

1 RACCORD DIFFÉRENTIEL

CORRIGÉ

On cherche les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$(e) : y'' - 4y = 4 - 8|x|$$

1° Les solutions de (e) sur $]0, +\infty[$ sont les solutions sur $]0, +\infty[$ de $(e_+) : y'' - 4y = 4 - 8x$.

Ce sont les $[x \mapsto a.e^{2x} + b.e^{-2x} - 1 + 2x]$.

2° Les solutions de (e) sur $] - \infty, 0[$ sont les solutions sur $] - \infty, 0[$ de $(e_-) : y'' - 4y = 4 + 8x$.

$] - \infty, 0[$ Ce sont les $[x \mapsto a.e^{2x} + b.e^{-2x} - 1 - 2x]$.

3° Soit la fonction φ définie sur \mathbb{R} (avec α et β sont deux constantes réelles) par

$$\begin{cases} \varphi(x) = \alpha \operatorname{ch} 2x + \beta \operatorname{sh} 2x + 2x - 1 & \text{si } x > 0 \\ \varphi(x) = \alpha \operatorname{ch} 2x + (\beta + 2) \operatorname{sh} 2x - 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(0) = \alpha - 1 \end{cases}$$

a) Pour $x > 0$, $\varphi(x) = \frac{\alpha + \beta}{2}e^{2x} + \frac{\alpha - \beta}{2}e^{-2x} - 1 + 2x$ donc φ est solution de (e) sur $]0, +\infty[$.

Pour $x < 0$, $\varphi(x) = \frac{\alpha + \beta + 2}{2}e^{2x} + \frac{\alpha - \beta - 2}{2}e^{-2x} - 1 - 2x$ donc φ est solution de (e) sur $] - \infty, 0[$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \varphi(x) = \alpha - 1 = \varphi(0)$ donc φ est continue en 0.

φ est dérivable à gauche et à droite en 0 et $\varphi'_d(0) = \varphi'_g(0) = 2\beta + 2$ donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 2\beta + 2$.

Pour $x > 0$, $\varphi'(x) = 2\alpha \operatorname{sh} 2x + 2\beta \operatorname{ch}(2x) + 2$, donc $\varphi'(x)$ est dérivable à droite en 0 de nombre dérivé 4α . Pour $x < 0$, $\varphi'(x) = 2\alpha \operatorname{sh} 2x + 2(\beta + 2) \operatorname{ch}(2x) - 2$, donc $\varphi'(x)$ est dérivable à gauche en 0 de nombre dérivé 4α . Ainsi φ est deux fois dérivable en 0 et $\varphi''(0) = 4\alpha$.

On a en conséquence φ deux fois dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) - 4\varphi(x) = 4 - 8|x|$ i.e. φ est solution de (e) sur \mathbb{R} .

4° Soit une solution quelconque f de (e) sur \mathbb{R} .

f est bien sûr solution de (e) sur $]0, +\infty[$, et il existe donc deux réels a_1 et b_1 tels que $\forall x > 0$, $f(x) = a_1.e^{2x} + b_1.e^{-2x} - 1 + 2x$.

f est de même solution de (e) sur $] - \infty, 0[$, et il existe donc deux réels a_2 et b_2 tels que $\forall x < 0$, $f(x) = a_2.e^{2x} + b_2.e^{-2x} - 1 - 2x$.

f continue en 0 impose $a_1 + b_1 - 1 = a_2 + b_2 - 1$.

f dérivable en 0 impose $2a_1 - 2b_1 + 2 = 2a_2 - 2b_2 - 2$.

f deux fois dérivable en 0 ne contraint rien de plus.

f solution sur \mathbb{R} impose $f''(0) - 4f(0) = 4$ qui ne contient rien de plus.

ainsi $\begin{cases} a_1 &= a_2 - 1 \\ b_1 &= b_2 + 1 \end{cases}$. On pose $\begin{cases} \alpha &= a_1 + b_1 \\ \beta &= a_1 - b_1 \end{cases}$ et alors

$$\begin{cases} f(x) = \alpha \operatorname{ch} 2x + \beta \operatorname{sh} 2x + 2x - 1 & \text{pour } x > 0 \\ f(x) = \alpha \operatorname{ch} 2x + (\beta + 2) \operatorname{sh} 2x - 2x - 1 & \text{pour } x < 0 \\ f(0) = \alpha - 1 \end{cases}$$

5° Soit g une solution de (e) sur \mathbb{R} satisfaisant aux conditions initiales $g(0) = g'(0) = 0$. g est donc du type explicité plus haut avec $\alpha - 1 = 0$ et $2\beta + 2 = 0$.

a) Donc $g(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} 2x + 2x - 1 = e^{-2x} + 2x - 1 & \text{pour } x \geq 0 \\ \operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x - 2x - 1 = e^{2x} - 2x - 1 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$

b) g définie sur \mathbb{R} .

pour $x > 0$ $g(-x) = e^{2(-x)} - 2(-x) - 1 = e^{-2x} + 2x - 1 = g(x)$

pour $x < 0$ $g(-x) = e^{-2(-x)} + 2(-x) - 1 = e^{2x} - 2x - 1 = g(x)$

g est ainsi paire.

2 TRANSFORMATION DE LAPLACE

CORRIGÉ

Une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs complexes vérifie la condition $\mathcal{C}(\alpha, A)$ si :

$$f \text{ est continue sur } [0, +\infty[\text{ et pour tout } t \geq 0, \text{ on a } |f(t)| \leq A.e^{\alpha t}.$$

1° f vérifie la condition $\mathcal{C}(\alpha, A)$. Ainsi, pour $x \geq 0$, $|e^{-pt}.f(t)| \leq Ae^{(\alpha-p)t}$. Donc $[t \mapsto e^{-pt}.f(t)]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour $p > \alpha$, p réel.

Pour f vérifiant une condition $\mathcal{C}(\alpha, A)$ et p tel que $[t \mapsto e^{-pt}.f(t)]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, on note $F(p)$ l'intégrale

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.f(t) dt$$

On note \mathcal{L} la correspondance $f \mapsto F$ ainsi établie.

2° a) Pour deux fonctions f et g telles que $[t \mapsto e^{-pt}.f(t)]$ et $[t \mapsto e^{-pt}.g(t)]$ soient intégrables sur $[0, +\infty[$ pour certains p et deux réels λ et μ , on a bien sûr $[t \mapsto e^{-pt}.(\lambda f + \mu g)(t)]$ intégrable sur $[0, +\infty[$. La linéarité de l'intégrale donne alors

$$\forall p \quad \int_0^{+\infty} e^{-pt}.(\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-pt}.f(t) + \mu \int_0^{+\infty} e^{-pt}.g(t)$$

Ainsi, à l'intérieur de l'intersection des ensembles de définition de $\mathcal{L}(f)$ et de $\mathcal{L}(g)$, on a $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$. On pourra dire que \mathcal{L} est linéaire.

b) Exemples :

(i) $f : [t \mapsto 1]$ vérifie $\mathcal{C}(0, 1)$ donc $\mathcal{L}(f)$ est définie sur $[0, +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p}$

(ii) $f : [t \mapsto \cos \omega.t]$ où $\omega \in \mathbb{R}$ vérifie $\mathcal{C}(0, 1)$ donc $\mathcal{L}(f)$ est définie sur $[0, +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$

(iii) $f : [t \mapsto e^{-\lambda.t}]$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathcal{C}(-\lambda, 1)$ donc $\mathcal{L}(f)$ est définie sur $[-|\lambda|, +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p + \lambda}$

3° On suppose f de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ dont la dérivée f' vérifie la condition $\mathcal{C}(\alpha, A)$.

a) Ainsi $\left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^x A e^{\alpha t} dt = \frac{A}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1)$. Donc $|f(x)| \leq |f(0)| + \frac{A}{\alpha} e^{\alpha x}$. Ainsi pour $B \geq \max \left(|f(0)|, \frac{A}{\alpha} \right)$, f vérifie la condition $\mathcal{C}(\alpha, B)$.

b) Avec $p > \alpha$, on a pour $x > 0$,

$$\int_0^x e^{-pt} f(t) dt = \left[f(t) \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-pt}}{-p} f'(t) dt = f(x) \frac{e^{-px}}{-p} - f(0) \frac{1}{-p} + \frac{1}{p} \int_0^x e^{-pt} f'(t) dt$$

Ayant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{-px} = 0$ pour $p > \alpha$, on a $\mathcal{L}(f')(p) = p \mathcal{L}(f)(p) - f(0)$.

4° Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $f_n(t) = e^{-\lambda \cdot t} \frac{t^n}{n!}$ pour $t \geq 0$.

a) On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $f'_{n+1} = -\lambda f_{n+1} + f_n$.

b) La fonction f_n , pour n quelconque, vérifie une condition $\mathcal{C}(\alpha, A)$ si et seulement si $\left[x \mapsto e^{-\lambda \cdot x} \frac{x^n}{n!} e^{-\alpha x} \right]$ est bornée sur $[0, +\infty[$. Or cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$ et de limite finie en $+\infty$ si et seulement si $-\Re(\lambda) - \alpha < 0$. Ainsi les fonctions f_n et leurs dérivées vérifient toutes une condition $\mathcal{C}(\alpha, A)$ avec $\alpha > -\Re(\lambda)$.

Pour $p > -\Re(\lambda)$ on a alors $\mathcal{L}(f'_{n+1})(p) = (-\lambda \mathcal{L}(f_{n+1})(p) + \mathcal{L}(f_n)(p))$. De $\mathcal{L}(f'_{n+1})(p) = p \mathcal{L}(f_{n+1})(p) - f(0)$ on tire

$$\forall n \quad \mathcal{L}(f_{n+1})(p) = \frac{1}{\lambda + p} \mathcal{L}(f_n)(p)$$

d'où par une récurrence évidente, à partir de $\mathcal{L}(f_0)(p) = \frac{1}{\lambda + p}$ on tire

$$\forall n, \forall p > -\Re(\lambda) \quad \mathcal{L}(f_n)(p) = \left(\frac{1}{\lambda + p} \right)^{n+1}$$

5° On désigne par f la solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (e) : $y'' - 7y' + 6y = e^{-x}$ satisfaisant la condition initiale $(0, 1, 1)$ (i.e. $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$).

a) Puisque $\forall x \geq 0$ $f''(x) - 7f'(x) + 6f(x) = e^{-x}$, on tire par linéarité de la correspondance \mathcal{L} , dans un domaine à préciser, $\mathcal{L}(f'')(p) - 7\mathcal{L}(f')(p) + 6\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p+1}$ puis à partir de $\mathcal{L}(f')(p) = p \mathcal{L}(f)(p) - 1$ et $\mathcal{L}(f'')(p) = p \mathcal{L}(f')(p) - 1$ on obtient

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{p^2 - 5p - 5}{(p+1)(p^2 - 7p + 6)}$$

b) On a donc $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{p^2 - 5p - 5}{(p+1)(p^2 - 7p + 6)} = \frac{1}{14} \frac{1}{p+1} + \frac{9}{10} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{35} \frac{1}{p-6}$ qui correspond à la fonction

$$f(x) = \frac{1}{14} e^{-x} + \frac{9}{10} e^x + \frac{1}{35} e^{6x}$$

c) Une résolution directe de (e) fait chercher les solutions de son équation caractéristique : 1 et 6, puis les solutions sur $[0, +\infty[$ de l'équation homogène, les $[x \mapsto a \cdot e^x + b \cdot e^{6x}]$. Une solution particulière est $[x \mapsto \frac{1}{14} e^{-x}]$. Il reste à chercher a et b pour que $[x \mapsto \frac{1}{14} e^{-x} + a \cdot e^x + b \cdot e^{6x}]$ satisfasse aux conditions initiales.

6° On désigne par (φ, ψ) la solution sur $[0, +\infty[$ du système différentiel $\begin{cases} y' = -y + 2z \\ z' = -y - 4z \end{cases}$ qui satisfait à la condition initiale $(0, (1, 1))$ (i.e. $\varphi(0) = \psi(0) = 1$). On pose $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$ et $\Psi = \mathcal{L}(\psi)$.

a) On a, pour tout x de $[0, +\infty[$ $\begin{cases} \varphi'(x) &= -\varphi(x) + 2\psi(x) \\ \psi'(x) &= -\varphi(x) - 4\psi(x) \end{cases}$ donc $\begin{cases} \mathcal{L}(\varphi')(p) &= -\mathcal{L}(\varphi)(p) + 2\mathcal{L}(\psi)(p) \\ \mathcal{L}(\psi')(p) &= -\mathcal{L}(\varphi)(p) - 4\mathcal{L}(\psi)(p) \end{cases}$ pour tout p

d'un domaine à préciser et donc $\begin{cases} p\Phi(p) - 1 &= -\Phi(p) + 2\Psi(p) \\ p\Psi(p) - 1 &= -\Phi(p) - 4\Psi(p) \end{cases}$

b) On en déduit pour tout p $\begin{cases} \Phi(p) &= \frac{p+6}{p^2+5p+6} = \frac{-3}{p+3} + \frac{4}{p+2} \\ \Psi(p) &= \frac{p}{p^2+5p+6} = \frac{3}{p+3} + \frac{-2}{p+2} \end{cases}$

c) On en déduit, pour tout $x \geq 0$ $\begin{cases} \varphi(x) &= -3e^{-3x} + 4e^{-2x} \\ \psi(x) &= 3e^{-3x} - 2e^{-2x} \end{cases}$

F I N
