

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**considérations logiques**

(5 points)

1° de Kangourou 1999 Les 1999 habitants d'une île se répartissent en deux catégories : les "bons" qui disent toujours la vérité et les "truands" qui mentent systématiquement. Chaque habitant est soit un chanteur, soit un pêcheur soit un footballeur. On pose trois questions à chaque habitant :

- es-tu un chanteur ?
- es-tu un pêcheur ?
- es-tu un footballeur ?

1000 personnes répondent *oui* à la première question, 700 à la deuxième et 500 à la troisième. Combien y a-t-il de truands sur l'île ?

2° Soit, énoncée sur \mathbb{N} , la conjecture \mathcal{C} :

« Pour tout entier n , si n est impair alors il existe un entier p tel que $n^2 = 8p + 1$ »

- a) Énoncer la contraposée de l'assertion \mathcal{C} .
- b) Démontrer que \mathcal{C} est vraie.
- c) Énoncer la réciproque de l'assertion \mathcal{C} . Est-elle vraie ?

EXERCICE 2**considérations fonctionnelles**

(8 points)

1° Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2 \arccos x + \arcsin x = \pi$.

2° Soit la fonction $f : \left[x \mapsto \arctan \frac{1-x}{1+x} \right]$.

- a) Donner l'ensemble de définition de cette fonction, puis sa dérivée.
- b) Donner une expression simple de $f(x)$.

3° On pose $\varphi : \left[x \mapsto \arctan \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \right]$. Établir que φ est bijective et en donner la fonction réciproque.

EXERCICE 3**considérations complexes**

(7 points)

1° Soit α un complexe non réel fixé. Caractériser le module des z tels que $\frac{\alpha - \overline{\alpha}z}{1 - z}$ est un réel pur.

2° θ est un réel de $]0, \pi[$.

a) Donner module et arguments du complexe $C = \frac{1 - \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta}$

b) Donner sous forme algébrique les solutions z de l'équation $z^2 = C$.

3° Etablir que pour a et b réels non nuls quelconques, $\left[2 \arctan \frac{b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right]$ est un argument du complexe $a + ib$.

F I N
