

## 1 COEFFICIENTS PERDUS

CORRIGÉ

$\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & c \\ 1 & -2 & d \\ a & b & e \end{pmatrix}$  avec  $\text{Ker}(\psi)$  engendré par  $(u_1 + 2u_2 + 3u_3)$  et  $(u_2 - 3u_3, 3u_1 - 5u_3)$  une famille libre de  $\text{Im}(\psi)$ .

$$\psi(u_1 + 2u_2 + 3u_3) = 0_E \text{ impose } \begin{cases} 9 + 3c = 0 \\ -3 + 3d = 0 \\ a + 2b + 3e = 0 \end{cases} . A \text{ s'écrit alors } \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2b - 3e & b & e \end{pmatrix}.$$

$\psi$  est de rang 2 et donc  $(u_2 - 3u_3, 3u_1 - 5u_3, \psi(e_3))$  est liée. On a donc  $e = 2$ . De même  $(u_2 - 3u_3, 3u_1 - 5u_3, \psi(e_2))$  est liée et donc  $b = 1$ .

On vérifie réciproquement que  $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  convient.

## 2 INTÉGRABILITÉS

CORRIGÉ

**1°**  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres réels positifs ; pour  $a$  et  $b$  dans  $[0, \pi]$  on note  $I(a, b) = \int_a^b \frac{dt}{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 t}$ .

**a )** Le changement de variable  $x = \tan t$  dans  $I(a, b)$  demande  $[a, b] \subset [0, \pi/2[$  ou  $[a, b] \subset ]\pi/2, \pi]$ . On a alors  $dt = \frac{dx}{1+x^2}$  puis  $I(a, b) = \int_{\tan a}^{\tan b} \frac{dx}{(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha^2} = [F(x)]_{\tan a}^{\tan b}$  avec  $F(x) = \frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} x \right)$ .

**b )** L'intégrabilité de la fonction sur  $[0, \pi]$  donne

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dt}{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 t} &= F(\tan \pi) - \lim_{a \rightarrow \pi/2, a > \pi/2} F(\tan a) + \lim_{b \rightarrow \pi/2, b < \pi/2} F(\tan b) - F(\tan 0) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{aligned}$$

**2°** On choisit  $\gamma$  et  $\delta$  deux réels, et on définit la suite  $(u_n)_n$  de terme général  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^\gamma}{1+t^\delta \sin^2 t} dt$ .

**a )** Pour  $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$  on a bien sûr  $[n\pi]^\gamma \leq t^\gamma \leq [(n+1)\pi]^\gamma$  et donc

$$[n\pi]^\gamma \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\delta \sin^2 t} \leq u_n \leq [(n+1)\pi]^\gamma \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\delta \sin^2 t}. \text{ D'où } u_n \sim n^\gamma \pi^\gamma \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\delta \sin^2 t}.$$

**b )** Soit  $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\delta \sin^2 t}$ . Pour  $\delta = 0$ , on a bien sûr  $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+\sin^2 t} = \int_0^\pi \frac{dt}{1+\sin^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ .

Pour  $\delta < 0$ ,  $1 \geq \frac{1}{1+t^\delta \sin^2 t} \geq \frac{1}{1+(n\pi)^\delta}$  pour  $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$  d'où  $v_n \sim \pi$ .

Pour  $\delta > 0$  et  $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$ ,  $\frac{1}{1+((n+1)\pi)^\delta \sin^2 t} \leq \frac{1}{1+t^\delta \sin^2 t} \leq \frac{1}{1+(n\pi)^\delta \sin^2 t}$ .

Ainsi  $\frac{\pi}{\sqrt{1+((n+1)\pi)^\delta}} \leq v_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\delta}}$  et donc  $v_n \sim \frac{\pi}{\sqrt{(n\pi)^\delta}}$ .

### 3 MATRICES EXPONENTIELLES

CORRIGÉ

Pour  $M$  une matrice carrée à coefficients réels, on peut définir la suite de matrices  $(S_n)_n$  par son terme général  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k$ .

Lorsque la suite  $(S_n)_n$  converge (i.e. chaque coefficient est une suite de réels convergente) on appelle sa limite l'exponentielle de  $M$  et on note  $e^M = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k$ .

1° Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A^3 = 0$ ; donc  $A^k = 0$  pour  $k \geq 3$ .

b) Pour tout  $n \geq 3$ ,  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k = I_3 + A + \frac{1}{2} A^2$ .

Donc  $A$  admet une exponentielle dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

c) Puisque  $(-A)^k = (-1)^k A^k$  pour tout  $k$ ,  $-A$  admet aussi une exponentielle dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Alors  $e^{-A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $e^A \times e^{-A} = I_3$ , donc  $e^A$  est inversible et son inverse est  $e^{-A}$ .

2° Plus généralement, dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  on dit qu'une matrice  $N$  est nilpotente si et seulement si il existe un entier  $r \geq 1$  tel que  $N^r = 0$ .

a) Soient  $M$  et  $N$  qui commutent telles que  $M^p = N^r = 0$ . Alors  $(MN)^n = M^n \times N^n = 0$  dès que  $n \geq \max(r, p)$ .

b) Avec  $N$  telle que  $N^r = 0$ , on a pour  $n \geq r$ ,  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} N^k = \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} N^k$ . La suite étudiée est stationnaire donc convergente :

$N$  admet une exponentielle,  $e^N = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} N^k$ .

c) Avec  $N$  et  $M$  nilpotentes ( $M^p = N^r = 0$ ), et  $MN = NM$ , on a

$$\begin{aligned} (M+N)^{r+p-1} &= \sum_{k=0}^{r+p-1} \mathbf{C}_{r+p-1}^k M^{r+p-k-1} \times N^k \\ &= \left( \sum_{k=r}^{r+p-1} \mathbf{C}_{r+p-1}^k M^{r+p-k-1} \times N^{k-r} \right) \times N^r + M^p \times \left( \sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{C}_{r+p-1}^k M^{r-k-1} \times N^k \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors  $e^{(M+N)}$  admet une exponentielle.

On a de plus  $e^N = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} N^k$ ,  $e^M = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} M^k$  et  $e^{(M+N)} = \sum_{k=0}^{r+p-1} \frac{1}{k!} (M+N)^k$ .

$$\begin{aligned} e^{M+N} &= \sum_{k=0}^{p+r-1} \frac{1}{k!} (M+N)^k = \sum_{k=0}^{p+r-1} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} M^j N^{k-j} = \sum_{k=0}^{p+r-1} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} M^j N^{k-j} \\ &= \sum_{a=0}^{p-1} \frac{1}{a!} M^a \times \sum_{b=0}^{r-1} \frac{1}{b!} N^b = e^M e^N \end{aligned}$$

**d)** Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t+2t^2 \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

i/ Soit  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Puisque  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $N^3 = 0$ ,  $N$  est une matrice nilpotente. On a par ailleurs

$$\forall t \quad M(t) = \exp(t.N).$$

ii/ Alors  $\mathcal{E} = \{M(t) / t \in \mathbb{R}\} = \{\exp(t.N) / t \in \mathbb{R}\}$ . Puisque pour tout  $t$ ,  $e^{t.N}$  est inversible, et que pour tous  $u$  et  $v$  on a  $e^{u.N} \times e^{v.N} = e^{(u+v).N}$ ,  $[t \mapsto e^{t.N}]$  est un homomorphisme de groupes de  $\mathbb{R}$  dans  $GL(3, \mathbb{R})$ . Son ensemble image  $\mathcal{E}$  est un sous-groupe de  $GL(3, \mathbb{R})$ .

**3°** Soit  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**a)**  $B^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

**b)** Pour  $n$  quelconque  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} B^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} 2^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-1)^k \end{pmatrix}$ . Or la suite  $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} 2^k\right)_n$  converge vers  $e^2$  tandis que  $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-1)^k\right)_n$  converge vers  $e^{-1}$ . Donc  $B$  admet une exponentielle dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $e^B = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$ .

**4°** Soient  $C = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$  et  $\psi$  l'endomorphisme de  $E$ ,  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2, qui admet  $C$  pour matrice dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  de  $E$ .

**a)** Les valeurs propres de  $\psi$  sont les  $\lambda$  qui font que  $\psi - \lambda.id_E$  n'est pas bijective, i.e. les  $\lambda$  qui font que  $C - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} 11-\lambda & -12 \\ 9 & -10-\lambda \end{pmatrix}$  n'est pas inversible. Ce sont 2 et -1.

**b)**  $g_1 = 4.e_1 + 3.e_2$  vérifie  $\psi(g_1) = 2.g_1$ , il est vecteur propre de  $\psi$  associé à la valeur propre 2.

**c)** Un vecteur propre  $g_2$  associé à la valeur propre -1 vérifie  $\psi(g_2) = -g_2$ . On choisit  $g_2 = -e_1 - e_2$ . Alors la famille  $\mathcal{C} = (g_1, g_2)$  est libre, elle est une base de  $E$ .

**d)** La matrice de  $\psi$  dans la base  $\mathcal{C}$  est alors  $B$ .

**e)** On a  $B = P^{-1} \times C \times P$  avec  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ . Alors pour tout  $n$ ,  $C^n = P \times B^n \times P^{-1}$ . On a  $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$  donc  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$  et alors  $C^n = \begin{pmatrix} 4.2^n - 3.(-1)^n & -4.2^n + 4.(-1)^n \\ 3.2^n - 3.(-1)^n & -3.2^n + 4.(-1)^n \end{pmatrix}$ .

**f** ) Les quatre suites de coefficients dans l'écriture de  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} C^k$  convergent et donc  $C$  admet une exponentielle ; c'est

$$e^C = \begin{pmatrix} 4.e^2 - 3.e^{-1} & -4.e^2 + 4.e^{-1} \\ 3.e^2 - 3.e^{-1} & -3.e^2 + 4.e^{-1} \end{pmatrix}.$$