

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

introduction

F est l'ensemble des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définies et continues sur $]0, +\infty[$, telles que $[t \mapsto e^{-t}(f(t))^2]$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$.

n est un entier supérieur à 1 ; on pose $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et E_n est rapporté à sa base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ où

Pour $0 \leq p \leq n$ on définit $\varphi_p : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^p e^{-t} \end{cases}$ et $L_p : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \varphi_p^{(p)}(t) \end{cases}$ où $\varphi_p^{(p)}$ désigne la dérivée p -ième de φ_p .

Partie A

Pour chacune des fonctions suivantes, étudier son appartenance à F .

$$\sin \quad \exp \quad \ln \quad [x \mapsto \sqrt{x}]$$

Partie B

1° Soient f et g dans F .

a) Pour $0 < u \leq v$, établir, en utilisant proprement un théorème adéquat,

$$\left(\int_u^v e^{-t} f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_u^v e^{-t} (f(t))^2 dt \right) \left(\int_u^v e^{-t} (g(t))^2 dt \right)$$

b) Pour $\varepsilon > 0$ montrer l'existence de $c \geq 0$ tel que $\left(c < u < v \implies \left| \int_u^v e^{-t} f(t) g(t) dt \right| < \varepsilon \right)$.

c) En déduire l'intégrabilité de $[t \mapsto e^{-t} f(t) g(t)]$ sur $]0, +\infty[$.

2° a) Justifier que F est un \mathbb{R} -espace vectoriel

b) Montrer que E_n en est un sous-espace.

3° a) Montrer que $\Psi : \left[(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) g(t) dt \right]$ est un produit scalaire sur F .

b) Établir que E_n muni de Ψ a une structure d'espace vectoriel euclidien.

Partie C

On note désormais E_n l'espace euclidien muni de : $(f|g) = \Psi(f, g)$ et $\|f\| = \sqrt{\Psi(f, f)}$ pour f et g dans E_n .

1° Pour $0 \leq p \leq n$, montrer $L_p \in E_n$; préciser le degré de L_p et le coefficient $a_{p,k}$ du terme de degré k de L_p . Expliciter L_0 et L_1 .

2° Calculer $(L_p|L_q)$ pour p et q dans $\{0, \dots, n\}$;

3° Etablir que $\left(\frac{1}{k!}L_k\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormale de E_n .

Partie D

On considère, pour $0 \leq p \leq n$, $P_p = L_{p+2} + (X - 2p - 3)L_{p+1}$.

1° Montrer : $\forall p \in \{0, \dots, n\} P_p \in E_n$.

2° Etablir : $(P_p|L_k) = 0$ pour $0 \leq k \leq p - 1$

3° En déduire : $\forall t \geq 0 \quad L_{p+2}(t) + (t - 2p - 3)L_{p+1}(t) + (p + 1)^2 L_p(t) = 0$.

Ces polynômes L_p sont dits les polynômes de Laguerre.

F I N
