

## 1 FAMILLES DE COURBES INTÉGRALES

CORRIGÉ

Etant donnés deux réels  $\alpha$  et  $\gamma$  avec  $|\gamma| \leq 1$ , on désigne par  $E_{\alpha,\gamma}$  l'ensemble des applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même, dérivables et telles que, pour tout réel  $t$ ,  $f'(t) = e^{\alpha t} f(\gamma t)$

### Préliminaires

**1°** Soit  $f$  de  $E_{\alpha,\gamma}$ . Puisque  $[x \mapsto e^{\alpha x}]$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , on établit par récurrence que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Supposons  $f$   $p$ -fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Puisque pour tout réel  $t$ ,  $f'(t) = e^{\alpha t} f(\gamma t)$ , on a  $f'$   $p$ -fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  l'est  $(p+1)$ -fois. On a ainsi par récurrence  $f$   $n$ -fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $n$ , donc  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**2°**  $E_{\alpha,\gamma}$  contient bien sûr la fonction nulle et possède naturellement les stabilités par somme et produit par un réel. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ ,  $E_{\alpha,\gamma}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

### Partie A

On suppose dans cette partie  $\gamma = 1$  et  $\alpha$  réel quelconque.

**1°**  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $f \in E_{0,1}$  si et seulement si  $f'(t) = f(t)$  pour tout  $t$ , i.e.  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' = y$ . Ainsi  $E_{0,1} = \{k \cdot \exp / k \in \mathbb{R}\}$ .

On suppose désormais que  $\alpha$  est différent de 0.

**2°** Soit  $f \in E_{\alpha,1}$ . On pose  $\varphi(t) = f(t) \exp\left(-\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\right)$  pour tout  $t$ . On trouve  $\varphi$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  puis  $\varphi' = 0$ . On déduit  $\varphi$  constante sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f : \left[t \mapsto k \cdot \exp\left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\right)\right]$ ,  $k$  réel. Réciproquement on vérifie que toutes ces fonctions sont dans  $E_{\alpha,1}$ .

Ainsi  $E_{\alpha,1} = \left\{ \left[t \mapsto k \cdot \exp\left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\right)\right] / k \in \mathbb{R} \right\}$ .

**3° a)** Soit  $f_\alpha \in E_{\alpha,1}$  : pour tout  $t$ ,  $f_\alpha(t) = k \cdot \exp\left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\right)$ .  $f_\alpha(0) = 1$  impose  $k = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$ . La fonction  $f_\alpha : \left[t \mapsto k \cdot \exp\left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\right)\right]$  est la seule solution au problème posé.

**b)** Pour tout  $t$ ,  $f_\alpha(t) > 0$  donc  $f'_\alpha(t) > 0$ . On a donc  $f_\alpha$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**4°** On prend pour cette question  $\alpha = -\frac{1}{e} = -e^{-1}$  ;  $f_\alpha$  se construit alors avec  $k = e^e$ .

**a)** Pour tout  $t$ ,  $f''_\alpha(t) = (\alpha + e^{\alpha t}) f'_\alpha(t)$ . Donc  $f''_{-e^{-1}}(t) > 0$  si et seulement si  $t < e$ .

**b)** Dans le cas général on a

pour  $\alpha > 0$ ,

$t$	$-\infty$	$+\infty$
$f$	$k$	$+\infty$

et pour  $\alpha < 0$ ,

$t$	$-\infty$	$+\infty$
$f$	0	$k$

c ) La courbe représentative de  $f_{-e^{-1}}$  ne pose pas de problème !

## Partie B

On suppose dans cette partie que  $\gamma = -1$ ,  $\alpha$  étant toujours un paramètre réel quelconque.

1°  $f$  de  $E_{\alpha, -1}$  vérifie, pour tout  $t$ ,  $f'(t) = e^{\alpha t} f(-t)$  et  $f''(t) = \alpha f'(t) - f(t)$ . Ainsi  $f$  est solution de

$$(L_{\alpha}) : y'' - \alpha y' + y = 0$$

2° L'équation caractéristique de  $(L_{\alpha})$  est  $r^2 - \alpha r + 1 = 0$ , de discriminant  $\alpha^2 - 4$ .

. cas  $\alpha = 2$ . Les solutions de  $(L_{\alpha})$  sont les  $[t \mapsto (at + b)e^t]$ .

. cas  $\alpha = -2$ . Les solutions de  $(L_{\alpha})$  sont les  $[t \mapsto (at + b)e^{-t}]$ .

. cas  $|\alpha| > 2$ . Les solutions de  $(L_{\alpha})$  sont les  $[t \mapsto ae^{ut} + be^{vt}]$  où  $\frac{1}{v} = u = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$ .

. cas  $|\alpha| < 2$ . Les solutions de  $(L_{\alpha})$  sont les  $[t \mapsto (a \cos ut + b \sin ut)e^{vt}]$  où  $v = \frac{\sqrt{4 - \alpha^2}}{2}$  et  $u = \frac{\alpha}{2}$ .

pour tous les réels  $a$  et  $b$  possibles.

3° Dans chacun des cas, les solutions qui sont éléments de  $E_{\alpha, -1}$  sont caractérisées par :

. cas  $\alpha = 2$ . les  $[t \mapsto (at + b)e^t]$  avec  $a = 0$ .

. cas  $\alpha = -2$ . les  $[t \mapsto (at + b)e^{-t}]$  avec  $a = 2b$ .

. cas  $|\alpha| > 2$ . les  $[t \mapsto ae^{ut} + be^{vt}]$  où  $\frac{1}{v} = u = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$  avec  $b = au$ .

. cas  $|\alpha| < 2$ . les  $[t \mapsto (a \cos ut + b \sin ut)e^{vt}]$  où  $v = \frac{\sqrt{4 - \alpha^2}}{2}$  et  $u = \frac{\alpha}{2}$  avec  $a = b \frac{2 + \alpha}{2}$ .

## Partie C

On suppose, dans cette partie  $\alpha = 1$  et  $\gamma \in ]0, 1[$  et on considère une application  $f$  de  $E_{1, \gamma}$  telle que  $f(0) > 0$  (on admet l'existence d'une telle application).

1° a ) Pour tout  $x$ ,  $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$  donc  $f(x) = f(0) + \int_0^x e^t f(\gamma t) dt$ .

b )  $f(0) > 0$  et  $f$  est continue en 0.  $f$  est donc positive sur un voisinage de 0, donc sur un  $[0, a]$  avec  $a > 0$ .

c ) Pour  $t \in \left[0, \frac{a}{\gamma}\right]$  on a  $\gamma t \in [0, a]$  donc  $f(t) > 0$ . Ainsi pour  $x \in \left[0, \frac{a}{\gamma}\right]$  on a  $f(x) > 0$ .

Une récurrence évidente amène alors à  $f$  positive sur tout intervalle  $\left[0, \frac{a}{\gamma^n}\right]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a  $\lim_n \frac{a}{\gamma^n} = +\infty$  donc  $f$  est positive sur  $[0, +\infty[$ .

d ) De la même façon,  $f(0) > 0$ ,  $f$  continue en 0 impose  $f$  est donc positive sur un voisinage de 0 et donc  $f'$  aussi. On a ainsi  $c < 0$  tel que  $0 < f(t) \leq f(0)$  pour  $t \in [c, 0]$ .

Pour  $t \in \left[\frac{c}{\gamma}, 0\right]$  on a  $0 < f(\gamma t) \leq f(0)$  et donc  $f(x) = f(0) + \int_0^x e^t f(\gamma t) dt \geq f(0) + \int_0^x e^t f(0) dt = e^x f(0) > 0$  pour  $x \in \left[\frac{c}{\gamma}, 0\right]$ .

Un récurrence analogue à la précédente donne  $f$  positive sur  $\left[\frac{c}{\gamma^n}, 0\right]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  donc sur  $] -\infty, 0]$ .

2° Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $g$  l'application de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $g = f \circ \ln$ . On a alors  $f = g \circ \exp$  donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

Pour  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est un élément de  $E_{1,\gamma}$  si et seulement si pour tout  $t$ ,  $f'(t) = e^t f(\gamma t)$ , donc si et seulement si pour tout  $x > 0$ ,  $g'(x) = g(x^\gamma)$ , condition (\*).

**3°** On suppose dans cette question que  $g$  est une application définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  vérifiant (\*) et telle que  $g(1) = 1$ .  $g$  est alors de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

**a )**  $f = g \circ \exp$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  d'après les questions précédentes, donc  $g$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ .

**b )** On note  $u(x) = g(x) - x$ , pour tout réel  $x > 0$ . Pour  $x > 0$  on a  $u'(x) = g'(x) - 1$ . On a  $g'(1) = g(1) = 1$  et  $g$  croissante sur  $]0, +\infty[$  donc  $g'(x) > 1 \iff x > 1$ . Ainsi  $u$  est strictement décroissante sur  $]0, 1]$  et strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ .

**c )**  $g$  est croissante sur  $]0, +\infty[$  donc  $g$  admet une limite  $b$  en 0 et  $b \leq g(1) = 1$ . Donc  $u$  admet une limite en 0 et  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = b$ . Or  $u$  décroissante sur  $]0, 1]$  donc  $b \geq u(1) = 0$ . On en déduit que  $b$  est un réel.  $g$  admet une limite réelle en 0 et pourra donc être prolongée par continuité en 0 par la fonction  $G : G(0) = b$  et  $G(x) = g(x)$  pour  $x > 0$ .

**d )** La fonction  $G$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et de classe  $C^0$  sur  $[0, +\infty[$ . De  $g'(x) = g(x^\gamma)$  pour  $x > 0$ , on déduit que  $g'$ , donc  $G'$ , a pour limite  $b$  en 0 comme  $g$ . Le théorème du prolongement donne  $G$  dérivable en 0 (et même  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ ) et  $G'(0) = b$ .

**e )** Soit  $\psi(x) = (\gamma + 1)G(x) - x^{\gamma+1} - \gamma$  pour  $x \geq 0$ .

On a  $\psi$  de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$  et pour  $x > 0$ ,  $\psi'(x) = (\gamma + 1)u(x^\gamma)$ . On a donc  $\psi' \geq 0$  sur  $]0, +\infty[$  et  $\psi$  croissante sur  $[0, +\infty[$ .

$\psi(1) = 0$  donc  $\psi(0) \leq 0$ . Ainsi  $0 \leq b \leq \frac{\gamma}{\gamma + 1}$ .

Pour  $x > 1$ ,  $\psi(x) > 0$  donc  $G(x) > \frac{x^{\gamma+1} + \gamma}{\gamma + 1}$  et donc  $\frac{G(x)}{x} > \frac{x^\gamma}{\gamma + 1}$ . On a ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty$ .

**4°** Les courbes représentatives de  $g$  puis de  $f$  découlent des études précédentes.

---

F I N

---