

1

CORRIGÉ

$$1^\circ \text{ a) } f(x) = \frac{(\cos x - 1) \tan 2x}{(x^3 - 3x^2)} \underset{0}{\sim} \frac{(-\frac{x^2}{2}) 2x}{-3x^2} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x} \text{ donc } f\left(\frac{\pi}{3} + t\right) = \frac{-\sin 3t}{1 - \cos t + \sqrt{3} \sin t} \underset{0}{\sim} \frac{-3t}{\sqrt{3}t} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \pi/3} f(x) = -\sqrt{3}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{e^{(x^2-x)} - 1}{3x^3 - 2x^2 - x} = \frac{e^{(x^2-x)} - 1}{x^2 - x} \frac{1}{3x + 1} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x(1 + \cos x) - 2 \tan x}{\tan x + \sin x - 2x} = \frac{x(2 - \frac{x^2}{2}) - 2(x + \frac{x^3}{3}) + o_0(x^3)}{(x + \frac{x^3}{3}) + (x - \frac{x^3}{6}) - 2x + o_0(x^3)} \underset{0}{\sim} \frac{-7x^3/6}{x^3/6} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -7.$$

$$2^\circ \text{ a) } f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -2x - \frac{2}{3}x^3 + o_0(x^4)$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{3}(2 \sin x + \tan x) = x + \frac{1}{20}x^5 + o_0(x^6)$$

$$\text{c) } f(x) = \ln(e^x + 1) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o_0(x^2)$$

$$\text{d) } f(x) = (x^2 + 3x - 2)e^x = -2 + x + 3x^2 + \frac{13}{6}x^3 + o_0(x^3)$$

2

CORRIGÉ

1° $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E sur E . La composée de deux bijections de E sur E est une bijection de E sur E donc \circ est une loi de composition interne de $\mathfrak{S}(E)$.

- \circ est associative comme dans toutes les configurations de composition.

- id_E est une bijection de E sur E ; c'est le neutre de $\mathfrak{S}(E)$ pour \circ .

- Chaque bijection de E sur E admet une bijection réciproque qui est son élément symétrique pour \circ dans $\mathfrak{S}(E)$.

Ainsi $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un groupe.

2° $T = \{1, 2, 3\}$. L'ensemble $\mathfrak{S}(T)$ a six éléments :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$(\mathfrak{S}(T), \circ)$ est un groupe (question précédente) et sa table opératoire est :

\circ	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	σ_6	σ_4	σ_5
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	σ_5	σ_6	σ_4
σ_4	σ_4	σ_5	σ_6	σ_1	σ_2	σ_3
σ_5	σ_5	σ_6	σ_4	σ_3	σ_1	σ_2
σ_6	σ_6	σ_4	σ_5	σ_2	σ_3	σ_1

3° $G = \{id, inv, e, f, g, h\}$ où :

$$id : \left[x \mapsto x \right] \quad inv : \left[x \mapsto \frac{1}{x} \right] \quad e : \left[x \mapsto 1 - x \right] \quad f : \left[x \mapsto \frac{1}{1 - x} \right] \quad g : \left[x \mapsto 1 - \frac{1}{x} \right] \quad h : \left[x \mapsto \frac{x}{x - 1} \right]$$

a) La table opératoire de \circ sur G prouve exhaustivement qu'il s'agit d'une loi de composition interne :

\circ	id	inv	e	f	g	h
id	id	inv	e	f	g	h
inv	inv	id	f	e	h	g
e	e	g	id	h	inv	f
f	f	h	inv	g	id	e
g	g	e	h	id	f	inv
h	h	f	g	inv	e	id

\circ est ainsi une loi de composition interne de G .

- \circ est associative comme dans toutes les configurations de composition.

- id est manifestement le neutre de G pour \circ .

- Chaque élément de G admet un élément symétrique pour \circ dans G : $inv^{-1} = inv$, $e^{-1} = e$, $f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$ et $h^{-1} = h$.

Ainsi (G, \circ) est un groupe. (on peut éventuellement se servir de $G \subset \mathfrak{S}(D)$).

b) Ce groupe est manifestement non abélien puisque $e \circ inv \neq inv \circ e$: $(e \circ inv)(1/2) = g(1/2) = -1$ et $(inv \circ e)(1/2) = f(1/2) = 2$.

c) Le choix d'un candidat isomorphisme est guidé par les conditions nécessaires d'image du neutre et d'images des symétriques. Soit $\Phi : \mathfrak{S}(T) \longrightarrow G$ bijective, telle que

$$\Phi(\sigma_1) = id \quad \Phi(\sigma_2) = f \quad \Phi(\sigma_3) = g \quad \Phi(\sigma_4) = inv \quad \Phi(\sigma_5) = e \quad \Phi(\sigma_6) = h$$

On vérifie alors à l'aide des tables des deux groupes que pour tous σ et σ' de $\mathfrak{S}(T)$ on a $\Phi(\sigma \circ \sigma') = \Phi(\sigma) \circ \Phi(\sigma')$. Ainsi Φ est un isomorphisme du groupe $(\mathfrak{S}(T), \circ)$ sur le groupe (G, \circ) : les deux groupes sont isomorphes.

3

CORRIGÉ

a, b et c dans \mathbb{N} , $0 \leq a + b \leq c$.

a) La formule du binôme de Newton permet de développer puis de ranger par puissances croissantes de x :

$$\begin{aligned} (1+x)^{a+b} &= \sum_{c=0}^{a+b} \binom{a+b}{c} x^c \\ (1+x)^a (1+x)^b &= \sum_{i=0}^a \binom{a}{i} x^i \sum_{j=0}^b \binom{b}{j} x^j = \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b \binom{a}{i} \binom{b}{j} x^{i+j} \\ &= \sum_{c=0}^{a+b} \sum_{k=0}^c \binom{a}{k} \binom{b}{c-k} x^c \end{aligned}$$

Ainsi pour tout c , on vérifie $\sum_{k=0}^c \binom{a}{k} \binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$.

b) E et F sont des ensembles disjoints de cardinaux respectifs a et b . La réunion $E \cup F$ est de cardinal $(a+b)$. Elle possède $\binom{a+b}{c}$ parties de c éléments.

Or une partie de $E \cup F$ de c éléments est constituée de k éléments de E et de $(c - k)$ éléments de F pour tous les k entre 0 et c .

Ainsi $\sum_{k=0}^c \binom{a}{k} \binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$.

c) La formule précédente en posant $a = q$, $b = n$ et $c = n - p$ donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-p} \binom{q}{k} \binom{n}{n-p-k} &= \binom{q+n}{n-p} \\ \sum_{k=0}^{n-p} \binom{q}{k} \binom{n}{p+k} &= \binom{n+q}{p+q} \\ \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \binom{n}{p+k} &= \binom{n+q}{p+q} \end{aligned}$$

puisque, dès que $k > q$ ou $k > (n - p)$ on a $\binom{q}{k} \binom{n}{p+k} = 0$.

4

CORRIGÉ

Pour n entier naturel non nul, on définit f_n sur \mathbb{R} par : $f_n : \left[x \mapsto x e^{-n x^2} \right]$.

a) Pour tout n , $f_n(0) = 0$ donc $\lim_n f_n(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $0 < e^{-x^2} < 1$ donc $\lim_n f_n(x) = \lim_n x (e^{-x^2})^n = 0$.

La suite $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} la fonction constante nulle φ .

b) Pour $n \geq 1$, f_n est impaire et dérivable sur \mathbb{R} et $f'_n(x) = (1 - 2n x^2) e^{-n x^2}$. D'où :

x	0	$1/\sqrt{2n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0 -
f_n	0	$1/\sqrt{2en}$	0

c) On a donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - \varphi(x)| = \frac{1}{\sqrt{2en}}$ et $\lim_n \frac{1}{\sqrt{2en}} = 0$ donc la convergence de $(f_n)_n$ vers φ sur \mathbb{R} est uniforme.

d) Par ailleurs, pour tout n , $f'_n(0) = 1$ donc $\lim_n f'_n(0) = 1$.

Pour $x \neq 0$, $0 < e^{-x^2} < 1$ donc $\lim_n f'_n(x) = \lim_n (1 - 2n x^2) (e^{-x^2})^n = 0$ par comparaison des suites géométriques et arithmétiques.

Ainsi la suite $(f'_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction ψ définie par $\psi(0) = 1$ et $\psi(x) = 0$ si $x \neq 0$.

ψ n'est pas dérivable sur \mathbb{R} .

F I N