

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

FONCTIONS D'EULER**Partie A**

1° On fixe le réel x tel que $x > -1$.

a) Montrer que la fonction $[t \mapsto e^{-t} t^x]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On notera $A(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$.

b) Montrer que la fonction $[t \mapsto e^{-t} t^x \ln(t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On notera $B(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \ln(t) dt$.

2° On définit f sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$ pour tout x .

3° a) Vérifier que pour $x > -1$, $A(x+1) = (x+1)A(x)$ et en déduire la valeur de $A(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Trouver une relation entre $B(x+1)$, $B(x)$ et $A(x)$.

c) En déduire que pour tout $x > -1$, $f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1}$

4° a) Établir $B(0) > -1$ en minorant $\int_0^1 e^{-t} \ln(t) dt$.

b) En remarquant $B(0) = \int_0^1 e^{-t} \ln(t) dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$, montrer qu'on peut écrire :

$$B(0) = \int_1^{+\infty} \left(e^{-u} - \frac{1}{u^2} e^{-1/u} \right) \ln(u) du$$

c) Étudier le signe de $\left[u - \frac{1}{u} - 2 \ln(u) \right]$ pour $u \geq 1$ et en déduire $B(0) < 0$.

d) Déterminer les signes de $f(n)$ et de $B(n)$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

Partie B

1° Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \ln(x) - x$. Etudier les variations de la fonction g sur $]0, +\infty[$.

2° Soit h une fonction à valeurs réelles (mais pas nécessairement positives), continue sur $]0, +\infty[$ et telle que la fonction $[u \mapsto e^{g(u)} h(u)]$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$. On désigne par α et T des nombres réels tels que $0 < \alpha < 1$ et $T \geq 1$.

a) Montrer que la fonction $[u \mapsto e^{Tg(u)} h(u)]$ est intégrable sur $[1 + \alpha, +\infty[$.

b) Montrer de plus qu'il existe un nombre positif M indépendant de α et T , tel que :

$$\left| \int_{1+\alpha}^{+\infty} e^{Tg(u)} h(u) du \right| \leq M.e^{(T-1)g(1+\alpha)}$$

c) Donner un résultat analogue pour $\int_0^{1-\alpha} e^{Tg(u)} h(u) du$.

d) Soit β un réel tel que $0 < \beta < \alpha$. Montrer que : $\int_1^{1+\alpha} e^{Tg(u)} du \geq \beta.e^{Tg(1+\beta)}$.

e) Donner un résultat analogue pour $\int_{1-\alpha}^1 e^{Tg(u)} du$.

3° On suppose de plus que $h(1) = 0$.

a) Montrer que pour $\epsilon > 0$ quelconque, il existe un α , $0 < \alpha < 1$, tel que $\left| \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{Tg(u)} h(u) du \right| \leq \epsilon \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{Tg(u)} du$.

b) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{Tg(u)} h(u) du$ est négligeable devant $\int_0^{+\infty} e^{Tg(u)} du$ lorsque T tend vers $+\infty$.

4° On suppose $x > 0$. Effectuer dans les intégrales $A(x)$ et $B(x)$ le changement de variable $t = xu$ et démontrer, en posant $h = \ln$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$$

F I N
