

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## DEVOIR D'ALGÈBRE

(noté sur 8 points environ)

I On définit dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  les matrices  $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $T = N - 2.I_3$ .

- a) Donner en fonction de  $n$  la valeur de  $N^n$ .
- b) En déduire la valeur de  $T^n$  en fonction de  $n$ .

II  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  en est une base. On prend  $u \in \mathcal{L}(E)$  de matrice  $M = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

1° a) Donner la valeur du déterminant de  $(k.I_3 - M)$  pour un réel  $k$  quelconque. Pour quelles valeurs de  $k$  ce nombre est-il nul ?

- b) Quel est le rang de  $u$  ?
- c) Caractériser le noyau de  $(u + 2.id_E)$  ; en donner une base. Quel est le rang de  $(u + 2.id_E)$  ?

2° On pose  $\varepsilon_1 = e_1 - e_2 - e_3$  et  $\Delta = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ .

- a) Justifier que  $\Pi = \text{Vect}(e_1, e_2)$  est un sous-espace supplémentaire de  $\Delta$  dont  $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$  est une base.
- b) Donner la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  de la projection  $p$  sur  $\Pi$  dans la direction  $\Delta$ .
- c) On pose  $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$  et  $\varepsilon_3 = e_2$ . Montrer que  $\mathcal{C}' = (\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base de  $\Pi$ .

3° a) Justifier que  $p \circ u$  peut être considéré comme un endomorphisme de  $\Pi$  ; il sera noté  $u'$ .

- b) Donner la matrice de  $u'$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

4° Soit  $\Delta' = \{x \in E / u'(x) = -2.x\}$ .

- a) Justifier que  $\Delta'$  est un sous-espace vectoriel de  $\Pi$ . En donner la dimension.
- b) Donner la matrice de  $u'$  dans la base  $\mathcal{C}'$ .

5° a) Justifier que  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base de  $E$ .

- b) Donner la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ .
- c) Donner la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{C}$ .
- d) En déduire en fonction de  $n$  une expression de  $M^n$ .

---

## DEVOIR D'ANALYSE

(noté sur 12 points environ)

### EXERCICE 1

#### calcul intégral

( ~ 2 points )

Soit l'intégrale  $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

- a) Transformer cette intégrale par le changement de variable  $x = \frac{1}{\operatorname{sh} u}$ .
- b) En déduire la valeur de  $I$ .

---

### EXERCICE 2

#### description locale

( ~ 2 points )

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; \pi]$  par  $f(0) = 0$  et  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin(x/2)}$  si  $x > 0$ .

- a) Donner un développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 1.
- b)  $f$  est-elle continue en 0 ?  $f$  est-elle dérivable en 0 ? Dans l'affirmative donner son nombre dérivé en 0.
- c)  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi]$  ?

---

### PROBLÈME

#### courbe paramétrée

( ~ 8 points )

1° On définit les équations  $(e') : z' + z \operatorname{th} t = 0$  et  $(e) : z' + z \operatorname{th} t = t \operatorname{th} t$ , d'inconnue  $z$  et de variable  $t$ .

- a) Résoudre  $(e')$  sur  $\mathbb{R}$ . Trouver la solution, notée  $g_1$ , prenant la valeur 1 en 0.
- b) Résoudre  $(e)$  sur  $\mathbb{R}$ . Trouver la solution, notée  $g_2$ , prenant la valeur 0 en 0.

2° Dans le plan rapporté à un repère orthonormal on considère la courbe  $(\Gamma) : \begin{cases} x = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \\ y = t - \operatorname{th} t \end{cases}$

- a) Démontrer que  $(\Gamma)$  admet un axe de symétrie.
- b) Faire le tableau conjoint des variations des deux fonctions de paramétrage.
- c) Etudier l'existence de points stationnaires de  $(\Gamma)$  et préciser éventuellement leur nature.
- d) Donner une équation cartésienne de la tangente à  $(\Gamma)$  au point  $M$  de paramètre  $t$ . Cette tangente coupe l'axe des ordonnées en un point  $N$ . Donner la distance  $MN$ .
- e) Calculer les images par  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{th}$  de  $\ln(1 + \sqrt{2})$ . En déduire une équation cartésienne de la tangente à  $(\Gamma)$  qui a pour coefficient directeur  $-1$ .
- f) Donner l'allure de la courbe  $(\Gamma)$  après avoir décrit le comportement des branches infinies.

---

F I N

---