

1

CORRIGÉ

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et E_2 désigne son sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1° Soit Φ de E dans E qui à tout polynôme P de E fait correspondre le polynôme $\Phi(P) = (2X - 1)P - (X^2 + \frac{1}{2})P'$.

a) On obtient facilement que Φ est linéaire.

b) Pour $P = 0$, on a $\Phi(P) = 0$.

Pour $P \neq 0$, posons $d^\circ P = n$ et a_n le coefficient dominant de P . On a alors $(2X - 1)P$ de degré $n + 1$ et de coefficient dominant $2a_n$, et $(X^2 + \frac{1}{2})P'$ de degré $n + 1$ et de coefficient dominant $n a_n$.

Donc pour $n \neq 2$, $d^\circ \Phi(P) = n + 1$. Voyons à part le cas $n = 2$.

Soit $P = aX^2 + bX + c$. Alors $\Phi(P) = (b - a)X^2 + (2c - b - a)X + (-c - \frac{b}{2})$. Ainsi $d^\circ \Phi(P) = 2$ pour $b - a \neq 0$; $d^\circ \Phi(P) = 1$ pour $b - a = 0$ et $2c - b - a \neq 0$; enfin $d^\circ \Phi(P) = 0$ pour $a = b = c$.

c) $\Phi(P) = 0$ impose $P = 0$ d'après l'étude du degré de $\Phi(P)$. D'où $\text{Ker } \Phi = \{0\}$ et donc Φ est injective.

d) L'étude des degrés possibles de $\Phi(P)$ montre que X^3 n'a pas d'antécédent et donc que Φ n'est pas surjective.

e) Soit dans E l'équation $(e) : \Phi(P) = 1$, d'inconnue P . Vue l'étude du degré, il est nécessaire $d^\circ P = 2$ pour P une solution, avec de plus $P = aX^2 + bX + c$ et $a = b = c$. Or $\Phi(X^2 + X + 1) = -\frac{3}{2}$. D'où (e) admet une solution unique : $U = -\frac{2}{3}(X^2 + X + 1)$.

2° Soit φ de E_2 dans E_2 qui à tout polynôme P de E_2 fait correspondre le polynôme $\varphi(P) = (2X - 1)P - (X^2 + \frac{1}{2})P'$.

a) On a vu : pour $d^\circ P \leq 2$, on a $d^\circ \Phi(P) \leq 2$. Ainsi φ a pour ensemble de définition E_2 .

b) $\varphi(1) = 2X - 1$, $\varphi(X) = X^2 - X - \frac{1}{2}$ et $\varphi(X^2) = -X^2 - X$.

c) φ restriction de Φ injective est injective.

De plus $\varphi(U) = 1$, $\varphi(1) = 2X - 1$ donc $\varphi(\frac{1}{2}(1 + U)) = X$ et enfin $\varphi(X) = X^2 - X - \frac{1}{2}$ donc $\varphi(X + U + \frac{1}{2}) = X^2$. Ainsi $E_2 = \text{Vect}(1, X, X^2) \subset \text{Im } \varphi$. Ainsi φ est surjective.

On en déduit φ bijective, donc automorphisme de E_2 .

3° a) Soit $A = \{P \in E_2 / \varphi(P) = -P\}$. $0 \in A$. Pour P et Q dans A on a $\varphi(P + Q) = \varphi(P) + \varphi(Q) = -P - Q = -(P + Q)$, donc $P + Q \in A$. Enfin, pour P dans A et $k \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(k.P) = k.\varphi(P) = k.(-P) = -(k.P)$ donc $k.P \in A$. Ainsi A est un sous-espace vectoriel de E_2 .

Pour $P \in A$, on a $\varphi(\varphi(P)) = \varphi(-P) = -\varphi(P)$ donc $\varphi(P) \in A$. Ainsi A est stable par φ .

b) On note désormais $Q = \varphi(X)$. $\varphi(Q) = -2X^2 - X + 1 = -2Q - 3X$.

c) Soit $B = \text{Vect}(\{X, Q\})$. Pour $P \in B$ on a $P = \lambda.Q + \mu.X$ et donc $\varphi(P) = \lambda.\varphi(Q) + \mu.\varphi(X) = (\mu - 2\lambda).Q - 3\lambda.X$ et donc $\varphi(P) \in B$. Ainsi B est stable par φ .

d) Soit $P \in A \cap B$. On a $P = \lambda.Q + \mu.X$ et $\varphi(P) = -P$. Donc $(\mu - 2\lambda).Q - 3\lambda.X = -(\lambda.Q + \mu.X)$. On déduit $(\mu - \lambda).Q + (\mu - 3\lambda).X = 0$. Or $d^\circ Q = 2$ donc $\mu - \lambda = 0$ et donc $\mu - 3\lambda = 0$. On tire $\lambda = \mu = 0$ donc $P = 0$.

Ainsi $A \cap B = \{0\}$.

Soit $P \in E_2$. $P = aX^2 + bX + c = \frac{a-2c}{2}.Q + \frac{a+2b-2c}{2}.X + \left[\frac{a+2c}{2}.X^2 + \frac{a+2c}{4} \right]$ et $\varphi \left(\frac{a+2c}{2}.X^2 + \frac{a+2c}{4} \right) = - \left(\frac{a+2c}{2}.X^2 + \frac{a+2c}{4} \right)$. Donc $P \in A + B$.

D'où A et B sont supplémentaires dans E_2 .

e) Soit π la projection de E_2 sur A dans la direction B . $E_2 = A \oplus B$ donc pour $P \in E_2$, on a $P = P_A + P_B$ où $P_A \in A$ et $P_B \in B$. A et B sont stables par φ donc $\varphi(P) = \varphi(P_A) + \varphi(P_B)$ avec $\varphi(P_A) \in A$ et $\varphi(P_B) \in B$.

Ainsi $\varphi \circ \pi(P) = \varphi(P_A)$ et $\pi \circ \varphi(P) = \varphi(P_A)$.

D'où φ et π commutent.

2

CORRIGÉ

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto z + \frac{1}{z} \end{cases}$$

1° a) Pour $Z \in \mathbb{C}$, l'équation du second degré $z^2 - Z.z + 1 = 0$ admet au moins une solution, non nulle, et donc Z admet au moins un antécédent par f dans \mathbb{C}^* .

f est surjective.

b) $f(i) = f(-i) = 0$ donc f n'est pas injective.

c) Soit $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$. Or $f(e^{i\theta}) = 2 \cos \theta$ donc $F = f(U) = \{2 \cos \theta / \theta \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$.

d) $U \subset f^{-1}(F)$.

Soit $x \in [-2, 2]$. L'équation dans \mathbb{C} , $z^2 - x.z + 1 = 0$, admet deux solutions complexes conjuguées $\frac{x + i\sqrt{4-x^2}}{2}$ et $\frac{x - i\sqrt{4-x^2}}{2}$ toutes deux de module 1, donc dans U .

D'où $f^{-1}(F) \subset U$ et enfin $f^{-1}(F) = U$.

e) Soient $D = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < 1\}$ et $g : \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{C} \setminus F \\ z & \mapsto z + \frac{1}{z} \end{cases}$.

Les éléments de F ont leurs antécédents par f dans U , disjoint de D . Donc $\mathcal{D}_g = D$.

Dans \mathbb{C}^* , $f(z) = f(z')$ est équivalente à $(1 - z.z')(z - z') = 0$. Ce qui prouve que deux complexes distincts n'ont même image par f que s'ils sont inverses l'un de l'autre. Un seul alors peut avoir un module inférieur à 1. Ainsi g est injective.

Les complexes de modules 1 ont leur image par f dans F et ce sont les seuls. f étant surjective les complexes de $\mathbb{C} \setminus F$ ont au moins un antécédent dans $\mathbb{C}^* \setminus U$ et son inverse. Un de ces nombres a un module inférieur à 1 et se trouve donc dans D . Ainsi g est surjective.

D'où g est une bijection.

2° a) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z^0) = 2$. En posant $P_0 = 2$, on a $P_0(f(z)) = f(z^0)$ pour tout z .

En posant $P_1 = X$, on a $P_1(f(z)) = f(z^1)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

On admet l'existence de P_n et P_{n+1} tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on ait $P_n(f(z)) = f(z^n)$ et $P_{n+1}(f(z)) = f(z^{n+1})$. On pose alors $P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$ et on a pour $z \in \mathbb{C}^*$, $P_{n+2}(f(z)) = f(z) f(z^{n+1}) - f(z^n) = f(z^{n+2})$.

Le théorème de récurrence donne ainsi l'existence pour tout entier naturel n de P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*$ $f(z^n) = P_n(f(z))$.

De plus $Q(f(z)) = P_n(f(z))$ pour tout z impose $Q - P_n$ s'annule en tout élément de $\text{Im}(f) = \mathbb{C}$, et donc $P_n = Q$. Les polynômes ainsi construits sont uniques et ils vérifient $\forall n$, $P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$.

b) $P_0 = 2$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - 2$ et $P_3 = X^3 - 3X$.

c) $d^0 P_0 = 0, d^0 P_1 = 1$. En admettant $d^0 P_n = n$ et $d^0 P_{n+1} = n + 1$, la relation $P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$ donne $d^0 P_{n+2} = n + 2$. Le théorème de récurrence donne alors $\forall n, d^0 P_n = n$.

d) Même type de récurrence pour montrer que P_n a même parité que n .

3° a) n fixé dans \mathbb{N}^* . Puisque f est surjective, trouver les racines de P_n , i.e. les Z tels que $P_n(Z) = 0$, revient à trouver les z tels que $P_n(f(z)) = 0$.

Or $P_n(f(z)) = 0 \iff f(z^n) = 0$ et $f(z^n) = 0 \iff z^{2n} = -1$. Ainsi les racines de P_n sont les $f(z)$ tels que $z^{2n} = -1$.

b) Or les racines $2n$ -ièmes de -1 sont les $e^{i(\pi/2n + k\pi/n)}$ où $0 \leq k < 2n$. Ces nombres sont tous de module 1, donc les racines de P_n sont les $2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ où $0 \leq k < 2n$.

De plus $2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k'\frac{\pi}{n}\right)$ est équivalent à $k = k'$ ou $k = 2n - k'$.

Ainsi les $2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ où $0 \leq k < n$ sont n racines distinctes de P_n . Ayant $d^0 P_n = n$ ces nombres sont toutes les racines de P_n . Elles sont toutes réelles.

Ces racines sont notées, dans l'ordre décroissant, $r_{n,0}, r_{n,1} \dots r_{n,n-1}$. Ainsi $r_{n,k} = 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

c) Soit $p \geq 2$ et $0 \leq k \leq (p-2)$. On a $\frac{2k+1}{2p} < \frac{2k+1}{2p-2} < \frac{2k+3}{2p}$ donc $0 < \frac{2k+1}{2p}\pi < \frac{2k+1}{2p-2}\pi < \frac{2k+3}{2p}\pi < \pi$; \cos étant décroissante sur $]0, \pi[$, on a $r_{p,k} > r_{p-1,k} > r_{p,k+1}$.

4° Soient $b \in \mathbb{C}$ et $n > 2$ fixés; on note (e_n) l'équation dans \mathbb{C} : $P_n(z) = b$. Comme précédemment, résoudre (e_n) revient à résoudre (E_n) : $P_n(f(x)) = b$ soit $(E_n) \iff f(x^n) = b$.

a) b n'est pas un réel de $[-2, 2]$. b a alors deux antécédents par f , de modules inverses différents de 1: a_1 et a_2 de produit 1. On pose $a_1 = \rho e^{i\theta}$. Alors $(E_n) \iff x^n = a_1$ ou $x^n = a_2$.

Les solutions de (E_n) sont donc les $\sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta + k2\pi)/n}$ où $0 \leq k < n$ et leurs inverses.

Ainsi, (e_n) admet pour solutions les images par f des solutions de (E_n) , c'est à dire les $e^{ik2\pi/n} \left(\sqrt[n]{\rho} e^{i\theta/n} + \frac{1}{\sqrt[n]{\rho} e^{i\theta/n}} \right)$ avec $0 \leq k < n$. Ainsi (e_n) admet n solutions distinctes.

b) b réel et $-2 \leq b \leq 2$. On pose $\theta = \arccos \frac{b}{2}$.

x solution de (E_n) impose $f(x^n) \in F$ donc $x \in U$. On pose $x = e^{i\alpha}$. Alors $(E_n) \iff 2 \cos n\alpha = b$ soit $(E_n) \iff 2 \cos n\alpha = 2 \cos \theta$.

Les solutions de (e_n) sont donc les $2 \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ où $0 \leq k < n$.

F I N
