

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

DEVOIR D'ANALYSE

(sur 10 points : durée conseillée 2 heures 00 ; en aucun cas n'y passer plus de 2 heures 20)

Partie A

On note $f_0 : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x^2} \end{cases}$ et pour tout entier naturel $p \geq 1$, $f_p : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^p e^{-x^2} \end{cases}$

- 1° a)** Étudier, pour tout entier naturel n , la continuité et la dérivabilité de f_n .
- b)** Dresser le tableau des variations de f_0 et de f_p pour $p \geq 1$.
- c)** Comparer, pour tout entier naturel n , f_n et f_{n+1} sur $[0, +\infty[$.
- d)** On note (C_n) la courbe représentative de f_n . Tracer sur un même schéma les allures de (C_0) , (C_1) et (C_4) (on ne cherchera pas à déterminer d'éventuels points d'inflexion).
- 2° a)** Montrer que pour $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 1 - x$ admet une solution unique dans $[0, 1]$. Celle-ci est notée x_n .
- b)** Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge de limite 1.
- 3°** On admet que f_0 est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
- a)** Démontrer que pour $n \geq 1$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. On notera $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.
- b)** Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.
- c)** En déduire la valeur de I_n , pour n pair et pour n impair.

Partie B

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\varphi_a : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{-x^2} \cos(ax) \end{cases}$ et $\psi_a : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x e^{-x^2} \sin(ax) \end{cases}$

4° a) Montrer que, pour a quelconque, les fonctions φ_a et ψ_a sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

On notera $F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(at) dt$ et $G(a) = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(at) dt$.

b) Démontrer, pour tout réel a , $G(a) = \frac{a}{2} F(a)$.

5° a) Pour $a \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ et $x \geq 0$, montrer

1. $\cos((a+h)x) = \cos(ax) - hx \sin(ax) - x^2 \int_a^{a+h} (a+h-u) \cos(xu) du$
2. $\left| \int_a^{a+h} (a+h-u) \cos(xu) du \right| \leq \frac{h^2}{2}.$

b) En déduire, pour a quelconque et $h \neq 0$, $\left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} + G(a) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$

c) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et $F' = -G$ sur \mathbb{R} .

6° Exprimer en fonction du réel a les nombres $F(a)$ et $G(a)$ en s'aidant au besoin de la fonction H définie sur \mathbb{R} par $H(a) = e^{a^2/4} F(a)$.

DEVOIR D'ALGÈBRE

(sur 10 points : durée conseillée 2 heures 00 ; en aucun cas n'y passer plus de 2 heures 20)

n est un entier naturel non nul. Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A

On pose : $A = (X+1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1° Montrer que l'on peut écrire : $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0 .

2° Déterminer les racines de A dans \mathbb{C} . On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}.$

3° Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}.$

En déduire $P_n = \sqrt{Q_n}$ où $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}.$

4° Calculer $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ de deux façons. Puis, en déduire Q_n et enfin, P_n .

5° On pose $F = \frac{1}{A}$. Déterminer la décomposition de F en éléments simples sur \mathbb{C} .

Partie B

On travaille dans un \mathbb{C} -espace vectoriel E supposé non réduit au vecteur nul. $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E , id_E est l'application identité de E et θ désigne l'application nulle.

Par convention : $\forall f \in \mathcal{L}(E) f^0 = id_E$.

On étudie, sur quelques cas particuliers, l'équation : $(f + id_E)^{2n} - id_E = \theta$ où $f \in \mathcal{L}(E)$ est l'inconnue.

6° Déterminer les homothéties vectorielles qui sont solutions de l'équation proposée.

7° En développant $(1 + 1)^{2n}$ et $(1 - 1)^{2n}$, déterminer les sommes $S = \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k}$ et $S' = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1}$.

8° Si s est une symétrie de E , exprimer $(s + id_E)^{2n} - id_E$ en fonction de s et de id_E . En déduire les symétries de E solutions de l'équation proposée.

Partie C

On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans \mathbb{C} . I_3 désigne la matrice identité et O_3 la matrice nulle.

On pose $G = \{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) / (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$ où $M_{a,b}$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

9° a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base.

b) Vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

On cherche à résoudre l'équation matricielle $(*)$ $(M + I_3)^{2n} - I_3 = O_3$, avec M , matrice inconnue, dans G .

On note E le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

Soient $M = M_{a,b}$ un élément de G tel que $b \neq 0$, u l'endomorphisme de E de matrice M dans \mathcal{B} .

10° a) Déterminer une base (e'_1) de $E_1 = \text{Ker}(u - (a + 2b).id_E)$.

b) Déterminer une base (e'_2, e'_3) de $E_2 = \text{Ker}(u - (a - b).id_E)$.

c) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E ; on la note \mathcal{B}' .

11° a) Déterminer la matrice D de u dans la base \mathcal{B}' .

b) Quelles sont les valeurs propres de u ? u est-il diagonalisable ?

12° On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

a) Écrire P et déterminer P^{-1} en précisant la méthode utilisée et en détaillant les calculs.

b) Exprimer M en fonction de D , P et P^{-1} .

13° a) Montrer que : M est solution de l'équation $(*)$ si et seulement si D est solution de l'équation $(*)$.

b) Déterminer toutes les matrices D solutions de l'équation $(*)$.

c) En déduire toutes les solutions de l'équation $(*)$ dans G .