

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PROBLÈME

d'Alembert & Gauss

(14 points)

préliminaire : des complexes pour Bolzano & Weierstrass

Soit $(z_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes. Pour tout n on note $\rho_n = \operatorname{Re}(z_n)$ et $\iota_n = \operatorname{Im}(z_n)$.

a) Montrer que les suites $(\rho_n)_n$ et $(\iota_n)_n$ sont des suites bornées de réels.

b) Justifier que de $(\iota_n)_n$ on peut extraire une suite $(\iota_{\varphi(n)})_n$ convergente.

c) Montrer que de $(\rho_{\varphi(n)})_n$ on peut extraire une suite convergente.

d) Proposer une suite de complexes, extraite de $(z_n)_n$, convergente. Ceci démontre la version du théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites de complexes :

Théorème 1 (Bolzano-Weierstrass). *De toute suite bornée de nombres complexes on peut extraire une suite convergente.*

pourquoi un minimum est atteint

On prend un polynôme A dans $\mathbb{C}[X]$ non constant. Alors $p = d^\circ A > 0$ et $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$.

1° a) Montrer que $M = \{|A(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$ admet dans \mathbb{R} une borne inférieure. On la note μ désormais.

b) Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_n$ de nombres complexes telle que $\lim_n |A(c_n)| = \mu$.

2° a) Avec $|z| = r$, justifier $|A(z)| \geq |a_p| r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k$. On note alors $P = |a_p| X^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| X^k$ dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Donner un équivalent simple de $P(x)$ en $+\infty$ puis sa limite. En déduire qu'il existe dans le plan complexe un disque D de centre 0 à l'extérieur duquel les complexes z vérifient $|A(z)| \geq \mu + 1$.

3° a) Montrer que $(c_n)_n$ est bornée.

b) En déduire qu'on peut en extraire une suite $(c_{\psi(n)})_n$ qui converge. On notera ζ la limite de cette suite.

c) Montrer la convergence de $(A(c_{\psi(n)}))_n$ puis $\lim_n A(c_{\psi(n)}) = A(\zeta)$.

d) En déduire $\mu \in M$

pourquoi ce minimum est nul

On suppose ici $\mu > 0$ et on pose $B = \frac{1}{A(\zeta)} A(X + \zeta)$.

1° a) Justifier $|B(z)| \geq 1$ pour tout z .

b) Donner le degré de B et montrer $B(0) = 1$.

On note q la valuation de $B - 1$ et on considère $B = 1 - \rho e^{-i\theta} X^q + \sum_{k=q+1}^p b_k X^k$ où $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$.

2° a) Pour $r > 0$, montrer $|B(r e^{i\theta/q})| \leq |1 - \rho r^q| + \sum_{k=q+1}^p |b_k| r^k$.

b) En déduire que pour $r \leq \sqrt[q]{1/\rho}$ on a $|B(r e^{i\theta/q})| - 1 \leq -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^p |b_k| r^k$.

c) Justifier l'existence d'un complexe z tel que $|B(z)| < 1$.

3° Conclure la démonstration du

Théorème 2 (d'Alembert-Gauss). *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.*

EXERCICE 2

produit anticommutatif

(6 points)

Pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on note $[P, Q] = P'Q - PQ'$.

1° On note $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] / \text{d}^\circ P \leq 2\}$.

a) Pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que $[P, Q]$ appartient à $\mathbb{R}_2[X]$ et déduire que la loi $[(P, Q) \mapsto [P, Q]]$ est une l.c.i. de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Pour chacune des propriétés énoncées, indiquer, en justifiant, si elle est vérifiée ou pas :

α) cette loi est commutative.

β) cette loi est associative.

γ) $\mathbb{R}_2[X]$ possède un élément neutre pour cette loi.

2° On fixe ici P dans $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que $Q \mapsto [P, Q]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) En déterminer le noyau.

3° a) Montrer que si deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ ont une racine commune, cette racine est racine au moins double de $[P, Q]$.

b) On suppose que $P = (X - x_1)(X - x_2)$, avec $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$; si l'on écrit $[P, Q]$ sous la forme $aX^2 + bX + c$, donner une expression simple de $b^2 - 4ac$ en fonction de $Q(x_1)$ et $Q(x_2)$.

(on pourra commencer par conjecturer le résultat en prenant successivement $Q = 1$ et Q ayant x_1 ou x_2 pour racine(s)).

4° Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{R}_2[X]$. On suppose que P a deux racines α et α' , que Q a deux racines β et β' et enfin que $\alpha < \alpha' < \beta < \beta'$.

Montrer que $[P, Q]$ a deux racines réelles distinctes. Les placer par rapport à $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$.