

1 UN PEU D'ANALYSE

CORRIGÉ

$$\varphi \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{si } x = y \end{cases} \end{cases}$$

1° a) x et y fixés distincts, par exemple $x < y$. φ étant continue et dérivable sur $[x, y]$, le théorème des accroissements finis donne $c \in]x, y[$ tel que $\varphi'(c) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} = f(x, y)$

b) φ' est continue en 0 : pour $\epsilon > 0$ quelconque on a $\alpha > 0$ tel que $|c| < \alpha \Rightarrow |\varphi'(c) - \varphi'(0)| < \epsilon$. Ainsi, avec $\|(x, y)\|_\infty < \alpha$ on a $|c| < \alpha$ et donc $|f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon$.

f est continue en $(0, 0)$.

2° Soit $u : [t \mapsto f(t, 0)]$. On a $u(0) = \varphi'(0)$ et pour $t \neq 0$, $u(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$. Or φ étant C^3 sur \mathbb{R} admet un $DL_2(0)$ (th de Taylor-Young) et $\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0).t + \varphi''(0).t^2/2 + o(t^2)$.

Alors $u(t) = \varphi'(0) + \varphi''(0).t/2 + o(t)$ valable pour 0 aussi.

u admet un $DL_1(0)$ est donc dérivable en 0 et $u'(0) = \varphi''(0)/2$.

Donc f dérivable en $(0, 0)$ suivant le vecteur $(1, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\varphi''(0)}{2}$

Pour les mêmes raisons, on trouvera aussi $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{\varphi''(0)}{2}$

2 BEAUCOUP D'ALGÈBRE, MAIS L'ANALYSE N'EST JAMAIS TRÈS LOIN

CORRIGÉ

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on note $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

préliminaire

1° Pour une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on note Q le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z, Q(z) = \det(M - z.\mathbf{I})$.

a) Q est clairement de degré 3 et tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

b) Lorsque M est à coefficients réels, Q est à coefficients réels. Or Q de degré 3 dans $\mathbb{R}[X]$ n'est pas irréductible, il admet un diviseur de degré 1, donc admet au moins une racine réelle.

On considère l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. f est un endomorphisme de E admettant la matrice A dans la base \mathcal{B} . On pose P tel que $\forall x, P(x) = \det(A - x.I)$.

Partie A

Soit λ un nombre réel

2° u un vecteur propre de f associé à la valeur propre μ i.e. $u \neq 0_E$ et $f(u) = \mu.u$.

a) On a bien sûr $f^3(u) = \mu^3.u$ et $u \neq 0_E$ donc u est un vecteur propre de f^3 associé à la valeur propre μ^3 .

b) $(f - \lambda.id_E)(u) = (\mu - \lambda).u$, donc $(f - \lambda.id_E)^3(u) = (\mu - \lambda)^3.u$ et $u \neq 0_E$ donc u est un vecteur propre de $(f - \lambda.id_E)^3$ associé à la valeur propre $(\mu - \lambda)^3$.

3° On considère $(A - \lambda.I)^3 = O$; on a ainsi $\forall u \in E, (f - \lambda.id_E)(u) = 0_E$, donc $\forall u \in E, f(u) = \lambda.u$.

a) On a ainsi que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ : λ est valeur propre unique de f .

b) λ est valeur propre de f donc $(f - \lambda.id_E)$ n'est pas bijective, donc $P(\lambda) = 0$. P pris dans $\mathbb{C}[X]$ ne peut avoir d'autre racine que λ car un endomorphisme g de $F = \mathbb{C}^3$ qui aurait la matrice A dans la base canonique aurait une autre valeur propre. Ceci ne se peut pas car pour les mêmes causes que pour f on a $\forall u \in F, (g - \lambda.id_F)(u) = 0_F$. Comme dans $\mathbb{C}[X]$ les diviseurs irréductibles de P sont de degré 1, on a λ racine triple du polynôme P .

4° La question précédente a établi que si $(A - \lambda.I)^3 = O$, alors λ racine triple du polynôme P .

La réciproque s'énoncera : si λ racine triple du polynôme P alors $(A - \lambda.I)^3 = O$. Cet énoncé est vrai, il est un cas particulier d'un théorème général.

démo : On a $P = \det(A - X.I) = (\lambda - X)^3$. On note $M = A - X.I$ et \bar{M} sa matrice complémentaire (transposée de la matrice des cofacteurs). Chaque coefficient de \bar{M} est un cofacteur de M , et s'écrit donc comme un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. On peut ainsi considérer $\bar{M} = N_0 + X.N_1 + X^2.N_2$ avec des matrices N_i ne faisant pas intervenir X .

$$\text{Alors } \begin{cases} \bar{M} \times M &= N_0 \times M + X.N_1 \times M + X^2.N_2 \times M \\ &= N_0 \times A + X.(N_1 \times A - N_0) + X^2.(N_2 \times A - N_1) - X^3.N_2 \\ M \times \bar{M} &= M \times N_0 + X.M \times N_1 + X^2.M \times N_2 \\ &= A \times N_0 + X.(A \times N_1 - N_0) + X^2.(A \times N_2 - N_1) - X^3.N_2 \end{cases}$$

$$\text{Or } M \times \bar{M} = \bar{M} \times M = \det(M).I = P.I = (\lambda - X)^3.I \text{ donc } \begin{cases} N_0 \times A = A \times N_0 = -\lambda^3.I \\ A \times N_1 - N_0 = N_1 \times A - N_0 = 3\lambda^2.I \\ A \times N_2 - N_1 = N_2 \times A - N_1 = -3\lambda.I \\ -N_2 = I \end{cases}$$

d'où $(A - \lambda.I)^3 = A^3 - 3\lambda.I \times A^2 + 3\lambda^2.I \times A - \lambda^3.I = A^3 + (N_2 \times A - N_1) \times A^2 + (N_1 \times A - N_0) \times A + N_0 \times A$ et ainsi $(A - \lambda.I)^3 = A^3 \times (N_2 + I) = O$ c.q.f.d.

Partie B

Soient a, b et k trois réels non nuls. On pose désormais $A = \begin{pmatrix} k-a & -a & -a \\ b & k & b \\ a & a & k+a \end{pmatrix}$.

5° a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x, P(x) = \det(A - x.I)$. Ainsi $P = \det(A - X.I)$.

$$\begin{aligned}
P &= \begin{vmatrix} k-a-X & -a & -a \\ b & k-X & b \\ a & a & k+a-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-a-X & -a & X-k \\ b & k-X & 0 \\ a & a & k-X \end{vmatrix} \\
&= (k-X) \cdot \begin{vmatrix} k-a-X & -a & -1 \\ b & k-X & 0 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (k-X) \cdot \begin{vmatrix} k-X & 0 & 0 \\ b & k-X & 0 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (k-X)^3
\end{aligned}$$

b) Le résultat admis de la partie précédente, puisque k est racine triple de P , donne $(A - k.I)^3 = O$.

Donc $A^3 = 3k.A^2 - 3k^2.A + k^3.I$.

c) Deux façons de justifier que A est inversible.

La première est que k est valeur propre unique de f et $k \neq 0$. 0 n'est pas valeur propre de f donc f est injective, donc bijective, donc A inversible. Ceci ne donne pas A^{-1} sans calcul.

La deuxième utilise $(A - k.I)^3 = O$ donc $k^3.I = (A^2 - 3k.A + 3k^2.I) \times A = A \times (A^2 - 3k.A + 3k^2.I)$. $k \neq 0$ donc A inversible et $A^{-1} = \frac{1}{k^3}(A^2 - 3k.A + 3k^2.I)$

6° a) On a déjà trouvé $P = (k - X)^3$. Les valeurs propres de f sont racines de P donc k est valeur propre unique de f .

b) Les vecteurs propres de f sont les u tels que $f(u) = k.u$.

$$\text{Pour } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad f(u) = k.u \iff \begin{cases} (k-a)x - ay - az &= kx \\ bx + ky + bz &= ky \\ ax + ay + (k+a)z &= kz \end{cases} \text{ donc } f(u) = k.u \iff \begin{cases} x + z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

On choisit $v_1 = e_1 - e_3$ pour $f(v_1) = k.v_1$.

$$\text{Soit } v = \alpha.e_2 + \beta.e_3. \text{ On a } f(v) = a.v_1 + k.v \iff \begin{cases} -a\alpha - a\beta &= a \\ k\alpha + b\beta &= k\alpha \\ a\alpha + (k+a)\beta &= -a + k\beta \end{cases}$$

On choisit $v_2 = -e_2$ pour $f(v_2) = a.v_1 + k.v_2$.

$$\text{Soit } v = \alpha.e_2 + \beta.e_3. \text{ On a } f(v) = b.v_2 + k.v \iff \begin{cases} -a\alpha - a\beta &= a \\ k\alpha + b\beta &= -b + k\alpha \\ a\alpha + (k+a)\beta &= k\beta \end{cases}$$

On choisit $v_3 = e_2 - e_3$ pour $f(v_3) = b.v_2 + k.v_3$.

7° a) La matrice de la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ dans la base \mathcal{B} est $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\det(L) = 1 \neq 0$ donc L inversible,

donc \mathcal{C} est une base et L est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} . $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Par construction, la matrice de f dans la base \mathcal{C} est $B = \begin{pmatrix} k & a & 0 \\ 0 & k & b \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = L^{-1} \times A \times L$.

Partie C

8° On pose $A' = A - k.I$ et $B' = B - k.I$.

a) $f - k.id_E$ a pour matrice $A - k.I$ dans la base \mathcal{B} et $B - k.I$ dans la base \mathcal{C} . Donc $L^{-1} \times (A - k.I) \times L = B - k.I$ i.e. $L^{-1} \times A' \times L = B'$.

autre façon : On a $L^{-1} \times A' \times L = L^{-1} \times (A - k.I) \times L = L^{-1} \times A \times L - k.I = B - k.I = B'$.

$$b) B'^0 = I. B'^1 = B' = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. B'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B'^n = O \text{ pour } n \geq 3.$$

c) De $B = B' + k.I$ on tire, avec $n \in \mathbb{N}$, $B^n = (B' + k.I)^n$.

Par la formule du binôme, on tire pour $n \geq 2$ $B^n = \sum_{j=0}^n C_n^j k^{n-j} B'^j = k^n.I + n.k^{n-1}.B' + C_n^2 k^{n-2}.B'^2$.

$$\text{Donc } B^n = \begin{pmatrix} k^n & nk^{n-1}a & n(n-1)k^{n-2}ab/2 \\ 0 & k^n & nk^{n-1}b \\ 0 & 0 & k^n \end{pmatrix}$$

9° Pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $C_n(t) = I + \sum_{p=1}^n \frac{t^p}{p!} B^p$

a) I et B sont triangulaires supérieurs de termes diagonaux égaux. Donc chaque matrice $C_n(t)$ est triangulaire de coefficients diagonaux égaux.

On les note $\alpha_n(t)$. On a $\alpha_n(t) = 1 + \sum_{p=1}^n \frac{(kt)^p}{p!}$. Alors $\lim_n \alpha_n(t) = e^{kt}$.

b) Le coefficient $(1, 2)$ de $C_n(t)$ est $\beta_n = 0 + \sum_{p=1}^n ap \frac{k^{p-1}}{p!} t^p = at \left(1 + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(kt)^p}{p!} \right)$. Alors $\lim_n \beta_n(t) = at e^{kt}$.

Le coefficient $(2, 3)$ de $C_n(t)$ est $\gamma_n = 0 + \sum_{p=1}^n bp \frac{k^{p-2}}{p!} t^p = bt \left(1 + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(kt)^p}{p!} \right)$. Alors $\lim_n \gamma_n(t) = bt e^{kt}$.

Le coefficient $(1, 3)$ de $C_n(t)$ est $\delta_n = 0 + 0 + \sum_{p=2}^n abp(p-1) \frac{k^{p-1}}{p!} t^p / 2 = ab \frac{t^2}{2} \left(1 + \sum_{p=1}^{n-2} \frac{(kt)^p}{p!} \right)$.

Alors $\lim_n \delta_n(t) = ab \frac{t^2}{2} e^{kt}$.

On peut ainsi définir une matrice $e^{t.B} = \lim_n C_n(t) = e^{kt} \cdot \begin{pmatrix} 1 & at & abt^2/2 \\ 0 & 1 & bt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) On peut donner un sens à $e^{t.A}$ de deux façons.

L'une consiste à montrer $\forall n, A^n \in \text{Vect}(I, A, A^2)$ (déjà initialisé à 0, 1, 2, 3). Une matrice $D_n(t) = I + \sum_{p=1}^n \frac{t^p}{p!} A^p$ serait également dans $\text{Vect}(I, A, A^2)$. On peut regarder les coefficients de la décomposition et montrer qu'ils définissent des suites convergentes.

L'autre consiste à remarquer, avec les mêmes notations, que $\forall n, D_n(t) = L \times C_n(t) \times L^{-1}$.

Ceci découle de $\forall p, \frac{t^p}{p!} A^p = L \times \left(\frac{t^p}{p!} B^p \right) \times L^{-1}$.

On a alors $e^{t.A} = L \times e^{t.B} \times L^{-1} = \begin{pmatrix} e^{kt} - at e^{kt} - ab(t^2/2) e^{kt} & -at e^{kt} & -ab(t^2/2) e^{kt} - at e^{kt} \\ bt e^{kt} & e^{kt} & bt e^{kt} \\ at e^{kt} + ab(t^2/2) e^{kt} & at e^{kt} & e^{kt} + ab(t^2/2) e^{kt} + at e^{kt} \end{pmatrix}$.

Partie D

On considère les systèmes d'équations différentielles de variable t et d'inconnues x, y et z :

$$(s) : \begin{cases} x' &= (k-a)x - ay - az - at \\ y' &= bx + ky + bz + 1 \\ z' &= ax + ay + (k+a)z + at \end{cases} \quad (h) : \begin{cases} x' &= (k-a)x - ay - az \\ y' &= bx + ky + bz \\ z' &= ax + ay + (k+a)z \end{cases}$$

Ils peuvent s'écrire sous formes matricielles avec $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ par

$$(s) : \frac{dU}{dt}(t) = A \times U(t) + C + t.D \quad (h) : \frac{dU}{dt}(t) = A \times U(t)$$

10° Pour trois réels quelconques k_1, k_2, k_3 , on pose $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ et $U(t) = e^{t.A} \times K$.

$$\text{On a } U(t) = \begin{pmatrix} (e^{kt} - t a e^{kt} - ab t^2 / 2 e^{kt}) k_1 - t a e^{kt} k_2 + (-ab t^2 / 2 e^{kt} - t a e^{kt}) k_3 \\ t b e^{kt} k_1 + e^{kt} k_2 + t b e^{(t k)} k_3 \\ (t a e^{kt} + ab t^2 / 2 e^{kt}) k_1 + t a e^{kt} k_2 + (e^{kt} + ab t^2 / 2 e^{kt} + t a e^{kt}) k_3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie (long calcul) $\frac{dU}{dt}(t) = A \times U(t)$ donc $U(t) = e^{t.A} \times K$ est solution de (h).

Il est plus rapide de poser $V(t) = e^{t.B} \times K'$ et de vérifier $\frac{dV}{dt}(t) = B \times V(t)$ avant de remultiplier par L^{-1} et L .

11° a) On pose $U_0(t) = -(A^{-1} \times C + (A^{-1})^2 \times D + t.A^{-1} \times D)$ et donc $\frac{dU_0}{dt}(t) = -A^{-1} \times D$.

Or $A \times U_0(t) + C + t.D = -A \times (A^{-1} \times C + (A^{-1})^2 \times D + t.A^{-1} \times D) + C + t.D = -C - A^{-1} \times D - t.D + C + t.D = \frac{dU_0}{dt}(t)$ et donc $U_0(t)$ solution particulière de (s).

b) Par analogie avec la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre, et pour les mêmes raisons de structure de variété linéaire affine de l'ensemble des solutions de (s) dont la direction est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associé (h), on déduit que la solution générale de (s) est

$$e^{t.A} \times K - (A^{-1} \times C + (A^{-1})^2 \times D + t.A^{-1} \times D)$$

pour $K \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, donc donnée par (f_1, f_2, f_3) où

$$\begin{cases} f_1(t) &= \frac{-1}{2k}(t^2 b a k k_1 e^{kt} + t^2 b a k k_3 e^{kt} + 2 t a k k_1 e^{kt} + 2 t a k k_2 e^{kt} + 2 t a k k_3 e^{kt} - 2 k k_1 e^{kt} - 2 t a) \\ f_2(t) &= \frac{1}{k}(t b k k_1 e^{(t k)} + t b k k_3 e^{kt} + k k_2 e^{kt} - 1) \\ f_3(t) &= \frac{1}{2k}(t^2 b a k k_1 e^{kt} + t^2 b a k k_3 e^{kt} + 2 t a k k_1 e^{kt} + 2 t a k k_2 e^{kt} + 2 t a k k_3 e^{kt} + 2 k k_3 e^{kt} - 2 t a) \end{cases}$$

pour k_1, k_2 et k_3 réels quelconques.

F I N