

1 CARRÉ COMPLEXE

CORRIGÉ

A, B, C et D sont quatre points, deux à deux distincts, du plan euclidien orienté. On note a, b, c et d leurs affixes dans un repère orthonormal direct. On suppose $a + ib = c + id$ et $a + c = b + d$.

$[AC]$ a pour milieu O d'affixe $\frac{1}{2}(a + c) = \frac{1}{2}(b + d)$, c'est donc aussi le milieu de $[BD]$; ainsi $ABCD$ est un parallélogramme. De plus $(c - a) = i(b - d)$ donc les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{DB} ont même norme et sont orthogonaux; le parallélogramme $ABCD$ est donc un carré.

La réciproque n'est pas vraie puisque les mêmes arguments auraient pu être produits avec $a - ib = c - id$ et $a + c = b + d$.

2 COURBE FONCTIONNELLE

CORRIGÉ

Soit $f : \left[x \mapsto \frac{(x-1)^2}{x} e^{1/x} \right]$ et \mathcal{C} sa courbe dans (O, \vec{i}, \vec{j}) . On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{u \rightarrow -\infty} u e^u = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = 0$. Soit A le point de coordonnées $(0, 0)$ et $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \cup \{A\}$.

b) Pour $x < 0$ et M le point de \mathcal{C} d'abscisse x , la droite (AM) a pour pente $\frac{f(x) - 0}{x - 0} = (x-1)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 e^{1/x}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{u \rightarrow -\infty} u^2 e^u = 0$ donc \mathcal{C}^* admet en A l'axe (O, \vec{i}) pour tangente.

c) f est dérivable en tout réel non nul. Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+1)}{x^3} e^{1/x}$.

Le signe de f' est alors connu. Les limites de f ne posent pas de problème et on dresse son tableau de variations :

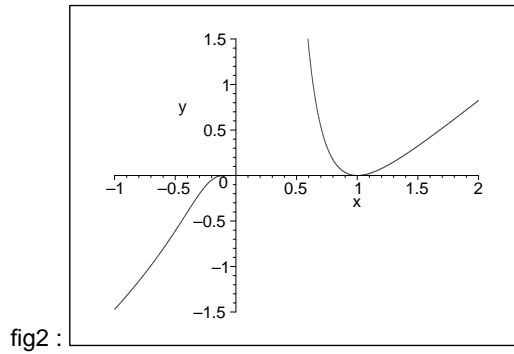
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
f	$-\infty$	0	$+\infty$	0

d) Pour $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 e^{1/x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Pour $x \neq 0$, $f(x) - x = \frac{(e^{1/x} - 1)}{1/x} - 2e^{1/x} + \frac{e^{1/x}}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$.

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = -1$ donc \mathcal{C}^* admet ainsi la droite d'équation $y = x - 1$ comme asymptote oblique.

e) \mathcal{C} a l'allure donnée par la figure 2.



3 COURBE PARAMÉTRÉE, SYMÉTRIE CACHÉE

CORRIGÉ

Soit Γ la courbe définie par le paramétrage $\begin{cases} x = \frac{t^2-4}{t+1} \\ y = \frac{1-4t^2}{t(t+1)} \end{cases} \quad (t \in \mathcal{D}).$

a) On a $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Pour $t \in \mathcal{D}$, on a $\begin{cases} x(1/t) = \frac{1-4t^2}{t(t+1)} = y(t) \\ y(1/t) = \frac{t^2-4}{t+1} = x(t) \end{cases}$. Ainsi le point de Γ de paramètre $\frac{1}{t}$ se déduit du point de paramètre t par la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

b) Les fonctions $[t \mapsto x(t)]$ et $[t \mapsto y(t)]$ sont dérivables en tous points de \mathcal{D} et, pour $t \in \mathcal{D}$, $\begin{cases} x'(t) = \frac{t^2+2t+4}{(t+1)^2} \\ y'(t) = -\frac{4t^2+2t+1}{(t+1)^2 t^2} \end{cases}$.

Les variations des deux fonctions, et leurs limites ne posent pas de problème :

t	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x'(t)$	+		+	+
x	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -4$	$-4 \nearrow +\infty$	
$y'(t)$	-		-	-
y	$-4 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -4$	

c) La courbe Γ présente six branches infinies. Deux ont pour asymptote la droite d'équation $y = -4$ (valeurs de t vers $+\infty$ et $-\infty$), deux ont pour asymptote la droite d'équation $x = -4$ (valeurs de t vers 0).

Pour $t \in \mathcal{D}$, $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1-4t^2}{t(t^2-4)}$. On a donc $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$.

Enfin, pour $t \in \mathcal{D}$, $y(t) + x(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t}$ et $\lim_{t \rightarrow -1} y(t) + x(t) = -7$. Ainsi la droite d'équation $y = -x - 7$ est asymptote oblique à \mathcal{D} (valeurs de t vers -1).

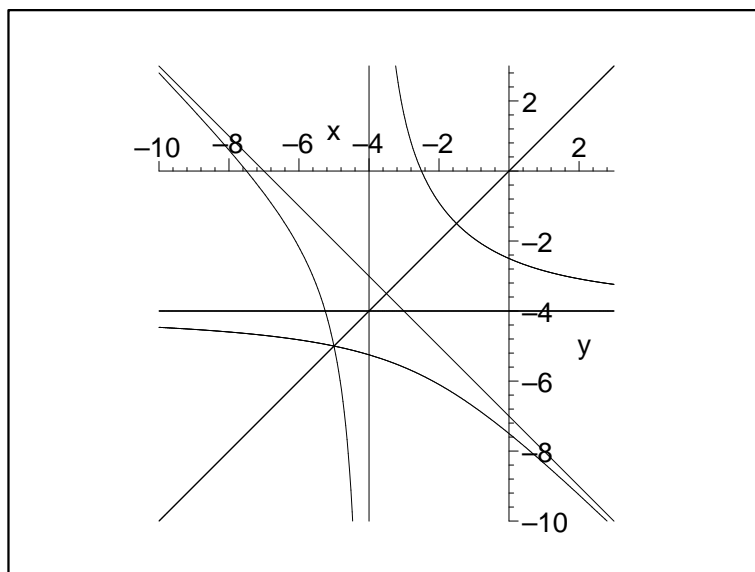
d) Recherche d'un point double dans Γ : les points de paramètres t_1 et t_2 , inverses l'un de l'autre, sont identiques si et seulement si $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$ donc si et seulement si t_1 et t_2 sont solutions distinctes de l'équation sur \mathcal{D} (e) : $x(t) = y(t)$.

Or on a

$$(e) \iff (t^2 - 4)t = 1 - 4t^2$$

$$(e) \iff (t-1)(t^2 + 5t + 1) = 0$$

Ainsi le point double a pour paramètres $\frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$ et $\frac{-5 - \sqrt{21}}{2}$ donc pour coordonnées $(-5, -5)$.



e) La courbe Γ est ainsi :

4 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE NON LINÉAIRE

CORRIGÉ

Soit l'équation différentielle $(E) : (x^2 + 1)y'' - 2y = 0$.

1° Soit P une fonction polynomiale non nulle.

P est solution de (E) si et seulement si, pour tout x réel, $(x^2 + 1)P''(x) = 2P(x)$. P constante ou de degré 1 ne peut être solution. Pour P de degré n et de terme de plus haut degré $a_n x^n$, on a P'' de degré $(n - 2)$ et de terme de plus haut degré $n(n - 1)x^{n-2}$. Ainsi P solution de (E) impose $n(n - 1) = 2$ donc $n = 2$.

Posons $P : [x \mapsto ax^2 + bx + c]$ (avec $a \neq 0$).

P solution de (E) si et seulement si pour tout x , $(x^2 + 1)(2a) - 2(ax^2 + bx + c) = 0$ donc si et seulement si $b = 0$, $c = a$. Prenons $s : [x \mapsto x^2 + 1]$ une telle solution.

2° Soit f définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} ; on pose $g = \frac{f}{s}$.

a) Puisque s ne s'annule pas sur \mathbb{R} , on a g définie sur \mathbb{R} et dérivable.

Puisque, pour tout x , $g'(x) = \frac{f'(x)(x^2 + 1) - 2x f(x)}{(x^2 + 1)^2}$, on déduit g' à nouveau dérivable sur \mathbb{R} .

b) Pour tout x , $f'(x) = 2x g(x) + (x^2 + 1)g'(x)$ puis $f''(x) = 2g(x) + 4x g'(x) + (x^2 + 1)g''(x)$. Donc f est solution de (E) sur \mathbb{R} si et seulement si on a pour tout x : $(x^2 + 1)(4x g'(x) + (x^2 + 1)g''(x)) = 0$ donc si et seulement si g' est solution sur \mathbb{R} de l'équation $(E') : (x^2 + 1)y' + 4xy = 0$.

3° (E') est linéaire homogène du premier ordre; ses solutions sur \mathbb{R} sont les $[x \mapsto \frac{k}{(x^2 + 1)^2}]$ où $k \in \mathbb{R}$.

Pour tout x , on a $\frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1 - \frac{1}{2}(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{(x^2 + 1)} - \frac{\frac{1}{2}(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$. Donc les primitives sur \mathbb{R} des solutions de (E')

sont les $[x \mapsto k \frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + c]$ où $(c, k) \in \mathbb{R}^2$.

Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont donc les $[x \mapsto d(x + (x^2 + 1) \arctan x) + c(x^2 + 1)]$ où $(c, d) \in \mathbb{R}^2$.

5 CAS ÉLÉMENTAIRE DE COURBE DE BÉZIER

CORRIGÉ

Le plan euclidien orienté est, par le choix d'un repère orthonormal direct, confondu avec \mathbb{C} .

On cherche une courbe passant par les points complexes c_1 et c_2 (dits points de construction) et dont les tangentes en ces points passent respectivement par les points d'affixes c_3 et c_4 (dits points de contrôle).

a) On pose $P : \left[t \mapsto c_1 (1-t)^3 + 3c_3 t (1-t)^2 + 3c_4 t^2 (1-t) + c_2 t^3 \right]$ et $\mathcal{C} = \{P(t) / t \in [0, 1]\}$.

On a $P(0) = c_1$ et $P(1) = c_2$: les points c_1 et c_2 sont bien dans la courbe \mathcal{C} .

De plus, pour tout t , $\vec{P}'(t) = -3c_1 (1-t)^2 + 3c_3 (1-t)^2 - 6c_3 t (1-t) + 6c_4 t (1-t) - 3c_4 t^2 + 3c_2 t^2$.

Ainsi $\vec{P}'(0) = -3c_1 + 3c_3 = 3 \cdot \overrightarrow{c_1 c_3}$. Donc la tangente en c_1 à \mathcal{C} passe par c_3 .

De même $\vec{P}'(1) = -3c_4 + 3c_2 = -3 \cdot \overrightarrow{c_2 c_4}$. Donc la tangente en c_2 à \mathcal{C} passe par c_4 .

b) On note c_{13} le milieu de $[c_1, c_3]$, c_{34} le milieu de $[c_3, c_4]$, c_{42} le milieu de $[c_4, c_2]$, puis c_{134} le milieu de $[c_{13}, c_{34}]$ et c_{342} le milieu de $[c_{34}, c_{42}]$.

On a $c_{1234} = \frac{1}{8} (c_1 + 3c_3 + 3c_4 + c_2) = P\left(\frac{1}{2}\right)$ le milieu de $[c_{134}, c_{342}]$ qui est donc un point de \mathcal{C} .

De plus $\vec{P}'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_3 + \frac{3}{4}c_4 + \frac{3}{4}c_2 = 3(c_{342} - c_{134}) = -3 \cdot \overrightarrow{c_{134} c_{342}}$ dirige la tangente à \mathcal{C} en c_{1234} .

Ainsi le segment $[c_{134}, c_{342}]$ est tangent, en son milieu c_{1234} , à \mathcal{C} .