

1 .....

CORRIGÉ

$\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\Delta$  définie sur  $\mathcal{S}$  par :  $(\Delta(u) = v \iff \forall n \ v_n = u_{n+1} - u_n)$ .

1° a)  $\forall n \ u_n = n, \Delta(u) = v$  et  $\forall n \ v_n = 1$

b)  $\forall n \ u_n = n^2, \Delta(u) = v$  et  $\forall n \ v_n = 2n + 1$

c)  $\forall n \ u_n = 2^n, \Delta(u) = v$  et  $\forall n \ v_n = 2^n$

2° Propriétés.

a)  $\mathcal{S}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\Delta$  est une application de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$ .

– pour  $a$  et  $b$  quelconques, on a pour tout  $n$ ,  $\Delta(a+b)_n = (a+b)_{n+1} - (a+b)_n = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) = \Delta(a)_n + \Delta(b)_n$  ; ainsi  $\Delta(a+b) = \Delta(a) + \Delta(b)$

– pour  $a$  quelconque et  $k \in \mathbb{R}$ , on a pour tout  $n$ ,  $\Delta(k.a)_n = (k.a)_{n+1} - (k.a)_n = k(a_{n+1} - a_n) = k\Delta(a)_n = (k.\Delta(a))_n$  ; ainsi  $\Delta(k.a) = k.\Delta(a)$

$\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}$ .

b)  $a \in \text{Ker}(\Delta)$  si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $a_{n+1} - a_n = 0$ . Le noyau de  $\Delta$  est l'ensemble de toutes les suites constantes.

c) Soit  $v$  quelconque.  $a$  est un antécédent de  $v$  par  $\Delta$  si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $v_n = a_{n+1} - a_n$ . La suite définie par  $a_0 = 0$  et pour  $n > 0$   $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$  est donc un antécédent de  $v$ .

$\Delta$  est surjective.

d)  $v_n = 3n - 1$  pour tout  $n$ . D'après ce qui précède,  $a$  définie par  $a_0 = 0$  et  $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{2}(3n^2 - 5n)$  pour  $n > 0$ , est

un antécédent de  $v$ . Les antécédents de  $v$  forment donc le sous-espace affine  $a + \text{Ker}(\Delta)$ , il est constitué des suites qui diffèrent de  $a$  d'une constante.

e) De la même façon,  $\Delta(A) = U$  et  $A_0 = 0$  caractérise  $A$  de manière unique, la suite  $A = (n)_n$ .

f)  $k$  un réel.  $\Delta(u) = k.u$  si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = k u_n$  i.e. si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} = (k+1)u_n$ .

Les suites  $(u_n)_n$  telles que  $\Delta(u) = k.u$  sont les suites géométriques de raison  $(k+1)$ , et ceci pour tout  $k$ .

3°  $E$  le sous-ensemble de  $\mathcal{S}$  des suites  $u$  telles que  $\forall n \ 4u_{n+3} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n$ .

a)  $Z, U$  et  $A$  sont immédiatement éléments de  $E$ .

b)  $E$  est ainsi non-vide. De plus,

– pour  $a$  et  $b$  dans  $E$ , on a, pour tout  $n$ ,  $4(a+b)_{n+3} = 4a_{n+3} + 4b_{n+3} = 9a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n + 9b_{n+2} - 6b_{n+1} + b_n = 9(a+b)_{n+2} - 6(a+b)_{n+1} + (a+b)_n$  donc  $(a+b) \in E$

– pour  $a$  dans  $E$  et  $k \in \mathbb{R}$ , on a, pour tout  $n$ ,  $4(k.a)_{n+3} = 4ka_{n+3} = k(9a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n) = 9(k.a)_{n+2} - 6(k.a)_{n+1} + (k.a)_n$  donc  $(k.a) \in E$

et donc  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}$ .

c) Pour  $v$  quelconque dans  $E$ , posons  $w = \Delta(v)$ . Pour tout  $n$ ,  $4w_{n+3} = 4v_{n+4} - 4v_{n+3} = (9v_{n+3} - 6v_{n+2} + v_{n+1}) - (9v_{n+2} - 6v_{n+1} + v_n) = 9w_{n+2} - 6w_{n+1} + w_n$  ; ainsi  $w \in E$ .

D'où  $\Delta\langle E \rangle \subset E$ .

d) Soit l'application  $\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u & \mapsto (u_0, u_1, u_2) \end{cases}$

$\varphi$  est bien sûr linéaire par définition des opérations sur les suites.

$\varphi$  est bijective. En effet, pour  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de  $\mathbb{R}^3$ , la condition  $(u_0 = \alpha, u_1 = \beta, u_2 = \gamma)$  définit une suite  $u$  de  $E$  unique puisque par récurrence, pour  $p \geq 3$  on a  $u_p = \frac{1}{4}(9u_{p-1} - 6u_{p-2} + u_{p-3})$ .

$E$  et  $\mathbb{R}^3$  sont isomorphes.

e) Pour  $u \in E$  soit  $w = \Delta(\Delta(u))$ . Alors pour tout  $n$ ,  $w_n = \Delta(u)_{n+1} - \Delta(u)_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$ .  
 Pour tout  $n$ ,  $4w_{n+1} = 4(u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1}) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = w_n$ .  
 Ainsi  $w$  est géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .

f) Soit  $u \in E$ . Avec  $v = \Delta(u)$  et  $w = \Delta(v)$  on a  $w$  géométrique donc pour tout  $n$ ,

$$w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n w_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^n (u_2 - 2u_1 + u_0)$$

On connaît alors un antécédent de  $w$  : la suite  $\frac{-4}{3}.w$ .  $v$  en diffère d’une constante, donc pour tout  $n$ ,

$$v_n = \frac{-4}{3} \frac{1}{4^n} (u_2 - 2u_1 + u_0) + \frac{1}{3} (4u_2 - 5u_1 + u_0)$$

On recommence de même puisque  $u$  est un antécédent de  $v$  qui vaut  $u_0$  en 0 : pour tout  $n$ ,

$$u_n = \frac{16}{9} \frac{1}{4^n} (u_2 - 2u_1 + u_0) + \frac{n}{3} (4u_2 - 5u_1 + u_0) + \frac{1}{9} (-16u_2 + 32u_1 - 7u_0)$$

```
> restart : recu := u(n)=(9*u(n-1)-6*u(n-2)+u(n-3))/4 ;
                                recu := u(n) = 9/4 u(n-1) - 3/2 u(n-2) + 1/4 u(n-3)
> rsolve ({recu, u(0)=u0, u(1)=u1, u(2)=u2}, u) ;
                                -1/4 (-64/9 u0 - 64/9 u2 + 128/9 u1) (1/4)^n - 10/9 u0 - 28/9 u2 + 47/9 u1 + (1/3 u0 + 4/3 u2 - 5/3 u1) (n+1)
> collect (% , n) ;
                                (1/3 u0 + 4/3 u2 - 5/3 u1) n - 1/4 (-64/9 u0 - 64/9 u2 + 128/9 u1) (1/4)^n - 7/9 u0 - 16/9 u2 + 32/9 u1
```

2 .....

CORRIGÉ

Pour  $\lambda > 0$ ,  $f_\lambda : \left[ x \mapsto 1 + \ln(1 + \lambda x) \right]$  et  $\mathcal{C}_\lambda$  la courbe représentative de la fonction  $f_\lambda$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  dont  $\mathscr{D}$  est la première bissectrice.

1° a)  $\mathcal{D}_{f_\lambda} = \left] -\frac{1}{\lambda}; +\infty \right[.$

$(\Gamma)$  est la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.  $M(x, y) \in \mathcal{C}_\lambda$  si et seulement si  $y = 1 + \ln(1 + \lambda x)$  donc si et seulement si  $y - 1 - \ln \lambda = \ln \left( x + \frac{1}{\lambda} \right)$  donc si et seulement si  $N(x + \frac{1}{\lambda}, y - 1 - \ln \lambda) \in (\Gamma)$ .

Ainsi  $\mathcal{C}_\lambda$  est l’image de  $(\Gamma)$  par la translation de vecteur  $\left[ -\frac{1}{\lambda}. \vec{i} + (1 + \ln \lambda). \vec{j} \right]$ .

b)  $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$ . Compte tenu de la dérivée  $\varphi'_\lambda(x) = \frac{\lambda - 1 - \lambda x}{1 + \lambda x}$  l’étude des variations de  $\varphi_\lambda$  ne pose pas de problème et

$x$	$-\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$+\infty$
$\varphi'_\lambda(x)$		+	0
$\varphi_\lambda$		$-\infty$	$-\infty$

La valeur maximale que prend la fonction  $\varphi_\lambda$  sur son ensemble de définition est  $m(\lambda) = \varphi_\lambda\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} + \ln \lambda$ .

c) Avec  $m : \left[ \lambda \mapsto m(\lambda) \right]$  on a, pour  $\lambda > 0$ ,  $m'(\lambda) = \frac{\lambda-1}{\lambda^2}$  d'où les variations :

$\lambda$	0	1	$+\infty$
$m'(\lambda)$		-	0
$m$	$+\infty$	1	$+\infty$

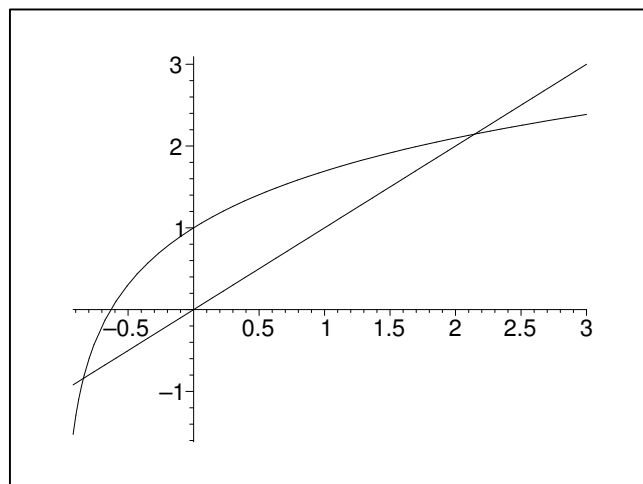
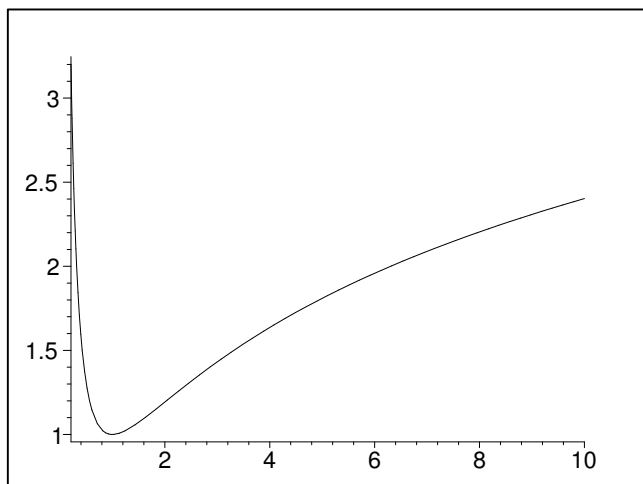
Le signe de  $m(\lambda)$  est donc bien sûr positif pour tout  $\lambda > 0$ .

La fonction  $\varphi_\lambda$  est continue. L'image de l'intervalle  $\left] -\infty; \frac{\lambda-1}{\lambda} \right]$  sur lequel elle est strictement croissante est un intervalle contenant 0. Elle s'y annule une et une seule fois ; soit en  $\alpha$ . L'image de l'intervalle  $\left[ \frac{\lambda-1}{\lambda}; +\infty \right[$  sur lequel elle est strictement décroissante est un intervalle contenant 0. Elle s'y annule une et une seule fois ; soit en  $\beta$ .

Ainsi,  $\lambda > 0$  donné,  $\mathcal{C}_\lambda$  et  $\mathcal{D}$  ont deux points d'intersection.

2° Dans cette partie du problème, on étudie le cas  $\lambda = 1$ .

a) Courbe de  $m$  et  $\mathcal{C}_1$ .



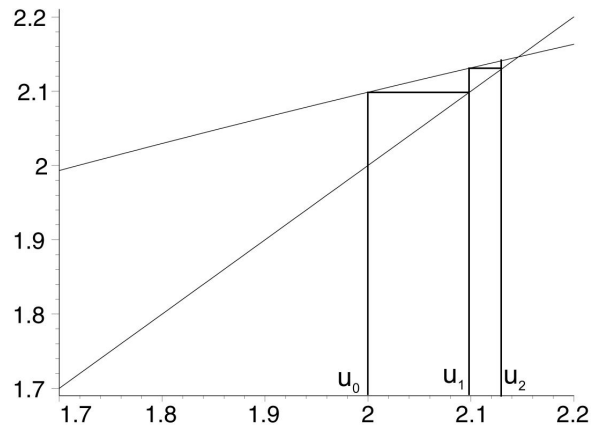
On appelle  $P$  et  $Q$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}_1$  et de  $\mathcal{D}$ , d'abscisses respectives  $p$  et  $q$  avec  $p < q$ .

Ayant

$x$	$-1$	$0$	$+\infty$
$\varphi_1'(x)$	$+$	$0$	$-$
$\varphi_1$	$-\infty$	$1$	$-\infty$

et  $\varphi_1(2) = \ln 3 - 1 > 0$ ,  $\varphi_1(3) = \ln 4 - 2 < 0$ , le théorème des valeurs intermédiaires donne  $-1 < p < 0$  et  $2 < q < 3$ .

b)  $(u_n)_n$  définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = f_1(u_n)$  pour tout  $n$ .



$u_0 = 2$ ; de  $u_n \in [2; q]$  on tire, puisque  $f_1$  croissante sur  $[2; q]$ ,  $f_1(2) \leq u_{n+1} \leq f_1(q)$  donc  $2 \leq u_{n+1} \leq q$ . ainsi, par récurrence, on a établi  $2 \leq u_n \leq q$  pour tout  $n$ .

Par ailleurs,  $\varphi_1 \geq 0$  sur  $[2; q]$  donc  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n$ ,  $(u_n)_n$  est croissante.

$(u_n)_n$  est croissante et majorée, donc convergente. Sa limite  $\ell$  vérifie  $f_1(\ell) = \ell$  puisque  $f_1$  est continue.  $\ell \geq 2$  empêche que  $\ell$  soit  $p$ , donc  $\ell = q$ .

c) L'inégalité des accroissements finis appliquée à  $f_1$  sur  $[2; q]$  donne, pour tout  $n$ ,  $|f_1(u_n) - f_1(q)| \leq M |u_n - q|$  où  $M$  majorant de  $|f'_1|$  sur l'intervalle. Or, pour  $x \in [2; q]$ , on a  $0 < f'_1(x) = \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{3}$ .

D'où, pour tout  $n$ ,  $0 \leq q - u_{n+1} \leq \frac{1}{3} (q - u_n)$  et une récurrence en fait déduire, pour tout  $n$ ,  $0 \leq q - u_n \leq \frac{1}{3^n} (q - u_0)$ .

d) On est donc certain que  $u_n$  approche  $q$  à  $10^{-6}$  dès que  $\frac{1}{3^n} (q - u_0) < 10^{-6}$  c'est à dire dès que  $3^n > 10^6 (q - u_0)$ .  
Puisque  $2 < q < 3$ ,  $n > \log_3(10^6)$  suffit donc  $n > \frac{6}{\log 3}$  convient; ainsi  $n > 6$  est une condition suffisante pour avoir  $u_n$  proche  $q$  à  $10^{-6}$  près.

---

F I N

---