

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.

- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.

- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.

- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.

- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**EXERCICE 1****considérations logiques**

( 3 points )

1° Fermat a conjecturé un moment l'assertion : « Pour tout entier naturel  $n$ , le nombre  $F_n = 2^{2^n} + 1$  est un entier premier ». On sait maintenant que cette phrase est fausse. Sa négation est donc un théorème. En donner l'énoncé.

2° Cette phrase est vraie : « Pour une fonction  $f$  de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , si l'intégrale de  $f$  sur  $[0; 1]$  vaut  $\frac{1}{2}$  alors  $f$  n'est pas continue ou il existe un réel  $c$  de  $]0; 1[$  tel que  $f(c) = c$  ». C'est ainsi un théorème. En donner la contraposée.

**EXERCICE 2****considérations fonctionnelles**

( 9 points )

1° Soit  $f$  la fonction  $[x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 2]$ .

a) Combien de solutions l'équation  $f(x) = 0$  a-t-elle ?

b) La fonction  $f$  est-elle bijective ?

2° On pose  $\theta = 2 \arccos \frac{1}{3}$ . Pour chacun des nombres suivants, indiquer s'il y a égalité avec  $\theta$ .

a)  $\arccos \frac{7}{9}$

b)  $\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}$

c)  $\arctan \frac{-4\sqrt{2}}{7}$

3° Etablir que la fonction  $\frac{1}{\sin} : [x \mapsto \frac{1}{\sin x}]$  réalise une bijection de  $[\frac{\pi}{2}; \pi[$  sur  $[1; +\infty[$ . Donner une expression de la bijection réciproque à l'aide de la fonction  $\arcsin$ .

**EXERCICE 3****considérations complexes**

( 8 points )

1° Quel est, dans  $\mathbb{C}$ , l'ensemble de toutes les solutions des équations  $(e_\lambda) : z^2 - 2\lambda z + 1 = 0$  lorsque  $\lambda$  prend toutes les valeurs dans  $\mathbb{R}$  ?

2°  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $\theta$  un réel irrationnel. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$\left( \frac{1}{\tan \pi \theta} + i \right) (z - i)^n - \left( \frac{1}{\tan \pi \theta} - i \right) (z + i)^n = 0$$

3°  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux complexes tels que  $\alpha\beta \neq 1$ . On pose  $\gamma = \frac{\bar{\alpha} - \beta}{1 - \alpha\beta}$ . Etablir que  $\gamma$  est de module 1 si et seulement si  $\alpha$  ou  $\beta$  est de module 1.