

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.

- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.

- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.

- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.

- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**calculs**

(20 points)

Cet exercice sera l'objet d'une note à part qui entrera dans le décompte final des notes de calcul. Il ne sera pas pris en compte pour la note de la "planche numéro 5" de mathématiques. Il ne faut en aucun cas passer plus de 1 heure dessus.

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6) \\ e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6) \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6) \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6) \\ \tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \end{aligned}$$

1° En cas d'existence, donner la valeur de la limite de $f(x)$ en a .

a) $a = 0 \quad f(x) = \frac{(\cos x - 1) \tan 2x}{(x^3 - 3x^2)}$

b) $a = \pi/3 \quad f(x) = \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}$

c) $a = 1 \quad f(x) = \frac{e^{(x^2-x)} - 1}{3x^3 - 2x^2 - x}$

d) $a = 0 \quad f(x) = \frac{x(1 + \cos x) - 2 \tan x}{\tan x + \sin x - 2x}$

2° Dans chacun des cas, donner un $DL_n(0)$ de la fonction f .

a) $n = 4, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

b) $n = 6, \quad f(x) = \frac{1}{3}(2 \sin x + \tan x)$

c) $n = 2, \quad f(x) = \ln(e^x + 1)$

d) $n = 3, \quad f(x) = (x^2 + 3x - 2)e^x$

EXERCICE 2**groupes finis**

(8 points)

1° E est un ensemble non vide quelconque, et on définit $\mathfrak{S}(E)$ comme l'ensemble des bijections de E sur E .

Montrer que $\mathfrak{S}(E)$ muni de la composition des applications forme un groupe.

2° On envisage ici l'ensemble $T = \{1, 2, 3\}$. L'ensemble $\mathfrak{S}(T)$ a six éléments :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

avec la convention que $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ signifie $f(1) = a, f(2) = b$ et $f(3) = c$.

Dresser la "table de Pythagore" du groupe $(\mathfrak{S}(T), \circ)$ sous la forme d'un tableau sur ce modèle :

\circ	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_1						
σ_2						
σ_3						
σ_4		φ				
σ_5						
σ_6						

avec la convention $\varphi = \sigma_4 \circ \sigma_2$

3° On considère les fonctions de $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ dans D :

$$id : [x \mapsto x] \quad inv : [x \mapsto \frac{1}{x}] \quad e : [x \mapsto 1 - x] \quad f : [x \mapsto \frac{1}{1-x}] \quad g : [x \mapsto 1 - \frac{1}{x}] \quad h : [x \mapsto \frac{x}{x-1}]$$

qui forment l'ensemble $G = \{id, inv, e, f, g, h\}$.

- Montrer que (G, \circ) est un groupe.
- Ce groupe est-il abélien ?
- Ce groupe est-il isomorphe à $(\mathfrak{S}(T), \circ)$?

EXERCICE 3

combinatoire

(6 points)

Soient a, b et c dans \mathbb{N} . On se propose de démontrer la formule $\sum_{k=0}^c \binom{a}{k} \binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$.

- Obtenir la preuve en calculant de deux manières le produit $(1+x)^a (1+x)^b$.
- Obtenir la preuve en cherchant le nombre de parties de cardinal c dans $E \cup F$, où E et F sont des ensembles disjoints de cardinaux respectifs a et b .
- Application : Soient n, p et q dans \mathbb{N} . Montrer que $\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \binom{n}{p+k} = \binom{n+q}{p+q}$ (Formule de Vandermonde).

EXERCICE 4

comportement global de fonction

(6 points)

Pour n entier naturel non nul, on définit f_n sur \mathbb{R} par : $f_n : [x \mapsto x e^{-n x^2}]$.

- Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction φ que l'on précisera.
- Pour $n \geq 1$, étudier les variations de f_n sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variations.
- En déduire que la convergence de $(f_n)_n$ vers φ sur \mathbb{R} est uniforme.
- Montrer que la suite $(f'_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction ψ . A-t-on $\psi = \varphi'$?