

I.S.E.P.

Cycle préparatoire

Math.Sup. 2

Devoir 8

Mathématiques

30 mars 1998

durée 3 heures 30

sans calculatrice

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

EXERCICE 1

(pas plus d'une heure dessus)

(maximum 6 points)

1° Soit $g : [\theta \mapsto \cos \theta + \theta \sin \theta]$.

a) Etudier les variations de g sur $]0, 3\pi[$.

b) Montrer que l'équation sur $]0, 3\pi[: g(\theta) = 0$ admet trois solutions. Elles seront notées a, b, c , avec $a < b < c$.

2° Soit $f : \left[\theta \mapsto \frac{\cos \theta}{\theta} \right]$. Etudier les variations de f sur $]0, 3\pi[$.

3° On note \mathcal{C} la courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$, $\theta \in]0, 3\pi[$ dans un repère polaire (O, \vec{v}) du plan euclidien orienté.

a) Faire l'étude complète de la branche infinie de \mathcal{C} .

b) Préciser les points de \mathcal{C} appartenant à l'axe polaire et, en chacun d'eux, la tangente à \mathcal{C} .

c) Montrer que ces tangentes sont concourantes.

d) Représenter \mathcal{C} . On aura soin de justifier en détail toute propriété remarquable qui n'aurait pas encore été envisagée. (on pourra prendre $a \simeq 2,8$ $b \simeq 6,1$ $c \simeq 9,3$).

EXERCICE 2

(minimum 14 points)

E note le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique (i.e. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$).

On note, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A

1° Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1} . (on fera apparaître clairement les calculs et la méthode employée).

2° a) Calculer A^2 et A^3 .

b) Montrer que A , A^2 et A^3 se mettent sous la forme

$$A = \lambda_1.A + \mu_1.I \quad A^2 = \lambda_2.A + \mu_2.I \quad A^3 = \lambda_3.A + \mu_3.I$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ sont des réels que l'on précisera.

3° On définit la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ par
$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \\ \forall n \geq 1 \quad \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n \end{cases}$$

Montrer, par récurrence sur n , $\forall n \geq 2 \quad A^n = \alpha_n.A + 2\alpha_{n-1}.I$

4° a) Démontrer que, pour $n \geq 1$, $\alpha_n = (-1)^n.\sigma + 2^n.\tau$, où σ et τ sont deux réels indépendants de n que l'on déterminera.

b) En déduire une expression de A^n en fonction de n pour tout entier n positif.

Partie B

id est l'endomorphisme identité de E et φ est l'endomorphisme de E dont la matrice est A dans la base \mathcal{B} .

1° a) On pose $F = \text{Ker}(\varphi + id)$ et $G = \text{Ker}(\varphi - 2id)$. Rappeler pourquoi F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E .

b) Donner les dimensions de F et G .

c) Montrer que F et G sont supplémentaires.

d) Justifier que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$, avec $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (1, -1, 0)$ et $f_3 = (1, 1, 1)$, est une base de E formée de vecteurs de F et G .

2° a) Donner la matrice D de φ dans la base \mathcal{C} .

b) Donner la matrice P de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} .

c) Rappeler pourquoi P est inversible et donner son inverse P^{-1} .

d) Montrer que pour tout entier n positif on a $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

e) En déduire la valeur de A^n en fonction de n .

Partie C

1° a) Calculer $(A + I) \times (A - 2I)$.

b) En déduire à nouveau que A est inversible et retrouver la valeur de A^{-1} .

2° a) Calculer de même $(A + I)^2$ et $(A - 2I)^2$.

b) En déduire une expression simple de $(A + I)^n$ et $(A - 2I)^n$ pour n entier positif.