

# I.S.E.P.

Cycle préparatoire

Math.Sup. 2

Devoir 2

## Mathématiques

13 octobre 1997

durée 3 heures 30

sans calculatrice

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

## QUESTIONS DE COURS

( 4 points)

- 1° Énoncer le théorème dit "des gendarmes" et le démontrer.
- 2° Démontrer le théorème : " toute suite de réels, croissante et majorée, converge ".

## QCM

réponse sur la feuille annexée

( 12 points)

La feuille de réponse doit être remplie, avec le plus grand soin, au stylo, bille ou feutre, noir ou bleu. Faites attention, lorsque vous noircissez une marque, de ne pas déborder : la correction étant automatique, il pourrait y avoir pénalisation pour réponse multiple en cas d'ambiguïté.

La feuille de réponse ne doit être ni souillée, ni froissée, ni pliée, ni écornée, ... ni porter des inscriptions superflues, pour ne pas être rejetée par la machine.

Dès la distribution des sujets : assurez-vous que vous avez inscrit vos noms et prénoms (ils ne seront pas lus par la machine) et codé avec soin votre numéro de table (**lettre A** puis numéro de la carte d'étudiant précédé de 0). Cochez aussi la **série E** et la **matière MAT**.

Dans chaque partie il y a 4 questions, chacune d'elles a pour réponse vrai(V) ou faux(F). Une bonne réponse rapporte (1 en général), une mauvaise réponse pénalise (-1 en général), ne pas répondre n'a pas d'effet. Avoir toutes les réponses justes à une partie peut apporter un bonus.

- 1° Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des parties d'un ensemble  $E$ .
  - a )  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
  - b )  $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
  - c ) De  $A \Delta B = A \Delta C$  on peut déduire  $B = C$ .
  - d ) De  $A \setminus B = (A \cup C) \setminus B$  on peut déduire  $A \cap C \subset B$
- 2° L'assertion  $\mathcal{A}$  est définie pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$  : " $\sqrt{4 - x^2} \geq 1 - x$ "
  - a ) Pour  $\mathcal{A}$ , " $x \leq 2$ " est nécessaire

**b )** Pour  $\mathcal{A}$ , " $x > 1$ " est suffisant

**c )** Pour  $\mathcal{A}$ , " $x \in [-2, 2]$  et  $x \geq \frac{1 - \sqrt{7}}{2}$ " est suffisant

**d )** Pour  $\mathcal{A}$ , " $4 - x^2 \geq x^2 - 2x + 1$ " est suffisant

**3°** Ordre dans  $\mathbb{R}$  et inégalités remarquables

**a )** Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si les deux réels sont positifs ou nuls.

**b )** L'inégalité triangulaire donne : " $|a - b| \geq |a| - |b|$  pour tous réels  $a$  et  $b$ "

**c )** L'inégalité de Schwarz s'écrit :  $\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$

**d )** L'inégalité de Minkowski s'écrit :  $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \left( \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \right) + \left( \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)$

**4°** Soit la partie de  $\mathbb{R}$ ,  $E = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$

**a )**  $E$  est fini

**b )**  $E$  admet  $\sqrt{2} + 1$  pour majorant

**c )**  $E$  admet une borne supérieure

**d )** l'ensemble des minorants de  $E$  admet une borne supérieure

**5°** Soit la fonction  $f$  de  $E$  dans  $F$

**a )**  $E$  est l'ensemble de définition de  $f$

**b )** si  $A$  et  $B$  sont des parties de  $E$ , alors  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

**c )** si  $\text{Im}(f) = F$  et  $\mathcal{D}_f = E$  alors  $f$  est bijective

**d )** si  $f$  est surjective, alors  $f^{-1}(f(A)) = A$  pour toute partie  $A$  de  $E$

**6°** Définitions et caractérisations :

**a )** " $\forall A \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n n > N \Rightarrow u_n \geq A$ " si et seulement si  $\lim_n u_n = +\infty$

**b )** " $\exists A \in \mathbb{R} \forall N \in \mathbb{N} \exists n n > N$  et  $u_n \geq A$ " si et seulement si  $\lim_n u_n \neq +\infty$

**c )** " $\exists A \in \mathbb{R} \forall N \in \mathbb{N} \exists n n > N$  et  $u_n \geq A$ " si et seulement si  $(u_n)_n$  non majorée

**d )** " $\forall A \in \mathbb{R} \forall N \in \mathbb{N} \exists n n > N$  et  $u_n \geq A$ " si et seulement si  $(u_n)_n$  non majorée

**7°** propriétés :

**a )** Si  $(u_n)_n$  converge, alors  $(|u_n|)_n$  converge.

**b )**  $(u_n)_n$  est monotone si et seulement si  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  le sont aussi.

**c )** Si  $(u_n)_n$  converge, alors  $(u_n)_n$  est monotone à partir d'un certain rang.

**d )** Toute suite divergente est non monotone ou non bornée.

**8°** Etude de suites de réels :

**a )**  $(u_n)_n$  où  $\forall n \ u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}}}}$  est croissante.

**b )**  $(u_n)_n$  où  $\forall n \ u_n = \frac{\sin n}{2^n}$  converge.

**c )**  $(u_n)_n$  où  $\forall n \ u_n = \frac{\sqrt{n} - (-1)^n n}{\sqrt{n} + (-1)^n n}$  est non bornée.

**d )**  $(u_n)_n$  où  $\forall n \ u_n = \sqrt{2n-3} - \sqrt{n+1}$  a pour limite  $+\infty$ .

**9°** Soit la suite :  $(u_n)_n$  telle que  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \ u_{n+1} = 2 + \ln u_n \end{cases}$

**a )**  $(u_n)_n$  est définie sur  $\mathbb{N}$ .

**b )**  $(u_n)_n$  est croissante.

**c )**  $(u_n)_n$  est convergente.

**d )**  $(u_n)_n$  est bornée

---

## EXERCICE 3

**à rédiger**

( 4 points)

**1°** Justifier une de vos quatre réponses à la question **9°** du QCM.

**2°** La suite  $(u_n)_n$  est définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \ u_{n+1} = u_n + \frac{1+u_n}{1+2u_n} \end{cases}$

**a )** Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est croissante.

**b )** La suite  $(u_n)_n$  est-elle bornée ?

---

*F I N*

---