

1 QCM

CORRIGÉ

1° Soient A, B et C des parties d'un ensemble E .

a) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

b) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

c) De $A \Delta B = A \Delta C$ on peut déduire $B = C$.

d) De $A \setminus B = (A \cup C) \setminus B$ on peut déduire $A \cap C \subset B$

a	b	c	d
V	V	V	F

2° L'assertion \mathcal{A} est définie pour x dans \mathbb{R} : " $\sqrt{4 - x^2} \geq 1 - x$ "

a) Pour \mathcal{A} , " $x \leq 2$ " est nécessaire

b) Pour \mathcal{A} , " $x > 1$ " est suffisant

c) Pour \mathcal{A} , " $x \in [-2, 2]$ et $x \geq \frac{1 - \sqrt{7}}{2}$ " est suffisant

d) Pour \mathcal{A} , " $4 - x^2 \geq x^2 - 2x + 1$ " est suffisant

a	b	c	d
V	V	V	V

3° Ordre dans \mathbb{R} et inégalités remarquables

a) Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si les deux réels sont positifs ou nuls.

b) L'inégalité triangulaire donne : " $|a - b| \geq |a| - |b|$ pour tous réels a et b "

c) L'inégalité de Schwarz s'écrit : $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$

d) L'inégalité de Minkowski s'écrit : $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \right) + \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)$

a	b	c	d
F	V	F	V

4° Soit la partie de \mathbb{R} , $E = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$

- a) E est fini
- b) E admet $\sqrt{2} + 1$ pour majorant
- c) E admet une borne supérieure
- d) l'ensemble des minorants de E admet une borne supérieure

a	b	c	d
F	V	V	V

5° Soit la fonction f de E dans F

- a) E est l'ensemble de définition de f
- b) si A et B sont des parties de E , alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- c) si $\text{Im}(f) = F$ et $\mathcal{D}_f = E$ alors f est bijective
- d) si f est surjective, alors $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toute partie A de E

a	b	c	d
F	F	F	F

6° Définitions et caractérisations :

- a) " $\forall A \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n n > N \Rightarrow u_n \geq A$ " si et seulement si $\lim_n u_n = +\infty$
- b) " $\exists A \in \mathbb{R} \forall N \in \mathbb{N} \exists n n > N$ et $u_n \geq A$ " si et seulement si $\lim_n u_n \neq +\infty$
- c) " $\exists A \in \mathbb{R} \forall N \in \mathbb{N} \exists n n > N$ et $u_n \geq A$ " si et seulement si $(u_n)_n$ non majorée
- d) " $\forall A \in \mathbb{R} \forall N \in \mathbb{N} \exists n n > N$ et $u_n \geq A$ " si et seulement si $(u_n)_n$ non majorée

a	b	c	d
V	F	F	V

7° propriétés :

- a) Si $(u_n)_n$ converge, alors $(|u_n|)_n$ converge.
- b) $(u_n)_n$ est monotone si et seulement si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ le sont aussi.
- c) Si $(u_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ est monotone à partir d'un certain rang.
- d) Toute suite divergente est non monotone ou non bornée.

a	b	c	d
V	F	F	V

8° Etude de suites de réels :

- a) $(u_n)_n$ où $\forall n u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}}}}$ est croissante.
- b) $(u_n)_n$ où $\forall n u_n = \frac{\sin n}{2^n}$ converge.
- c) $(u_n)_n$ où $\forall n u_n = \frac{\sqrt{n} - (-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ est non bornée.
- d) $(u_n)_n$ où $\forall n u_n = \sqrt{2n-3} - \sqrt{n+1}$ a pour limite $+\infty$.

a	b	c	d
V	V	F	V

9° Soit la suite : $(u_n)_n$ telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \ u_{n+1} = 2 + \ln u_n \end{cases}$

a) $(u_n)_n$ est définie sur \mathbb{N} .

b) $(u_n)_n$ est croissante.

c) $(u_n)_n$ est bornée

d) $(u_n)_n$ est convergente.

a	b	c	d
V	V	V	V

9° justifications :

a) De la propriété $\forall x \ x \geq 1 \Rightarrow \ln x \geq 0$ on déduit par récurrence évidente que la suite est définie sur \mathbb{N} et $\forall n \ u_n \geq 1$

b) La fonction $\varphi : [x \mapsto 2 + \ln x]$ est croissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi, pour tout n , si $u_{n+1} \geq u_n$ alors $\varphi(u_{n+1}) \geq \varphi(u_n)$, soit $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Or $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ donc $u_1 \geq u_0$. Le principe de récurrence prouve la croissance de la suite $(u_n)_n$.

c) La suite étant croissante, elle est minorée par u_0 .

La fonction $[x \mapsto 2 + \ln x - x]$ est définie et dérivable sur $[1, +\infty[$. Sa dérivée est $[x \mapsto \frac{1-x}{x}]$ donc la fonction est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Elle prend la valeur 1 en 1 et a pour limite $-\infty$ en $+\infty$. On déduit par le théorème de la bijection l'existence et l'unicité d'une solution α de l'équation $\varphi(x) = x$ sur $[1, +\infty[$.

On a ainsi $u_0 < \alpha$, et de $u_n < \alpha$ on déduit $\varphi(u_n) = u_{n+1} < \alpha$. Le principe de récurrence donne alors la majoration de $(u_n)_n$ par α .

d) La suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée, elle est donc convergente.

2 EXERCICE

CORRIGÉ

2° La suite $(u_n)_n$ est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \ u_{n+1} = u_n + \frac{1+u_n}{1+2u_n} \end{cases}$

a) Une récurrence évidente basée sur : $\frac{1+x}{1+2x} > 0$ pour $x > 0$ donne immédiatement : la suite $(u_n)_n$ est croissante.

b) La suite $(u_n)_n$ est non bornée. Si elle l'était, elle serait convergente. Sa limite ℓ serait positive ou nulle. ℓ serait aussi la limite de la suite extraite $(u_{n+1})_n$; par les théorèmes sur les opérations sur les limites, cette dernière devrait s'exprimer $\ell + \frac{1+\ell}{1+2\ell}$.

La contradiction vient de l'absence de solution dans $[0, +\infty[$ à l'équation $x + \frac{1+x}{1+2x} = x$

F I N