

I.S.E.P.

CYCLE PRÉPARATOIRE

MATH.SUP. 2

2001 - 2002

Devoir 08

MATHÉMATIQUES

27 mai 2002

durée 3 heures 30

calculatrice non autorisée

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PROBLÈME

familles de courbes intégrales

(20 points)

Etant donnés deux réels α et γ avec $|\gamma| \leq 1$, on désigne par $E_{\alpha,\gamma}$ l'ensemble des applications f de \mathbb{R} dans lui-même, dérivables et telles que, pour tout réel t , $f'(t) = e^{\alpha t} f(\gamma t)$

Préliminaires

- 1° Montrer que toute application f de $E_{\alpha,\gamma}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- 2° Montrer que $E_{\alpha,\gamma}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Partie A

On suppose dans cette partie $\gamma = 1$ et α réel quelconque.

- 1° Déterminer $E_{0,1}$.

On suppose désormais que α est différent de 0.

- 2° Déterminer $E_{\alpha,1}$, en considérant pour f dans $E_{\alpha,1}$, l'application φ définie par $\varphi(t) = f(t) \exp\left(-\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\right)$.
- 3° a) Montrer qu'il existe une unique fonction de $E_{\alpha,1}$ prenant la valeur 1 en 0 ; elle sera désignée par f_α .
b) Etudier le sens des variations de f_α .
- 4° On prend pour cette question $\alpha = -\frac{1}{e} = -e^{-1}$.
a) Etudier le signe de la dérivée seconde de $f_{-e^{-1}}$.
b) Etablir le tableau complet des variations de $f_{-e^{-1}}$.
c) Tracer la courbe représentative de $f_{-e^{-1}}$.

Partie B

On suppose dans cette partie que $\gamma = -1$, α étant toujours un paramètre réel quelconque.

1° Déterminer une équation différentielle (L_α) , linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, telle que pour toute application f de $E_{\alpha,-1}$, f soit solution de (L_α) .

2° Résoudre (L_α) en distinguant les quatre cas : $|\alpha| < 2$, $|\alpha| > 2$, $\alpha = 2$ et $\alpha = -2$.

3° Déterminer $E_{\alpha,-1}$ dans chacun des quatre cas précédents.

Partie C

On suppose, dans cette partie $\alpha = 1$ et $\gamma \in]0, 1[$ et on considère une application f de $E_{1,\gamma}$ telle que $f(0) > 0$ (on admet l'existence d'une telle application).

1° a) Etablir pour tout réel t , l'égalité $f(t) = f(0) + \int_0^t e^u f(\gamma u) du$

b) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que, pour tout t de $[0, a]$, $f(t)$ soit positif.

c) Montrer alors que f est positive sur $\left[0, \frac{a}{\gamma}\right]$; en déduire que f est positive sur $[0, +\infty[$.

d) Montrer que f est positive sur \mathbb{R} .

2° Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et g l'application de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par $g = f \circ \ln$.

Démontrer que f est un élément de $E_{1,\gamma}$ si et seulement si g est dérivable et vérifie la condition :

$$(*) : \forall x > 0, g'(x) = g(x^\gamma)$$

3° On suppose dans cette question que g est une application définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ vérifiant $(*)$ et telle que $g(1) = 1$.

a) Montrer que g est croissante sur $]0, +\infty[$.

b) On note $u(x) = g(x) - x$, pour tout réel $x > 0$; étudier le sens des variations de u .

c) Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 par une valeur $b > 0$ (on notera G ce prolongement).

d) Montrer que G est dérivable en 0 et donner la valeur de $G'(0)$.

e) Déterminer à l'aide de ψ définie sur $[0, +\infty[$ par $\psi(x) = (\gamma + 1)G(x) - x^{\gamma+1} - \gamma$: une majoration de b puis la limite en $+\infty$ de $\left[x \mapsto \frac{G(x)}{x}\right]$.

4° On garde les conventions précédentes. Donner pour $\gamma = \frac{1}{2}$ la courbe représentative de g puis celle de f .

F I N
