

1 BARYCENTRE ?

CORRIGÉ

A, B et C sont trois points non alignés du plan euclidien orienté \mathcal{P} . Soit M quelconque de \mathcal{P} .

a) Remarquons d'abord

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \det(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \\ &= \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MC}) + \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}) + \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \\ &= \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\end{aligned}$$

Ce nombre est non nul puisque A, B et C sont non alignés.

Puisque A, B et C sont non alignés, M est barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ avec $(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$.

Alors $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. On tire donc en faisant le déterminant de ce vecteur respectivement avec $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ puis \overrightarrow{MC} :

$$\begin{cases} \beta \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + \gamma \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = 0 \\ \alpha \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \gamma \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = 0 \\ \alpha \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) + \beta \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = 0 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} \beta \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \gamma \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \\ \alpha \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \gamma \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \\ \alpha \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = \beta \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \end{cases}$$

Les familles (α, β, γ) et $(\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}), \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}), \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))$ sont donc proportionnelles. On obtient alors que M est le barycentre du système $\{(A, \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})), (B, \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})), (C, \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))\}$ par le théorème d'homogénéité du barycentre.

b) On peut remplacer ce raisonnement par un calcul dans un repère orthonormal direct : posons $M(x, y), A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, et $C(x_C, y_C)$.

On remarque d'abord

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) &= x_B y_C - y_B x_C + x_C y_A - y_C x_A + x_A y_B - y_A x_B \\ &= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\end{aligned}$$

Ce nombre est non nul puisque A, B et C sont non alignés.

Alors abscisse et ordonnée de $[\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MA} + \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \cdot \overrightarrow{MB} + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC}]$ sont

$$\begin{aligned}((x - x_B)(y - y_C) - (y - y_B)(x - x_C))(x - x_A) &+ ((x - x_C)(y - y_A) - (y - y_C)(x - x_A))(x - x_B) \\ &+ ((x - x_A)(y - y_B) - (y - y_A)(x - x_B))(x - x_C) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((x - x_B)(y - y_C) - (y - y_B)(x - x_C))(y - y_A) &+ ((x - x_C)(y - y_A) - (y - y_C)(x - x_A))(y - y_B) \\ &+ ((x - x_A)(y - y_B) - (y - y_A)(x - x_B))(y - y_C) = 0\end{aligned}$$

Ainsi $\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MA} + \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \cdot \overrightarrow{MB} + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ et donc M est bien le barycentre du système $\{(A, \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})), (B, \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})), (C, \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))\}$.

Soit \mathcal{C} la courbe d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos \theta)$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (a est un réel positif fixé dans l'exercice).

1° On note $f : \left[\theta \mapsto a(1 + \cos \theta) \right]$

a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout θ on a $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$: la fonction f est 2π -périodique. On peut étudier f sur $[-\pi, \pi]$ sans perte sur \mathcal{C} .

Pour tout θ on a $f(-\theta) = f(\theta)$: la fonction f est paire. On peut étudier f sur $[0, \pi]$ une perte sur \mathcal{C} étant compensée par symétrie d'axe (O, \vec{e}_1) .

b) f est bien sûr dérivable et strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

c) De $f'(0) = 0$ on tire que la tangente au point $A(2a, 0)$ est orthogonale à l'axe de visée dirigé par $\vec{u}_0 = \vec{e}_1$. De $f(\pi) = 0$ on tire que la tangente au point $B(0, \pi)$ est dirigée par $\vec{u}_\pi = -\vec{e}_1$. Enfin, $f(\pi/2) = a$ et $f'(\pi/2) = -a$ donc la tangente au point $C(a, \pi/2)$ est dirigée par $-\vec{u}_{\pi/2} + \vec{v}_{\pi/2} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

On a \mathcal{C} en figure 1.

2° Dans le repère de travail, le point M de coordonnées polaires (ρ, θ) a $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ pour coordonnées cartésiennes.

Pour $M \in \mathcal{C}$, on a $\rho = a(1 + \cos \theta)$ et donc

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 &= (\rho^2)^2 - 2a\rho \cos \theta \rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \\ &= a^4(1 + \cos \theta)^4 - 2a^4(1 + \cos \theta)^3 \cos \theta - a^4(1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta = 0 \end{aligned}$$

Réciproquement considérons que M vérifie $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$. On a alors

$$(\rho^2)^2 - 2a\rho \cos \theta \rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta = 0 \quad \text{donc} \quad \rho^2[(\rho - a \cos \theta)^2 - a^2] = 0$$

Ainsi ou bien $\rho = 0$, ou bien $\rho = a(1 + \cos \theta)$ ou bien $\rho = a(-1 + \cos \theta)$ et dans les trois cas M est dans \mathcal{C} .

\mathcal{C} est donc la courbe d'équation cartésienne $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

3° Soient α un réel fixé dans $]0; \pi[$ et \vec{u}_α un vecteur unitaire tel que $(\vec{e}_1, \vec{u}_\alpha)$ mesure α .

a) Prenons θ dans $]-\pi/3, 5\pi/3]$. La tangente en $M(\rho, \theta)$ à \mathcal{C} est dirigée par $\vec{w} = f'(\theta) \cdot \vec{u}_\theta + f(\theta) \cdot \vec{v}_\theta$. En posant V une mesure de $(\vec{u}_\theta, \vec{w})$ on a $\tan V = \frac{1 + \cos \theta}{-\sin \theta} = \frac{-\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})$. Ainsi (\vec{e}_1, \vec{w}) mesure $3\theta/2 + \pi/2$.

La tangente est donc dirigée par \vec{u}_α si et seulement si $3\theta/2 + \pi/2 = \alpha$ à π près, donc si et seulement si θ appartient à :

$$\left\{ \frac{2}{3}\alpha - \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\alpha + \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\alpha + \pi \right\}$$

Ainsi \mathcal{C} admet trois points distincts en lesquels les tangentes sont dirigées par \vec{u}_α .

b) Le calcul des coordonnées cartésiennes de ces points donne que leur isobarycentre est le point I de coordonnées cartésiennes $(a/2, 0)$.

fonction $f : \left[x \mapsto x(1 - e^x) \right]$

1° a) f est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout x , $f'(x) = 1 - (1 + x)e^x$. f' est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x , $f''(x) = -(x + 2)e^x$. Ainsi

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f'	1	$f'(-2)$	$-\infty$

f' étant croissante sur $] -\infty; -2]$ et de limite 1 en $-\infty$ est de signe positif sur cet intervalle. On remarque $f'(0) = 0$. La fonction f' étant strictement décroissante sur $[-2; +\infty[$ on déduit immédiatement son signe. Puis

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	0	$-\infty$

b) Pour tout x , $f(x) = x - xe^x$. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à (Γ_1) pour $(x \rightarrow -\infty)$. Puisque pour $x < 0$ on a $-xe^x > 0$, (Γ_1) est au-dessus de son asymptote.

Pour $x \neq 0$, on a $\frac{f(x)}{x} = 1 - e^x$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. (Γ_1) présente une branche parabolique verticale pour $(x \rightarrow +\infty)$.

c) L'étude des variations de f' a donné que f' atteint un maximum en -2 . En $A(-2, -2(1 - e^{-2}))$ (Γ_1) admet une inflexion : la courbe traverse sa tangente.

2° D'où (Γ_1) en figure 2.

3° Soit l'équation différentielle $(e) : xy' - y + x^2 e^x = 0$.

a) Sur $]0; +\infty[$ (e) est équivalente à $y' = \frac{y}{x} - xe^x$. L'équation homogène associée a pour solutions les $\left[x \mapsto kx \right]$ où $k \in \mathbb{R}$.

La méthode de la variation de constante amène à primitiver $\left[x \mapsto -e^x \right]$ et donc à trouver les solutions de (e) sur $]0; +\infty[$: les $\left[x \mapsto (c - e^x)x \right]$ où $c \in \mathbb{R}$.

b) De la même façon, sur $] -\infty; 0[$ (e) est équivalente à $y' = \frac{y}{x} - xe^x$. L'équation homogène associée a pour solutions les $\left[x \mapsto kx \right]$ où $k \in \mathbb{R}$.

La méthode de la variation de constante amène à primitiver $\left[x \mapsto -e^x \right]$ et donc à trouver les solutions de (e) sur $] -\infty; 0[$: les $\left[x \mapsto (c - e^x)x \right]$ où $c \in \mathbb{R}$.

c) Par ailleurs f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x ,

$$x f'(x) - f(x) + x^2 e^x = 0$$

Ainsi f est une solution de (e) sur \mathbb{R} .

Une autre solution ψ de (e) sur \mathbb{R} , si elle existe, est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} vérifiant, pour tout x , $x\psi'(x) - \psi(x) + x^2 e^x = 0$.

En particulier $\psi(0) = 0$.

Puisque cette propriété est vérifiée sur $]0; +\infty[$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(x) = (c - e^x)x$ pour $x > 0$.

De même, cette propriété est vérifiée sur $] - \infty; 0[$, donc il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(x) = (d - e^x)x$ pour $x < 0$.

La question est de savoir s'il existe des contraintes sur c et d . Le nombre dérivé de ψ à gauche en 0 serait $(d - 1)$ et son nombre dérivé à droite serait $(c - 1)$. La dérivabilité de ψ impose donc $d = c$. La condition est alors suffisante : les solutions de (e) sur \mathbb{R} sont les $\left[x \mapsto (c - e^x)x \right]$ où $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{fonction } g : \left[x \mapsto \ln(\text{ch } x) \right]$$

1° a) ch est définie sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} et à valeurs positives. \ln est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. Le théorème de dérivation composée donne alors que g est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

g est manifestement paire, comme ch . Elle sera étudiée sur $[0; +\infty[$.

b) Pour $x \geq 0$ on a $g'(x) = \text{th } x$ donc g strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Puis

x	$-\infty$	$+\infty$
g	0	$+\infty$

c) Pour $x \neq 0$, on a $\frac{g(x)}{x} = \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \ln \frac{e^x}{2} (1 + e^{-2x}) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-2x}) = 1$, on déduit que la droite d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à la courbe (Γ_2) de g pour $(x \rightarrow +\infty)$. Pour $x > 0$ on a $(1 + e^{-2x}) > 1$ donc $f(x) - (x - \ln 2) > 0$: la courbe est au-dessus de son asymptote.

La symétrie de (Γ_2) par rapport à l'axe des ordonnées fournit la seconde asymptote.

2° D'où (Γ_2) en figure 3.

$$\text{courbe paramétrée } (\mathcal{C}) : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

1° Le tableau des variations simultanées des fonctions f et g est trivial.

2° Le point de (\mathcal{C}) de paramètre 0 est de coordonnées $(f(0), g(0))$, c'est O . On a $(f'(0), g'(0)) = (0, 0)$ puis $(f''(0), g''(0)) = (-2, 1)$. La tangente à (\mathcal{C}) en O a donc pour équation $y = -\frac{1}{2}x$.

3° On a $\lim_{t \rightarrow -\infty} (g(t) - (-t - \ln 2)) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} (f(t) - t) = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow -\infty} (g(t) + f(t) + \ln 2) = 0$: la droite d'équation $y = -x - \ln 2$ est asymptote à (\mathcal{C}) .

4° Pour $t \neq 0$, on a $\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{g(t)}{t} \frac{t}{f(t)}$. Ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = 0$: (\mathcal{C}) admet une branche parabolique horizontale.

5° D'où (\mathcal{C}) en figure 4.

