

1 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ET ALGÈBRE LINÉAIRE

CORRIGÉ

p et q réels. $(E) : y'' + p y' + q y = 0$ et \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (E) .

1° a) L'équation (E) est homogène : \mathcal{S} contient bien sûr la constante nulle.

Pour f et g solutions de (E) , on a f et g deux fois dérivables sur \mathbb{R} et pour tout x , $\begin{cases} f''(x) + p f'(x) + q f(x) = 0 \\ g''(x) + p g'(x) + q g(x) = 0. \end{cases}$ Alors

$(f + g)$ est bien deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout x , $(f + g)''(x) + p(f + g)'(x) + q(f + g)(x) = 0$. Ainsi $(f + g) \in \mathcal{S}$.

Pour λ un complexe et f solution de (E) , on a $\lambda.f \in \mathcal{S}$ puisque $\lambda.f$ deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x , $\lambda.f''(x) + p\lambda.f'(x) + q\lambda.f(x) = 0$.

Ainsi \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ donc c'est un espace vectoriel sur \mathbb{C} .

b) Pour s une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} solution non nulle de (E) , la droite vectorielle dirigée par s , $\text{Vect}(s)$, est incluse dans \mathcal{S} puisque contenant la constante nulle, stable par somme et produit par un complexe quelconque.

c) Soit $r \in \mathbb{C}$. $[x \mapsto e^{rx}]$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} donc est solution de (E) si et seulement si, pour tout x , $r^2.e^{rx} + p r.e^{rx} + q e^{rx} = 0$ donc si et seulement si $r^2 + p r + q = 0 : (c)$.

Cette équation a deux solutions dans \mathbb{C} , éventuellement confondues : $r_1 = \frac{-p + \delta}{2}$ et $r_2 = \frac{-p - \delta}{2}$ où $\delta^2 = p^2 - 4q$.

2° a) Soit $f \in \mathcal{S}$. f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et $f'' = -p f' - q f$; donc f'' est dérivable sur \mathbb{R} : f' est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . De plus, de $f'' + p f' + q f = 0$ on tire en dérivant : $(f')'' + p(f')' + q(f') = 0$ donc $f' \in \mathcal{S}$.

On sait que la dérivation est linéaire donc $\Lambda : [f \mapsto f']$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel \mathcal{S} .

b) Dans le cas $p^2 \neq 4q$, on a $\mathcal{S} = \left\{ [x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}] / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Or $\Lambda([x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}]) = [x \mapsto r_1 \alpha e^{r_1 x} + r_2 \beta e^{r_2 x}]$. Dans ce cas Λ est bijective si et seulement si r_1 et r_2 sont non nuls (ils sont distincts).

Dans le cas $p^2 = 4q$, on a $\mathcal{S} = \left\{ [x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{r_1 x}] / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Or $\Lambda([x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{r_1 x}]) = [x \mapsto (r_1 \alpha x + (r_1 \beta + \alpha)) e^{r_1 x}]$. Dans ce cas Λ est bijective si et seulement si r_1 est non nul.

Ainsi Λ n'est pas un isomorphisme dans les seuls cas où 0 est solution de (c) , i.e. si et seulement si $q = 0$. Ce cas est celui où les constantes (toutes de même dérivée nulle) sont solutions de (E) .

c) Pour toute f dans \mathcal{S} on a $f'' + p f' + q f = 0$ donc $(\Lambda \circ \Lambda)(f) + p.\Lambda(f) + q.f = 0$. Ainsi $\Lambda \circ \Lambda + p.\Lambda + q.id_{\mathcal{S}} = O$.

On a, puisque r_1 et r_2 sont les solutions de (c) , $r_1 + r_2 = -p$ et $r_1 r_2 = q$. Donc $\Lambda \circ \Lambda - (r_1 + r_2).\Lambda + r_1 r_2.id_{\mathcal{S}} = O$ d'où $(\Lambda - r_1.id_{\mathcal{S}}) \circ (\Lambda - r_2.id_{\mathcal{S}}) = O$.

d) Une des applications $(\Lambda - r_1.id_{\mathcal{S}})$ ou $(\Lambda - r_2.id_{\mathcal{S}})$ bijective entraînerait que l'autre est nulle. Par exemple $(\Lambda - r_1.id_{\mathcal{S}})$ nulle signifierait $f' = r_1.f$ pour toute f de \mathcal{S} . Ceci ne se produit pas puisque \mathcal{S} contient $[x \mapsto e^{r_2 x}]$ dans le cas $r_1 \neq r_2$ et contient $[x \mapsto x e^{r_1 x}]$ dans le cas $r_1 = r_2$.

Dans tout ce qui suit, p est un entier premier.

1° Soit $0 < k < p$.

a) En utilisant $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ pour $0 \leq m \leq n$, on tire $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$.

b) p est un entier premier et $0 < k < p$ donc k et p sont premiers entre eux. Puisque p divise $k \binom{p}{k}$, le lemme de Gauss donne que p divise $\binom{p}{k}$.

2° a) a dans \mathbb{Z} quelconque. On a $(a+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k = a^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$. La question précédente donne que p divise $(a+1)^p - (a^p + 1)$ donc que $(a+1)^p$ et $a^p + 1$ ont le même reste dans la division par p .

b) 1^p et 1 ont le même reste 1 dans la division par p . En admettant que $q \in \mathbb{N}$ a le même reste que q^p dans la division par p , on tire que $(q+1)$ a le même reste que (q^p+1) donc que $(q+1)^p$ grâce à la question précédente.

Le théorème de récurrence donne alors que pour tout n de \mathbb{N} , n^p et n ont le même reste dans la division par p .

c) Pour q tel que $1 < q < p$, on a p et q premiers entre eux. Or la question précédente donne $p \mid (q^p - q)$ donc $p \mid q(q^{p-1} - 1)$. Le lemme de Gauss donne alors $p \mid (q^{p-1} - 1)$ donc le reste dans la division de q^{p-1} par p est 1.

3° application numérique¹ : $1551 = 3.11.47$. On a donc $3 \mid (2^2 - 1)$ donc $3 \mid ((2^2)^{115} - 1)$. Puis $11 \mid (2^{10} - 1)$ donc $11 \mid ((2^{10})^{23} - 1)$. Enfin $47 \mid (2^{46} - 1)$ donc $47 \mid ((2^{46})^5 - 1)$.

3, 11 et 47 sont premiers, donc deux à deux premiers entre eux, d'où 1551 divise $2^{230} - 1$.

¹l'usage de ce (petit) théorème de Fermat n'est quand même pas suffisant pour rendre compte de la factorisation complète :

$2^{230} - 1 = 3 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 47 \cdot 691 \cdot 14951 \cdot 178481 \cdot 4036961 \cdot 2796203 \cdot 1884103651 \cdot 345767385170491 \cdot 2646507710984041$.

Soit $\varphi : \left[x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} \right]$.

1° a) φ est définie sur chacun des deux intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. La fonction \exp étant de classe C^∞ sur \mathbb{R} , on a par quotient φ de classe C^∞ sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

b) Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{x}{1 + x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3) - 1} = \frac{1}{1 + x/2 + x^2/6 + o(x^2)} \\ &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) + \left(\frac{x}{2} + o(x^2) \right)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).\end{aligned}$$

Ceci montre φ admet 1 pour limite en 0, donc que φ admet une prolongée par continuité en 0 : la fonction $\tilde{\varphi}$. Ainsi $\tilde{\varphi}(0) = 1$ et $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour $x \neq 0$.

c) $\tilde{\varphi}$, comme φ , est de classe C^2 sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. Puisqu'elle admet un $DL_1(0)$, elle est continue et dérivable en 0 avec $\tilde{\varphi}'(0) = -1/2$.

De plus, pour $x \neq 0$, $\varphi'(x) = \tilde{\varphi}'(x) = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2}$ et $\varphi''(x) = \tilde{\varphi}''(x) = \frac{e^x(x + xe^x - 2(e^x - 1))}{(e^x - 1)^3}$.

On obtient alors $\varphi'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + o(x)$ donc que $\tilde{\varphi}'$ est continue et dérivable en 0 avec $\tilde{\varphi}''(0) = 1/6$.

On montre enfin que $\tilde{\varphi}''$ est continue en 0 puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x + xe^x - 2(e^x - 1))}{(e^x - 1)^3} = \frac{1}{6}$.

Alos $\tilde{\varphi}$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

d) On a déjà obtenu un $DL_2(0)$ de $\tilde{\varphi}$: $\tilde{\varphi}(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$.

On vérifie que ce DL est cohérent avec le théorème de Taylor-Young puisqu'on a trouvé $\tilde{\varphi}'(0) = -1/2$ et $\tilde{\varphi}''(0) = 1/6$.

2° Pour ça on pose $\psi = \frac{1}{\tilde{\varphi}}$.

a) Pour $x \neq 0$, $\int_0^1 e^{xu} du = \left[\frac{1}{x} e^{xu} \right]_0^1 = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{\varphi(x)} = \psi(x)$. Pour $x = 0$, $\int_0^1 e^{0u} du = 1 = \frac{1}{\tilde{\varphi}(0)} = \psi(0)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \int_0^1 e^{xu} du$.

b) Soit $g : [t \mapsto (e^t - 1) - te^t]$. g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout t , $g'(t) = -te^t$. On a alors g croissante sur $] -\infty; 0]$, $g(0) = 0$ et g décroissante sur $[0; +\infty[$. D'où $(e^t - 1) \leq te^t$ pour tout t réel.

Pour $x > 0$, en intégrant sur le segment $[0; x]$, on a $\int_0^x (e^t - 1) dt \leq \int_0^x te^t dt$. Or \exp est croissante sur $[0; x]$ donc $\int_0^x te^t dt \leq \int_0^x te^x dt$. Ainsi $(e^x - 1 - x) \leq \frac{x^2}{2} e^x$.

Pour $x < 0$, on a $\left| \int_0^x (e^t - 1) dt \right| = \left| \int_x^0 (e^t - 1) dt \right| \leq \int_x^0 |e^t - 1| dt \leq \int_x^0 |te^t| dt = \int_x^0 (-t) e^t dt$. Or sur le segment $[x; 0]$, on a $e^t \leq 1 \leq e^{|x|}$, donc $|e^x - 1 - x| \leq \int_x^0 (-t) e^{|x|} dt = \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

Des deux cas traités précédemment, en posant $x = hu$ avec $h \in \mathbb{R}^*$ et $u \in [0; 1]$, on tire², après avoir divisé par h ,

$$\left| \frac{e^{hu} - 1}{h} - u \right| \leq |h| \frac{u^2}{2} e^{|h|u}$$

²cette inégalité pouvait être obtenue directement en utilisant le théorème de l'inégalité de Taylor-Lagrange

c) Soit x fixé.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} - \int_0^1 u e^{xu} du \right| &= \left| \int_0^1 e^{xu} \left(\frac{e^{hu} - 1}{h} - u \right) du \right| \\ &\leq \int_0^1 e^{xu} \left| \frac{e^{hu} - 1}{h} - u \right| du \\ &\leq \frac{|h|}{2} \int_0^1 u^2 e^{xu} e^{|h|u} du. \end{aligned}$$

Pour $|h| < 1$ on a donc $\left| \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} - \int_0^1 u e^{xu} du \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^1 u^2 e^{xu} e^u du$.

On a donc $\forall x : \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} - \int_0^1 u e^{xu} du \right) = 0$. D'où ψ est dérivable et $\forall x \quad \psi'(x) = \int_0^1 u e^{xu} du$.

d) La dérivée précédente laisse penser qu'il est possible dans ce cas de dériver sous le signe somme. La conjecture naturelle serait alors que pour tout n , « ψ est n -fois dérivable et $\forall x \quad \psi^{(n)}(x) = \int_0^1 u^n e^{xu} du$ ». Soit \mathcal{P}_n cette dernière assertion.

\mathcal{P}_1 est vérifiée à la question précédente. Admettons que pour un p de \mathbb{N}^* on ait \mathcal{P}_p vérifiée.

Alors, en adaptant le calcul précédent, $\left| \frac{\psi^{(p)}(x+h) - \psi^{(p)}(x)}{h} - \int_0^1 u^{p+1} e^{xu} du \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^1 u^{p+2} e^{xu} e^u du$ pour x fixé et $h \neq 0$.

Ainsi $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\psi^{(p)}(x+h) - \psi^{(p)}(x)}{h} - \int_0^1 u^{p+1} e^{xu} du \right) = 0$ ce qui prouve le bon enchaînement.

e) Le théorème de récurrence donne alors $\tilde{\varphi}$ dérivable sur \mathbb{R} à tout ordre, donc de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

$F I N$
