

1

CORRIGÉ

1° f et g fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont définies par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon, puis $g(x) = 1 - f(x)$ pour tout x . Bien sûr $[\forall x, f(x)g(x) = 0]$ et pourtant on n'a ni $[\forall x, f(x) = 0]$ ni $[\forall x, g(x) = 0]$.

2° x et y entiers naturels.

- cas x et y impairs. on a $x = 2p + 1$ et $y = 2q + 1$; alors $xy = 2(2pq + p + q) + 1$ est impair.
- cas x pair. on a $x = 2p$; alors $xy = 2py$ est pair.
- cas y pair. on a $y = 2q$; alors $xy = 2qx$ est pair.

Ainsi $(xy \text{ est pair}) \iff (x \text{ est pair ou } y \text{ est pair})$. (les plus savants auront utilisé le théorème de Gauss puisque 2 est premier).

3° $\forall x \in]0, +\infty[\quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} < x$ est vraie :

avec $x > 0$, en posant $n = E(1/x) + 1$, on a $n > 1/x$ donc $1/n < x$.

3

CORRIGÉ

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E .

$A \cap B = A \cap C$. Ceci signifie que pour $x \in A$, $(x \in B \iff x \in C)$ donc $(x \notin B \iff x \notin C)$.

D'où $(A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}) \iff (A \cap B = A \cap C)$.

4

CORRIGÉ

Soient A, B et C parties de E telles que
$$\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ B \cup C = B \cap A \\ C \cup A = C \cap B \end{cases}$$

Nécessairement $A \subset (A \cup B)$ donc $A \subset (A \cap C)$ i.e. $A \subset C$. De même $B \subset (B \cup C)$ donc $B \subset (B \cap A)$ i.e. $B \subset A$ et $C \subset (C \cup A)$ donc $C \subset (C \cap B)$ i.e. $C \subset B$.

On a $A \subset C \subset B \subset A$ d'où $A = B = C$.

5

CORRIGÉ

E est un ensemble et A et B des parties de E .

a) $(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$ signifie $((x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in B \text{ et } y \in A))$, soit $((x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } (y \in A \text{ et } y \in B))$.

Ainsi $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$.

b) Puisque $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$, on a $(A \times B) \cup (B \times A) \subset (A \cup B)^2$ bien sûr.

$A \neq B$ donne l'existence d'un élément e dans $A \setminus B$ ou $B \setminus A$. Alors (e, e) dans $(A \cup B)^2$, mais (e, e) n'est ni dans $(A \times B)$ ni dans $(B \times A)$. Ainsi $A = B$ est nécessaire pour avoir $(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B)^2$; cette condition est évidemment suffisante.

6

CORRIGÉ

Soit $\delta : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto a + b\sqrt{2} \end{cases}$. $\delta(a, b) = \delta(c, d)$ impose $(a - c) = (d - b)\sqrt{2}$. Puisque $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel on a $(d - b) = (a - c) = 0$. δ est injective.

7

CORRIGÉ

Soit la fonction $f : \left[x \mapsto \int_0^1 \max(x, t) dt \right]$.

a) Pour $x \leq 0$, $f(x) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$. Pour $x \geq 1$, $f(x) = \int_0^1 x dt = x$. Enfin, pour $0 < x < 1$, on a $f(x) = \int_0^x x dt + \int_x^1 t dt = \frac{1}{2}(1 + x^2)$. La représentation graphique est alors évidente.

b) Alors $f\langle] - 1, 1] \rangle = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ et $f^{-1}\langle] - 2, 2] \rangle =] - \infty, 2]$.

8

CORRIGÉ

ψ est une suite d'entiers naturels strictement croissante. (on entend par là que $\psi(p + 1) > \psi(p)$ pour tout p)

- $\psi(0) \geq 0$ puisque $\psi(0) \in \mathbb{N}$
- En admettant $\psi(p) \geq p$, comme $\psi(p + 1) > \psi(p)$ on a $\psi(p + 1) > p$ donc $\psi(p + 1) \geq p + 1$
- le théorème de récurrence donne alors $\psi(n) \geq n$ pour tout n .