

I.S.E.P.

Cycle préparatoire

Math.Sup. 2

Devoir 3

Mathématiques

24 novembre 1997

durée 3 heures 30

sans calculatrice

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

QUESTIONS DE COURS

(3 points)

Démontrer le théorème : " toute fonction définie et croissante sur \mathbb{R} admet une limite en $+\infty$ ".

QCM

réponse sur la feuille annexée

(11 points)

La feuille de réponse doit être remplie, avec le plus grand soin, au stylo, bille ou feutre, noir ou bleu. Faites attention, lorsque vous noircissez une marque, de ne pas déborder : la correction étant automatique, il pourrait y avoir pénalisation pour réponse multiple en cas d'ambiguïté.

La feuille de réponse ne doit être ni souillée, ni froissée, ni pliée, ni écornée, ... ni porter des inscriptions superflues, pour ne pas être rejetée par la machine.

Dès la distribution des sujets : assurez-vous que vous avez inscrit vos noms et prénoms (ils ne seront pas lus par la machine) et codé avec soin votre numéro de table (**lettre A** puis numéro de la carte d'étudiant précédé de 0). Cochez aussi la **série E** et la **matière MAT**.

Dans chaque partie il y a 4 questions, chacune d'elles a pour réponse vrai(V) ou faux(F). Une bonne réponse rapporte (1 en général), une mauvaise réponse pénalise (-1 en général), ne pas répondre n'a pas d'effet. Avoir toutes les réponses justes à une partie peut apporter un bonus.

Complexes et géométrie : soient les points du plan A , B , M et M' d'affixes respectives $5 - i$, $1 + i$, z et iz dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1° des calculs complexes pour des réponses géométriques

- a) la distance AB vaut $2\sqrt{5}$
- b) pour $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ B , M et M' sont alignés
- c) pour $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ A , M et M' sont cocycliques
- d) pour $z = -3 + i$, $ABMM'$ est un parallélogramme

2° des réflexions géométriques pour des réponses complexes

- a) pour tout complexe z , le triangle $\Omega MM'$ est isocèle

- b) pour tout complexe z , le triangle $\Omega MM'$ est rectangle
 - c) il existe un et un seul complexe z tel que A, B, M et M' soient alignés
 - d) il existe un et un seul complexe z tel que A, B, M et M' soient cocycliques
-

Logique, limites et comparaison

3° f est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$

- a) si f est continue en 0, alors f admet une limite en 0
- b) si f admet une limite réelle en $+\infty$, alors f est bornée
- c) si $|f|$ admet une limite en $+\infty$, alors f aussi
- d) si $|f|$ est continue en 0, alors f ou $-f$ est continue en 0

4° f et g sont telles que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} g(x)$

- a) si $f(x) = o_0(x^7)$ alors $g(x) = o_0(x^7)$
 - b) si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{2}$ alors $(g(x) - \sqrt{2}) = o_0(x)$
 - c) $f(x) = o_0(x^8)$ est nécessaire pour $g(x) = O_0(x^9)$
 - d) si $0 \in \mathcal{D}_f$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f(0)$
-

Soit $f : x \mapsto e^{1/x} \sqrt{x(x+1)}$ et \mathcal{C} sa courbe représentative relativement au repère \mathcal{R} du plan.

5° propriétés globales

- a) $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$
- b) f est paire
- c) f est monotone sur $] -\infty, -1[$
- d) f est monotone sur $]1, +\infty[$

6° propriétés locales en un réel

- a) f admet une limite en 1
- b) f admet une limite en -1
- c) f admet $+\infty$ pour limite en 0

d) $f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{\sqrt{-x-1}}{e}$

7° propriétés locales en l'infini

- a) f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$
- b) $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$

c) $f(x) - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 0$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 1$

8° branche infinie de \mathcal{C}

a) \mathcal{C} admet une asymptote verticale

b) \mathcal{C} admet en $+\infty$ une asymptote horizontale

c) la droite d'équation $y = x + \frac{3}{2}$ est asymptote à \mathcal{C}

d) au voisinage de $+\infty$, \mathcal{C} est au-dessus de son asymptote

EXERCICE 3

à rédiger

(6 points)

Soit l'équation (e) : $x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0$ où a et b sont des coefficients réels. (on appelle solution de (e) dans l'ensemble E tout élément α de E tel que $f(\alpha) = 0$ où $f : x \mapsto x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1$).

1° Démontrer que si l'équation (e) a dans \mathbb{C} une solution non réelle x_0 , alors elle a aussi pour solutions dans \mathbb{C} $\overline{x_0}$ (le conjugué de x_0) et $\frac{1}{x_0}$ (l'inverse de x_0).

2° On pose $a = -\frac{3}{2}$ et $b = \frac{9}{2}$.

a) Calculer $f(1 + i)$.

b) Donner l'ensemble des solutions de (e) dans \mathbb{C} .

3° a) Déterminer a et b sachant que l'équation (e) admet pour solution dans \mathbb{C} le nombre $2 + i$.

b) Factoriser $f(x)$ sous la forme d'un produit de fonctions affines à coefficients complexes.

c) Mettre $f(x)$, si c'est possible, sous la forme d'un produit de deux fonctions polynomiales à coefficients réels.

4° a) Déterminer a et b sachant que l'équation (e) admet pour solution le nombre $\rho e^{i\theta}$ où ρ et θ sont deux réels tels que $0 < \rho < 1$ et $0 < \theta < \pi$.

b) Résoudre dans ce cas (e) dans \mathbb{C}

c) Mettre $f(x)$, si c'est possible, sous la forme d'un produit de deux fonctions polynomiales à coefficients réels.

F I N

formulaire

en cas de besoin, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
 \exp x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n && +o(x^n) \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n && +o(x^n) \\
 \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} && +o(x^{2n+2}) \\
 \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} && +o(x^{2n+1}) \\
 \tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} && +o(x^{12}) \\
 \operatorname{sh} x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} && +o(x^{2n+2}) \\
 \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} && +o(x^{2n+1}) \\
 \operatorname{th} x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \frac{1382}{155925}x^{11} && +o(x^{12}) \\
 \arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{1 \dots (2n-1)}{2 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} && +o(x^{2n+2}) \\
 \arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} && +o(x^{2n+2})
 \end{aligned}$$