}| + |v_n|}{2(2 + v_{n+2})} \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|)$.

6° On pose $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et $\forall n, x_{n+2} = \frac{1}{3}(x_{n+1} + x_n)$ ce qui définit la suite $(x_n)_n$.

7° ? Ayant $x_0 \leq |v_0|$ et $x_1 \leq |v_1|$, de $\forall n, |v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|)$ on tire $\forall n, |v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(x_{n+1} + x_n)$ par récurrence évidente, donc $\forall n, |v_n| \leq x_n$

8° ? $(x_n)_n$ converge vers 0 comme toute suite vérifiant la propriété (P) et par comparaison, $(v_n)_n$ converge vers 0.

9° ? Puisque $\forall n, u_n = (1 + 2v_n)^2$, la suite $(u_n)_n$ converge et sa limite est 4.

F I N
