

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(5 points)

Pour f définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, on note (c) la condition : $\forall x > 0 \quad f' \left(\frac{1}{x} \right) = f(x)$.

1° a) Montrer que si f satisfait la condition (c) , alors f est nécessairement de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que pour f satisfaisant la condition (c) , f est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle linéaire (e) : $x^2 y'' + y = 0$.

2° On pose $g = f \circ \exp$ (i.e. $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = f(e^t)$).

a) Montrer que f est solution de (e) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si g est solution sur \mathbb{R} d'une équation (ϵ) que l'on précisera.

b) Résoudre l'équation linéaire à coefficients constants (ϵ) .

3° En déduire les fonctions satisfaisant la condition (c) .

PROBLÈME

(15 points)

Partie A

On note F l'ensemble des fonctions définies et continues sur $[0, \pi]$ et F_∞ le sous-ensemble de ses fonctions de classe C^∞ . E_2 désigne l'ensemble des fonctions définies et de classe C^2 sur $[0, \pi]$, nulles en 0 et en π . Enfin E_∞ est le sous-ensemble de E_2 de ses fonctions de classe C^∞ .

1° Montrer que E_2 , avec les lois habituelles, est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et que E_∞ en est un sous-espace vectoriel.

2° On note $D : \begin{cases} E_2 & \rightarrow & F \\ f & \mapsto & f'' \end{cases}$

a) Justifier que D est une application linéaire.

b) En donner le noyau et l'image.

c) E_2 et F sont-ils isomorphes ?

3° a) Montrer que pour $f \in E_2$, (f, f'') liée impose $f \in E_\infty$.

b) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_k : [t \mapsto \sin kt]$ est telle que (φ_k, φ_k'') est liée.

c) Justifier que $\Delta : \begin{cases} E_\infty & \rightarrow & F_\infty \\ f & \mapsto & D(f) \end{cases}$ est une application linéaire.

d) Par abus on appellera vecteur propre de Δ les u non nuls de E_∞ tels que u et $\Delta(u)$ sont colinéaires. Trouver les valeurs propres de Δ , et la dimension de chaque sous-espace propre.

Partie B

On s'intéresse à la fonction $\gamma : [x \mapsto x^4 - 2\pi x^3 + \pi^2 x^2]$ définie sur $[0, \pi]$.

1° Montrer que γ appartient à E_∞ .

2° Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^\pi \gamma(t) \sin kt \, dt$.

Partie C

On pose, pour f et g dans E_2 , $S(f, g) = \int_0^\pi f(t) g(t) \, dt$.

1° a) Montrer que l'application S est un produit scalaire sur E_2 . (on notera ainsi désormais $(f|f) = S(f, g)$ et $\|f\| = \sqrt{S(f, f)}$).

b) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale de E_2 .

c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $a_k = \|\varphi_k\|$.

2° On note G le sous-espace vectoriel de E_2 engendré par \mathcal{F} .

a) Etablir que $\left(\frac{1}{a_k} \cdot \varphi_k \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une base orthonormale de G .

b) Donner le projeté orthogonal de γ sur le sous-espace de $G : \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

F I N
