

1 .....

CORRIGÉ

Pour une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  on définit l'application de  $\Phi_M : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto P(M) \end{cases}$ .

Pour une matrice  $M$  d'ordre 4, on s'intéresse à l'équation  $(e_M) : \Phi_M(P) = 0$ . S'il existe des solutions non nulles, on appellera solution minimale  $P_0$  le polynôme unitaire, de degré le plus petit possible, solution de l'équation.

1° Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) On a  $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.B$ .

b) Une récurrence évidente donne  $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ ; par ailleurs  $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B^3 = 0$  donc  $B^n = 0$  pour  $n \geq 3$ .

c)  $\Phi_A(1 + X^2) = I_4 + A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$  et  $\Phi_B(1 + X^2) = (1 + X^2)(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

d)  $A$  n'est pas colinéaire à  $I_4$  donc il n'existe pas de solution de degré 1 de  $(e_A)$ .  $P = (X - 2)(X - 3)$  est unitaire de degré 2. On a  $\Phi_A(P) = (A - 2I_4)(A - 3I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ . Ainsi  $(X - 2)(X - 3)$  est la solution minimale de  $(e_A)$ .

2° On pose  $S = A + B$ .

a) Bien sûr  $S^0 = I_4$ ,  $S^1 = A + B$  et pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , puisque  $A$  et  $B$  commutent,

$$S^n = (A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \binom{n}{0} A^n I_4 + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n & 0 & 0 \\ n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

b) Vues les structures des puissances de  $S$ , pour un polynôme  $P$  quelconque on a  $\Phi_S(P) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$ . En posant

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ on a } \alpha = \sum_{k=0}^n a_k 2^k = P(2), \text{ puis de même } \delta = P(3). \text{ De plus } \beta = \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} a_k 2^{k-1} = P'(2) \text{ et } \gamma =$$

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} 2^{k-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1)2^{k-3} = \frac{P''(2)}{2} \text{ donc } \Phi_S(P) = \begin{pmatrix} P(2) & 0 & 0 & 0 \\ P'(2) & P(2) & 0 & 0 \\ P''(2)/2 & P'(2) & P(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(3) \end{pmatrix}.$$

c) Alors  $\Phi_S(P) = 0$  si et seulement si 2 est racine de  $P$ , de  $P'$  et de  $P''$  et 3 racine de  $P$  donc si et seulement si 2 est racine au moins triple de  $P$  et 3 au moins racine simple de  $P$ . Donc si et seulement si  $(X - 3)(X - 2)^3$  divise  $P$ .

d) La solution minimale de  $(e_S)$  est donc  $(X - 3)(X - 2)^3$ .

2 .....

CORRIGÉ

Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'espace des matrices carrées d'ordre  $n$ , la trace d'une matrice  $M$ , notée  $\text{tr}(M)$  est la somme de ses termes diagonaux.

1° a) La linéarité de  $\text{tr}$  coule de source :  $\text{tr}$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

b) Pour  $A = (a_{ij})_{i,j}$  et  $B = (b_{ij})_{i,j}$  quelconques, le  $k$ -ième terme de la diagonale de  $AB$  est  $\sum_{p=1}^n a_{kp}b_{pk}$  et celui de la diagonale de  $BA$  est  $\sum_{p=1}^n b_{kp}a_{pk}$ . Leurs sommes sont donc les mêmes :  $\sum_{i,j} a_{ij}b_{ji}$  ; ainsi  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

2° a)  $u$  est un endomorphisme de  $E$ , espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$ .  $M$  étant la matrice de  $u$  dans une base  $\mathcal{B}$  et  $M'$  la matrice dans une base  $\mathcal{C}$  on a  $M' = P^{-1}MP$  avec  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

Alors  $\text{tr}(M') = \text{tr}(P^{-1}(MP)) = \text{tr}(MP P^{-1}) = \text{tr}(M)$ . Ainsi  $\text{tr}(M)$  ne dépend pas de la base choisie (ce nombre sera appelé  $\text{tr}(u)$  : trace de  $u$ ).

b) Soit  $\pi$  un projecteur de rang  $p$ .  $\pi$  est une projection de base  $A$  et de direction  $B$ .  $A$  est l'image de  $\pi$  donc  $A$  est de dimension  $p$ .  $A$  et  $B$  sont supplémentaires donc il existe une base de  $E$  :  $(a_1, \dots, a_p, b_{p+1}, \dots, b_n)$  dont les  $p$  premiers vecteurs sont dans  $A$ , les autres dans  $B$ . La matrice de  $\pi$  dans cette base est diagonale, les  $p$  premières valeurs de cette diagonale sont 1, les autres 0. Ainsi  $\text{tr}(\pi) = p$  : la trace d'un projecteur est égale à son rang.

3 .....

CORRIGÉ

### quelques généralités

1° a) Les applications  $\lambda_i$ , les  $\gamma_j$ , de même que  $\delta$  et  $d$  sont bien sûr toutes linéaires : ce sont des formes linéaires sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On peut<sup>1</sup> considérer  $\Xi$  comme l'intersection des noyaux des  $(\lambda_i - d)$ , des  $(\gamma_j - d)$  et de  $(\delta - d)$ . Ainsi  $\Xi$  est un sous-espace de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  : c'est un  $\mathbb{R}$ -ev.

b) Pour  $M$  quelconque, on a bien sûr  $d({}^tM) = d(M)$ ,  $\delta({}^tM) = \delta(M)$ ,  $\lambda_i({}^tM) = \lambda_i(M)$  pour tout  $i$ , et  $\gamma_j({}^tM) = \gamma_j(M)$  pour tout  $j$ .

Donc  ${}^tM$  est magique lorsque  $M$  est magique.

2° a) Pour  $M$  magique (i.e. dans  $\Xi$ ) on a  $\varphi(M) = \delta(M)$  et  $\delta$  est linéaire. Donc  $\varphi : \begin{cases} \Xi & \rightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \varphi(M) \end{cases}$  est une forme linéaire sur  $\Xi$ .

b)  $\Xi_0$  est le noyau de  $\varphi$  donc c'est un sous-espace vectoriel de  $\Xi$ .  $\Xi_0$  est un hyperplan de  $\Xi$  donc de dimension  $(p - 1)$ ,  $p$  étant la dimension de  $\Xi$ .

3°  $\Xi_0$  est supplémentaire dans  $\Xi$  de toute droite qu'il ne contient pas.  $U_n$  est manifestement hors de  $\Xi_0$  puisque la somme de ses termes diagonaux est  $n$ .

Ainsi  $\Xi_0$  et  $\text{Vect}(U_n)$  sont deux sous-espaces supplémentaires de  $\Xi$ .

<sup>1</sup>on peut aussi le prendre comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire dont le vecteur nul est solution.

<sup>2</sup>Remarquons que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension  $n^2$ , et que  $\Xi$  étant l'intersection de  $(2n + 1)$  hyperplans, il est de dimension au moins  $p = (n - 1)^2 - 2$ .

### aventures à l'ordre 3

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$$

1° Pour  $M \in \Xi$ , i.e.  $M$  magique on a  $\delta(M) + d(M) + \gamma_2(M) - \lambda_1(M) - \lambda_3(M) = \varphi(M) = 3.a_{22}$ .

2° Pour  $M \in \Xi$  et  $a_{11} = 67, a_{13} = 43, a_{32} = 73$ , posons  $a_{12} = \alpha$  et  $a_{22} = \beta$ . On a alors 
$$\begin{cases} \varphi(M) = 3\beta \\ \varphi(M) = 110 + \alpha \\ \varphi(M) = 73 + \alpha + \beta \end{cases} \quad \text{d'où } \alpha = 1$$
 et  $\beta = 37$ . On utilise ensuite  $\varphi(M) = \delta(M) = 111, \gamma_3 = 111, d(M) = 111$  et  $\lambda_2 = 111$  pour trouver  $M = \begin{pmatrix} 67 & 1 & 43 \\ 13 & 37 & 61 \\ 31 & 73 & 7 \end{pmatrix}$ .

3° Pour  $M \in \Xi_0$  on a  $\varphi(M) = 3.a_{22} = 0$ . Posons  $a_{11} = a$  et  $a_{31} = b$ . Alors  $M = \begin{pmatrix} a & b-a & -b \\ -a-b & 0 & a+b \\ b & a-b & -a \end{pmatrix}$ ,  $a$  et  $b$  étant sans contrainte.

Ainsi  $\dim(\Xi_0) = 2$  et  $\mathcal{B}_0 = (A_1, A_2)$  en est une base, où  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , puisque cette famille est génératrice, libre et de cardinal 2.

4°  $\Xi_0$  est un hyperplan de  $\Xi$  donc  $\dim(\Xi) = 3$ .  $\mathcal{B} = (A_1, A_2, U_3)$  en est une base puisque  $\Xi_0$  et  $\text{Vect}(U_n)$  sont supplémentaires.

$L = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$  a dans cette base les coordonnées  $(-1, 4, 5)$ .

---

 **F I N** 

---