

I.S.E.P.

CYCLE PRÉPARATOIRE

MATH.SUP. 2

2001 - 2002

Devoir 06

MATHÉMATIQUES

11 février 2002

durée 3 heures 30

calculatrice non autorisée

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

Gauss, incontournable classique

(6 points)

Les grecs savaient les nombres premiers en quantité infinie, et déjà avait supputé leur raréfaction quand on avance dans \mathbb{N} . Notons, pour x réel, $x \geq 2$, $\pi(x)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x ¹. À la fin du XVIII^e siècle, Gauss énonce deux conjectures² sur la répartition asymptotique des nombres premiers³,

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{\ln x} = G(x) \qquad \pi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \text{Li}(x) = \int_k^x \frac{dt}{\ln t}$$

(Li est la fonction *logarithme intégral* qui peut être définie comme fonction intégrale de $\frac{1}{\ln}$ nulle en k , $k \in]1, 2]$).

Cet exercice se propose de montrer l'équivalence de ces deux descriptions.

- Montrer que Li a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
- Justifier que G et Li sont dérivables sur $[2, +\infty[$ et en donner les fonctions dérivées.
- Montrer $\text{Li}'(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} G'(x)$.
- Pour $\varepsilon > 0$, établir l'existence d'un réel A tel que, pour $x > A$, on ait $0 < \text{Li}'(x) - G'(x) < \varepsilon \text{Li}'(x)$.
- En déduire $\text{Li}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} G(x)$.

EXERCICE 2

Wallis, grand classique

(6 points)

Pour tout entier n de \mathbb{N} on définit l'intégrale de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$.

- Montrer que la suite $(W_n)_n$ est décroissante.
 - Établir, grâce à une intégration par parties, la relation de récurrence $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ pour tout n .
- En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_n$ est constante. Quelle est la valeur prise par cette suite ?
 - Montrer $W_n \sim W_{n-2}$ puis $W_n \sim W_{n-1}$.

¹ainsi $\pi(20) = 8$, $\pi(30) = 10$

²la seconde est bien meilleure : pour $x = 10^{14}$, $G(x)$ approche $\pi(x) = 3204941750802$ à 3, 2% et $\text{Li}(x)$ approche à 0, 00001% près

³démontrée à la toute fin du XIX^e siècle par Charles-Jean de La Vallée Poussin

c) Établir la convergence de la suite $(W_n)_n$ vers 0.

d) Donner un équivalent simple de W_n quand n tend vers l'∞.

3° a) Justifier la formule $W_{2p+1} = \frac{2.4. \dots (2p)}{3.5. \dots (2p+1)} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$

b) Exprimer de la même façon W_{2p} à l'aide de factorielles.

c) Dédire de ce qui précède la *formule de Wallis* :

$$\lim_p \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)! \sqrt{p}} = \sqrt{\pi}$$

EXERCICE 3

fonction à partir d'une intégrale

(8 points)

On définit les fonctions de la variable réelle :

$$\varphi : \left[x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt \right] \quad \text{et} \quad F : \left[x \mapsto e^{-x^2} \varphi(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \right]$$

1° Généralités.

a) Étudier la parité de F .

b) Donner le signe de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c) Prouver : $\forall x > 0, x.e^{-x^2} \leq F(x) \leq x$

2° Étude locale en $+\infty$.

a) A l'aide de deux intégrations par parties, établir, pour $x > 1$:

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$$

b) Montrer que la fonction $h : \left[t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^2} \right]$ est croissante sur $[1, +\infty[$.

c) En déduire pour $x > 1$: $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$

d) Établir : $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

e) En déduire : $\int_1^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$

f) Donner un équivalent simple de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$ puis justifier $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

3° Variations de F .

a) Établir que φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , puis donner, pour x réel, $\varphi'(x)$.

b) Établir que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et donner $F'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Justifier que F est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$ i.e. vérifie : $\forall x \quad F'(x) + 2x F(x) = 1$.

- c)** Prouver que sur $[0, +\infty[$ F admet un extremum au moins, en un réel qui sera noté a .
- d)** Montrer $F(a) = \frac{1}{2a}$. En déduire l'unicité du point de $[0, +\infty[$ où F atteint un extremum.
- e)** Dresser le tableau complet des variations de F , avec toutes les justifications.

F I N
