

E est l'ensemble des fonctions numériques réelles, définies sur \mathbb{R} et continues sur \mathbb{R} .

$a > 0$ un réel fixé. Pour f continue sur \mathbb{R} , $m_a(f) : \left[x \mapsto \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f \right]$ est la moyenne spatiale de paramètre a de la fonction f .

étude analytique de $m_a(f)$

1° Soit $f \in E$ quelconque.

a) f continue sur \mathbb{R} admet sur \mathbb{R} une primitive F ; F est alors de classe C^1 sur \mathbb{R} . De plus pour tout x , $m_a(f)(x) = \frac{1}{2a} (F(x+a) - F(x-a))$. Donc $m_a(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $[m_a(f)]'(x) = \frac{1}{2a} (f(x+a) - f(x-a))$.

2° Soit $f \in E$ quelconque.

a) Si f est $2a$ -périodique, alors pour tout x , $f(x-a) = f(x-a+2a)$ et donc $[m_a(f)]'(x) = 0$. Ainsi $m_a(f)$ est constante sur \mathbb{R} .

b) Pour $m_a(f)$ est constante sur \mathbb{R} , $[m_a(f)]'(x) = 0$ pour tout x et donc $f(x-a) = f(x+a)$ pour tout x : $m_a(f)$ est $2a$ -périodique.

3° Soit $f \in E$ quelconque.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} [m_a(f)](-x) &= \frac{1}{2a} \int_{-x-a}^{-x+a} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x+a}^{x-a} f(-u) (-du) \text{ (changement de variable } u = -t) \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(-u) du \\ &= \begin{cases} [m_a(f)](x) & \text{si } f \text{ est paire} \\ -[m_a(f)](x) & \text{si } f \text{ est impaire} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $m_a(f)$ est de la même parité que f .

4° Comme $m_a(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , on a :

$$\begin{aligned} m_a(f) \text{ monotone} &\iff [m_a(f)]' \text{ de signe constant sur } \mathbb{R} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x-a) \text{ de signe constant} \end{aligned}$$

Si f est croissante sur \mathbb{R} , $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+a) - f(x-a) \geq 0$, ainsi $[m_a(f)]' \geq 0$ et $m_a(f)$ croissante sur \mathbb{R} ; de même si f est décroissante sur \mathbb{R} , alors $m_a(f)$ décroissante sur \mathbb{R} .

Ainsi $m_a(f)$ est de même monotonie que f .

5° On suppose qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $|x| > A$. Par continuité de f , on a d'ailleurs $f(x) = 0$ pour $|x| \geq A$.

a) $m_a(f)$ est à support borné car :

pour $x > A + a$, on a $[x - a, x + a] \subset]A, +\infty[$, donc $[m_a(f)](x) = 0$, et

pour $x < -A - a$, on a $[x - a, x + a] \subset]-\infty, -A[$, donc $[m_a(f)](x) = 0$, d'où $[m_a(f)](x) = 0$ pour $|x| > A + a$.

b) On intègre par parties en posant $u = m_a(f)$ et $v' = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{-A-a}^{A+a} [m_a(f)](t) dt &= [t [m_a(f)](t)]_{-A-a}^{A+a} - \int_{-A-a}^{A+a} t \frac{1}{2a} (f(t+a) - f(t-a)) dt \\ &= \frac{A+a}{2a} \left(\int_A^{A+2a} f(t) dt - \int_{-A-2a}^{-A} f(t) dt \right) + \frac{1}{2a} \left(- \int_{-A}^{A+2a} (u-a)f(u) du + \int_{-A-2a}^A (u+a)f(u) dv \right) \\ &= 0 + \frac{1}{2a} \left(- \int_{-A}^A (u-a)f(u) du + \int_{-A}^A (u+a)f(u) dv \right) \quad \text{car } f(x) = 0 \text{ pour } |x| > A \\ &= \int_{-A}^A f(u) du \end{aligned}$$

étude algébrique de m_a

1° On regarde m_a comme une application de E dans E , puisque $m_a\langle E \rangle \subset E$.

a) Pour deux éléments f et g quelconques de E , on a $m_a(f+g) = m_a(f) + m_a(g)$ par linéarité de l'intégration.

b) Pour $f : \left[x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]$,

$$m_a(f) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} \cos\left(\frac{\pi t}{a}\right) dt = \left[\frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right) \right]_{x-a}^{x+a} = \frac{1}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{a} + \pi\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{a} - \pi\right) \right] = 0$$

c) $m_a(f) = 0$ si, et seulement si, f est périodique de période $2a$ et $\frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, f est périodique de période $2a$ et d'intégrale nulle sur une période.

L'exemple précédent prouve que m_a n'est pas injectif.

d) m_a n'est pas surjectif car $\text{Im}(m_a) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \subsetneq E$.

2° Pour $p \leq n$, on note $f_p : [x \mapsto x^p]$. On a : $[m_a(f_p)](x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} t^p dt = \frac{1}{2a(p+1)} ((x+a)^{p+1} - (x-a)^{p+1})$

$m_a(f_p)$ est donc une fonction polynôme de degré au plus égal à $p+1$. Enfin le degré de $m_a(f_p)$ est au plus p puisque le coefficient de x^{p+1} est $\frac{1}{2a(p+1)}(1-1) = 0$.

On en déduit que si f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n , alors $m_a(f)$ est aussi une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n .

moyenne spatiale des polynômes de Tchébychev

On définit dans $\mathbb{R}[X]$ la suite de polynômes (dits polynômes de Tchébychev) $(T_n)_n$ par

$$T_0 = 1 \quad T_1 = \frac{1}{a} X \quad \forall p \quad T_{p+2} = \frac{2}{a} X T_{p+1} - T_p$$

1° a) $T_2 = \frac{2}{a^2} X^2 - 1$ et $T_3 = \frac{4}{a^3} X^3 - \frac{3}{a} X$.

b) Une récurrence simple donne que le degré de T_p est p et son coefficient dominant, pour $p \geq 1$, est $\frac{2^{p-1}}{a^p}$.

c) x est un réel fixé : on montre par récurrence : $\forall p \quad T_p(a \cos x) = \cos(px)$.

Ceci est bien sûr vérifié pour $p = 0$ et $p = 1$.

Soit $p \geq 2$ et on suppose la formule vraie **jusqu'au rang p** ; l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(p+1)x + \cos(p-1)x = 2 \cos x \cos px$$

montre que

$$\begin{aligned} T_{p+1}(a \cos x) &= \frac{2a \cos x}{a} T_p(a \cos x) - T_{p-1}(a \cos x) \\ &= 2 \cos x \cos px - \cos(p-1)x = \cos(p+1)x \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $(p+1)$; le théorème de récurrence donne $\forall (p, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, T_p(a \cos x) = \cos px$.

d) On fait $x = \frac{\pi}{2}$ dans la formule précédente et $T_p(0) = \cos p \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ (-1)^{\frac{p}{2}} & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}$

On fait $x = 0$ dans la même formule et $T_p(a) = \cos p \times 0 = 1$

e) La fonction T_0 est constante donc paire, et la fonction T_1 est impaire. Un enchaînement évident amène : la fonction polynomiale T_p a la même parité que p .

2° On note g_p la fonction $[x \mapsto T_p(a \cos x)]$.

a) De l'identité précédente on tire $g'_p(x) = -a \sin x T'_p(a \cos x) = -p \sin px$

b) D'où pour $x \in]0, \pi[$ $T'_p(a \cos x) = \frac{p \sin px}{a \sin x}$.

c) T'_p est continue puisque T_p est une fonction polynomiale. Dans l'égalité précédente, en faisant tendre x vers 0, on a $T'_p(a) = \frac{p^2}{a}$ puisque $T'_p(a \cos x) \underset{0}{\sim} \frac{p \sin px}{a \sin x}$.

3° a) Pour p impair, la fonction T_p est impaire et donc $m_a(T_p)(0) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a T_p(t) dt = \frac{1}{2a} \int_{-a}^0 T_p(t) dt + \frac{1}{2a} \int_0^a T_p(t) dt = \frac{1}{2a} \int_a^0 -T_p(-u) du + \frac{1}{2a} \int_0^a T_p(t) dt = \frac{1}{2a} \int_a^0 T_p(u) du + \frac{1}{2a} \int_0^a T_p(t) dt = 0$.

b) Par la formule du changement de variable utilisée avec $\varphi : [t \mapsto a \cos t]$, C^1 sur \mathbb{R} , on établit

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_0^a T_{2k}(t) dt &= \frac{1}{a} \int_{\pi/2}^0 T_{2k}(a \cos u) (-a \sin u) du \\ &= \frac{1}{a} \int_{\pi/2}^0 -a \cos(2k u) \sin u du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\sin(2k+1)u - \sin(2k-1)u] du \end{aligned}$$

c) Pour p pair, la fonction T_p est paire. Donc

$$\begin{aligned} m_a(T_p)(0) &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a T_p(t) dt = \frac{1}{2a} \int_{-a}^0 T_p(t) dt + \frac{1}{2a} \int_0^a T_p(t) dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_a^0 -T_p(-u) du + \frac{1}{2a} \int_0^a T_p(t) dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_a^0 -T_p(u) du + \frac{1}{2a} \int_0^a T_p(t) dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a T_p(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\sin(p+1)u - \sin(p-1)u] du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos(p+1)u}{p+1} + \frac{\cos(p-1)u}{p-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1} \right) = \frac{1}{1-p^2} \end{aligned}$$

4° a) Utilisons la formule $[m_a(f)]'(x) = \frac{1}{2a}(f(x+a) - f(x-a))$ pour l'appliquer au polynôme T_p .

$$\begin{aligned} [m_a(T_p)]'(0) &= \frac{1}{2a} [T_p(x+a) - T_p(x-a)]_{x=0} = \frac{1}{2a} [T_p(a) - T_p(-a)] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair} \\ \frac{1}{a} T_p(a) = \frac{1}{a} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases} \\ [m_a(T_p)]''(0) &= \frac{1}{2a} [T_p'(x+a) - T_p'(x-a)]_{x=0} = \frac{1}{2a} [T_p'(a) - T_p'(-a)] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \frac{1}{a} T_p'(a) = \frac{p^2}{a^2} & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases} \end{aligned}$$

b) Le polynôme $m_a(T_p)$ admet un développement limité à tout ordre comme fonction C^∞ sur \mathbb{R} , donc un $DL_2(0)$ donné par la formule de Taylor-Young :

$$[m_a(T_p)](x) = [m_a(T_p)](0) + \frac{[m_a(T_p)]'(0)}{1!}x + \frac{[m_a(T_p)]''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

ce qui donne

$$[m_a(T_p)](x) = \begin{cases} \frac{1}{1-p^2} + \frac{p^2}{2a^2}x^2 + o(x^2) & \text{si } p \text{ est pair} \\ \frac{1}{a}x + o(x^2) & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

c) $m_a(X^k)$ est un polynôme unitaire de degré k , ce qui montre que $m_a(T_p)$ est un polynôme de degré p dont le terme dominant est le terme dominant de T_p . En effet

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} X^k &= \frac{1}{2a} \frac{1}{k+1} [(x+a)^{k+1} - (x-a)^{k+1}] \\ &= x^k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{C_{k+1}^j}{k+1} \left(\frac{1 - (-1)^{k+1-j}}{2} \right) x^j a^{k-j} \end{aligned}$$

Ainsi $[m_a(T_p)](x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{p-1}}{a^p} x^p$

F I N
