

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**sous les projecteurs**

(8 points)

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel. (O désigne l'endomorphisme nul de E).

1° φ est un endomorphisme quelconque de E . ($\varphi \in \mathcal{L}(E)$).

a) Dans le cas où $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$, établir que l'on a $\text{Im}(\varphi \circ \varphi) = \text{Im}(\varphi)$.

b) La réciproque est-elle vraie ?

c) Dans le cas où p est un projecteur de E , démontrer que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont supplémentaires.

2° p et q sont deux projecteurs de E tels que $p \circ q + q \circ p = O$.

a) Pour $x \in \text{Ker}(p)$, montrer $(p \circ q)(x) = 0_E$.

b) Pour $x \in \text{Im}(p)$, montrer $(p \circ q)(x) = 0_E$.

c) En déduire $p \circ q = q \circ p = O$.

3° p et q sont deux projecteurs de E quelconques cette fois.

Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$ et $\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p)$.

4° a et b sont deux réels non nuls distincts. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $f \neq O$, vérifiant $(f - a.\text{id}_E) \circ (f - b.\text{id}_E) = O$. On note $p = \frac{1}{b-a} \cdot (f - a.\text{id}_E)$ et $q = \frac{1}{a-b} \cdot (f - b.\text{id}_E)$.

a) Montrer que p et q sont deux projecteurs de E .

b) Montrer que $p + q$ est un projecteur de E .

c) Exprimer f comme une combinaison linéaire de p et q .

d) Pour tout n , en déduire une expression de f^n (f^n est $f \circ f \dots \circ f$) en fonction de p et q .

e) Établir que f est bijective.

f) Donner f^{-1} en fonction de p et q .

EXERCICE 2

en route vers de pi

(12 points)

Au dix-septième siècle, et donc avant l'usage des séries, des mathématiciens (tels Huygens, Snellius, Grünberger ...) entreprirent de calculer des valeurs décimales approchées de π par des méthodes trigonométriques élémentaires : il s'agissait d'améliorer la double inégalité classique $\sin x < x < \tan x$ valable entre 0 et $\pi/2$ en introduisant des fonctions s'exprimant simplement à l'aide des fonctions trigonométriques usuelles, et équivalentes à l'identité au voisinage de 0. Nos moyens de description locale nous permettent d'évaluer le bien-fondé de leurs choix.

On définit sur $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ les fonctions dites de Huygens : $f_2 : x \mapsto \frac{1}{3}(8 \sin \frac{x}{2} - \sin x)$, $f_3 : x \mapsto \sqrt[3]{\sin^2 x \tan x}$, et les fonctions dites de Snellius : $f_1 : x \mapsto \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$, $f_4 : x \mapsto \frac{1}{3}(2 \sin x + \tan x)$.

1° a) Donner des développements limités à l'ordre 5 des fonctions f_1 , f_2 , f_3 et f_4 au voisinage de 0.

b) Bien sûr ces quatre fonctions sont équivalentes à l'identité au voisinage de 0. Pour chacune d'elles, donner un équivalent simple de leur différence avec l'identité.

c) Prouver l'existence d'un réel positif δ tel que : $\forall x \in]0, \delta[\quad f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x)$.

2° a) Quel est le signe de $[f_4(x) - f_3(x)]$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$?

b) On pose $u(x) = 3(2 + \cos x)[f_2(x) - f_1(x)]$. Montrer qu'il existe des réels α , β , γ et δ , dont on donnera les valeurs, tels que $u(x) = \alpha \sin 2x + \beta \sin \frac{3x}{2} + \gamma \sin x + \delta \sin \frac{x}{2}$.

Calculer $u'(x)$ et vérifier $u'(x) = P\left(\cos \frac{x}{2}\right)$ où $P : [x \mapsto -8x^4 + 24x^3 - 14x^2 - 12x + 10]$.

Factoriser $u'(x)$ et en déduire le signe de $[f_2(x) - f_1(x)]$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

c) On pose $v(x) = [x - f_2(x)]$. Calculer $v'(x)$ et vérifier $v'(x) = Q\left(\cos \frac{x}{2}\right)$ où Q est une fonction polynomiale.

En déduire le signe de $v'(x)$ puis le signe de $[x - f_2(x)]$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

d) On pose $w(x) = [f_3(x) - x]$. Calculer $w'(x)$, puis établir $w'(x) = F(\cos^{2/3} x)$ où $F : \left[x \mapsto \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^2} \right]$.

Donner le signe de $[f_3(x) - x]$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3° Dans cette question, la valeur de π est supposée inconnue, seules sont connues les valeurs des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{6}$. ($\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

a) Donner des expressions simples à l'aide de radicaux de $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$ en remarquant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.

b) Calculer une expression de $\sin \frac{\pi}{24}$ par radicaux superposés. En déduire une expression par radicaux du nombre $X = 12 f_2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

c) Donner une expression par radicaux de $Y = 12 f_3\left(\frac{\pi}{12}\right)$. En déduire un encadrement de π par radicaux.

d) La calculatrice donne $12 f_2\left(\frac{\pi}{12}\right) \simeq 3.1415619706315679$, $\pi \simeq 3.1415926535897932$, $\left(\frac{\pi}{12}\right)^5 \simeq 0.0012298244791075161$. L'approximation de π par $12 f_2\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est-elle conforme aux espérances ?

FORMULAIRE ANNEXE

$\sin(x) =$	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$	$+o(x^6)$
$\cos(x) =$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$	$+o(x^6)$
$\tan x =$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$	$+o(x^6)$
$(1+x)^\alpha =$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4$	$+o(x^4)$