

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans cet exercice, l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 est rapporté à sa base canonique \mathcal{B} et on identifie :

- . tout vecteur de \mathbb{R}^2 à la matrice colonne V de ses composantes x et y dans \mathcal{B} .
- . tout endomorphisme de \mathbb{R}^2 à sa matrice M dans \mathcal{B} .

Pour tout vecteur V ou pour toute matrice M , on désigne par $\phi(V)$ ou $\phi(M)$ la somme des carrés des deux composantes de V ou des quatre coefficients de M .

1° Peut-on établir que $\left[M \mapsto \sqrt{\phi(M)} \right]$ est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Pour cela :

- a) Etablir que pour toute M , $\phi(M) \geq 0$ et $\phi(M) = 0$ si et seulement si $M = 0$.
- b) Que peut-on dire de $\sqrt{\phi(\lambda.M)}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
- c) Montrer que l'inégalité triangulaire est vérifiée.

On note enfin \mathcal{T} l'ensemble des matrices réelles M d'ordre 2 telles que :

- . M est symétrique.
- . M est nulle ou son rang est égal à 1.
- . M a des valeurs propres, réelles, positives ou nulles.

2° Etudier l'appartenance à \mathcal{T} des trois matrices A, B, C définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3° Etude des matrices appartenant à \mathcal{T} .

- a) Pour tout vecteur V de composantes réelles x, y , on pose $M = V {}^tV$ où tV désigne la transposée de V .
 - . Comparer $\phi(M)$ et $[\phi(V)]^2$ et montrer que M est nulle si et seulement si V est nul.
 - . Montrer que $MV = \phi(V).V$ et que $M^2 = \phi(V).M$.
 - . Déterminer en fonction de V les valeurs propres et les vecteurs propres de M pour $V \neq 0$.
 - . Etablir que M appartient à \mathcal{T} .
- b) On considère réciproquement une matrice M non nulle de \mathcal{T} .
 - . Montrer qu'il existe un vecteur non nul X appartenant à \mathbb{R}^2 tel que $\text{Im } M = \text{Vect}(X)$, puis un vecteur non nul Y appartenant à \mathbb{R}^2 tel que $M = X {}^tY$.
 - . Montrer, en utilisant la symétrie de la matrice M , qu'il existe un nombre réel non nul λ tel que $Y = \lambda.X$.
 - . Montrer enfin que λ est positif et en déduire l'existence d'un vecteur non nul V tel que $M = V {}^tV$.
- c) On considère l'application f associant à tout vecteur V de \mathbb{R}^2 la matrice carrée $f(V) = V {}^tV$.
 - . f est-elle surjective de \mathbb{R}^2 dans \mathcal{T} ?
 - . f , de \mathbb{R}^2 dans \mathcal{T} , est-elle injective ?

4° On considère dans cette question deux nombres réels p, q tels que $0 < p < q < 1$ et $p + q = 1$, et la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$. L'objectif de cette question est de trouver les matrices M appartenant à \mathcal{T} qui minimisent l'expression $\phi(A - M)$.

a) La matrice A appartient-elle à \mathcal{T} ?

b) On désigne par x, y les composantes d'un vecteur V . Expliciter la matrice $A - V^t V$, puis exprimer en fonction de x, y la quantité $F(x, y) = \phi(A - V^t V)$.

c) Calculer les dérivées partielles de $F : \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

d) Etablir, pour $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$, $\frac{\partial F}{\partial u}(x, y) = 4(x + y)(x^2 + y^2 - 1)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(x, y) = 4(x - y)(x^2 + y^2 - p + q)$.

e) En déduire que F admet trois points critiques exactement dont $(0, 0)$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

f) Donner des équivalents en 0 de $F(x, x) - F(0, 0)$ et de $F(x, -x) - F(0, 0)$. F présente-t-elle un extremum au point critique $(0, 0)$?

g) Etablir pour tout couple (x, y) de nombres réels l'égalité

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 2q(x - y)^2 + (q - p)^2$$

Que dire de F en son point critique $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$?

h) En déduire le minimum de l'expression $\phi(A - V^t V)$ lorsque V décrit l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^2 ainsi que les vecteurs V qui réalisent ce minimum.

i) Prouver enfin qu'il existe une matrice M appartenant à \mathcal{T} et une seule qui minimise l'expression $\phi(A - M)$.

En désignant par φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 représenté par cette matrice M , reconnaître la nature géométrique de φ et en donner les éléments caractéristiques.

F I N
