

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

DEVOIR D'ANALYSE

(noté sur 12 points)

durée conseillée 2 heures 15 ; en aucun cas n'y passer plus de 2 heures 30

Partie A

Pour tout réel a positif ou nul, on note γ_a la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\gamma_a(t) = t^a$.

1° a) Montrer que la fonction γ_a est prolongeable par continuité en 0 (on notera g_a la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur $[0, +\infty[$). Préciser la valeur de $g_a(0)$.

b) Pour $a \geq 1$, montrer que la fonction g_a est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

Pour a et b deux réels positifs ou nuls, on pose $I(a, b) = \int_0^1 g_a(t) g_b(1-t) dt$. Ceci a un sens puisque g_a et g_b sont connues continues sur $[0, 1]$. On écrira abusivement $I(a, b) = \int_0^1 t^a (1-t)^b dt$.

2° Soient a et b deux réels positifs ou nuls. Comparer $I(a, b)$ et $I(b, a)$.

3° Soient a et b deux réels positifs ou nuls. Trouver une relation entre $I(a+1, b)$ et $I(a, b+1)$.

4° Calculer $I(a, 0)$ pour $a > 0$. En déduire que, pour tout entier naturel n et tout réel a positif, on a

$$I(a, n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2) \dots (a+n+1)}.$$

5° Soient p et q deux entiers naturels. Exprimer $I(p, q)$ à l'aide de factorielles.

6° En déduire la valeur de l'intégrale $J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p+1} (\cos \theta)^{2q+1} d\theta$ où p et q sont deux entiers naturels.

Partie B

Pour tout réel a positif, on note f_a la fonction définie par $f_a(x) = x \ln \left(1 - \frac{a}{x}\right)$.

1° Préciser l'ensemble de définition de f_a .

On note \mathcal{C}_a la courbe représentant la restriction éventuelle de la fonction f_a à l'intervalle $]a, +\infty[$.

2° Si a et x sont deux réels tels que $0 < a < x$, démontrer l'encadrement $\frac{a}{x} \leq \ln x - \ln(x - a) \leq \frac{a}{x - a}$.

3° En déduire les variations de la fonction f_a sur l'intervalle $]a, +\infty[$ (on dressera un tableau de variations). Préciser la nature des branches infinies de la courbe \mathcal{C}_a .

4° Donner l'allure des courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 sur un même schéma.

5° On fixe $a > 0$ et on considère la suite $(y_n)_{n>a}$ définie, en tout entier naturel n tel que $n > a$, par $y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$.

a) Étudier la monotonie de la suite $(y_n)_{n>a}$.

b) La suite $(y_n)_{n>a}$ est-elle convergente?

6° Pour n fixé et $0 < a < n$, justifier $\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n < e^{-a}$.

Partie C

Pour tout réel positif ou nul x et tout entier naturel non nul n , on pose $F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x du$.

1° Montrer que $F_n(x) = n^{x+1} I(x, n)$.

2° En utilisant les résultats de la partie précédente, montrer que, pour tout x fixé, la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

3° On fixe $x \geq 0$.

a) Pour tout n , montrer à l'aide de la partie B la majoration $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}$ pour $0 < u < n$.

b) En déduire $F_n(x) \leq \int_0^n e^{-u} u^x du$ pour tout n .

c) Montrer l'existence d'un réel positif U tel que

$$\forall u \in [0, +\infty[, \quad u \geq U \Rightarrow e^{-u} \leq \frac{1}{u^{x+2}}$$

d) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a

$$F_n(x) \leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \frac{1}{U}$$

e) Montrer que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout réel positif ou nul x , on pose $F(x) = \lim_n F_n(x)$.

4° a) Démontrer pour tout n , $F_n(x+1) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{x+2} (x+1) F_{n+1}(x)$.

b) En déduire la relation fonctionnelle

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x+1) = (x+1) F(x)$$

c) En déduire la valeur de $F(k)$ pour k entier naturel.

DEVOIR D'ALGÈBRE

(noté sur 12 points)

la seconde partie n'est pas déterminante pour l'évaluation du devoir et ne saurait justifier une perte de temps de votre part au détriment de ce qui la précède ; ainsi la durée conseillée est de 1 heure 45, en aucun cas n'y passer plus de 2 heures 00

Dans cet exercice, l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 est rapporté à sa base canonique \mathcal{B} et on identifie :

- . tout vecteur de \mathbb{R}^2 à la matrice colonne V de ses composantes x et y dans \mathcal{B} .
- . tout endomorphisme de \mathbb{R}^2 à sa matrice M dans \mathcal{B} .

Pour tout vecteur V ou pour toute matrice M , on désigne par $\phi(V)$ ou $\phi(M)$ la somme des carrés des deux composantes de V ou des quatre coefficients de M .

On note enfin \mathcal{T} l'ensemble des matrices réelles M d'ordre 2 telles que :

- . M est symétrique.
- . M est de rang inférieur ou égal à 1.
- . M a des valeurs propres, réelles, positives ou nulles.

Etude des matrices appartenant à \mathcal{T}

1° Etudier l'appartenance à \mathcal{T} des trois matrices A, B, C définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2° Pour tout vecteur V de composantes réelles x, y , on pose $M = V {}^tV$ où tV désigne la transposée de V .

- Comparer $\phi(M)$ et $[\phi(V)]^2$ et montrer que M est nulle si et seulement si V est nul.
- Montrer que $MV = \phi(V).V$ et que $M^2 = \phi(V).M$.
- Déterminer en fonction de V les valeurs propres et les vecteurs propres de M pour $V \neq 0$.
- Etablir que M appartient à \mathcal{T} .

3° On considère réciproquement une matrice M non nulle de \mathcal{T} .

- Montrer qu'il existe un vecteur non nul X appartenant à \mathbb{R}^2 tel que $\text{Im } M = \text{Vect}(X)$, puis un vecteur non nul Y appartenant à \mathbb{R}^2 tel que $M = X {}^tY$.
- Montrer, en utilisant la symétrie de la matrice M , qu'il existe un nombre réel non nul λ tel que $Y = \lambda.X$.
- Montrer enfin que λ est positif et en déduire l'existence d'un vecteur non nul V tel que $M = V {}^tV$.

4° On considère l'application f associant à tout vecteur V de \mathbb{R}^2 la matrice carrée $f(V) = V {}^tV$.

- f est-elle une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
- f est-elle surjective de \mathbb{R}^2 sur \mathcal{T} ?
- f est-elle injective ?

matrices M de \mathcal{T} minimisant l'expression $\phi(A - M)$

On considère dans cette partie deux nombres réels p, q tels que $0 < p < q < 1$ et de somme $p + q = 1$. On note A la matrice symétrique $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$

1° La matrice A appartient-elle à \mathcal{T} ?

2° Pour x, y réels, on pose $F(x, y) = \phi(A - V^t V)$ où V est le vecteur de composantes x et y .

a) Expliciter la matrice $A - V^t V$, puis donner l'expression de $F(x, y)$ en fonction de x, y .

b) Calculer les dérivées partielles de F , $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$. Justifier que F est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 .

c) Résoudre le système (s) : $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v}(x, y) = 0 \end{cases}$ où $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$. En déduire les points critiques de F : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ et $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

d) Donner des équivalents en 0 de $F(x, x) - F(0, 0)$ et de $F(x, -x) - F(0, 0)$.

F présente-t-elle un extremum en $(0, 0)$?

e) Etablir pour tout couple (x, y) de nombres réels l'égalité $F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 2q(x - y)^2 + (q - p)^2$.

En déduire que pour (x, y) sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R , on a $F(x, y) \geq (R^2 - 1)^2$.

f) Soit \mathcal{B} la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 2. Montrer que F atteint dans \mathcal{B} un minimum, et que celui-ci est atteint en un point critique de F .

g) En déduire le minimum absolu de l'expression $\phi(A - V^t V)$ lorsque V décrit l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^2 ainsi que les vecteurs V qui réalisent ce minimum.

h) Prouver enfin qu'il existe une matrice M appartenant à \mathcal{T} et une seule qui minimise l'expression $\phi(A - M)$.

On précisera la nature de l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 représenté par cette matrice M .

$F \mid N$

Bonnes vacances !