

DEVOIR D'ANALYSE

Partie A

1° a) Pour $a = 0$ on a bien sûr γ_a constante à 1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1. On définit ainsi g_0 .

Pour $a > 0$, on a pour $x > 0$, $\gamma_a(x) = e^{a \ln x}$ et puisque $\lim_{x \rightarrow 0} a \ln x = -\infty$, on a γ_a de limite 0 en 0 donc prolongeable par continuité par la valeur 0. On définit ainsi g_a .

b) $a \geq 1$. Sur $]0, +\infty[$, γ_a , donc g_a , est dérivable de dérivée $a \gamma_{a-1}$. Comme on a g_a continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et de dérivée prolongeable par continuité en 0, le théorème du prolongement donne que g_a est dérivable en 0 (de nombre dérivé $g'_a(0) = \lim_{x \rightarrow 0} a \gamma_{a-1}(x) = a g_{a-1}(0)$) et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. On a de plus $g'_a = a \cdot g_{a-1}$.

2° On fait le changement de variable $u = 1 - t$ et alors

$$I(b, a) = \int_0^1 g_b(t) g_a(1-t) dt = \int_1^0 g_b(1-u) g_a(u) (-du) = \int_0^1 g_a(u) g_b(1-u) du = I(a, b)$$

3° g_{a+1} et g_{b+1} sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ d'après la question 1, on peut donc faire une intégration par parties :

$$I(a+1, b) = \int_0^1 t^{(a+1)} (1-t)^b dt = \left[-t^{(a+1)} \frac{(1-t)^{(b+1)}}{b+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{a+1}{b+1} t^a (1-t)^{(b+1)} dt = \frac{a+1}{b+1} I(a, b+1)$$

4° Pour $a < 0$, $I(a, 0) = \int_0^1 t^a dt = \frac{1}{a+1}$. La relation précédente permet alors pour n dans \mathbb{N} ,

$$I(a, n) = \frac{n}{a+1} I(a+1, n-1) = \dots = \frac{n!}{(a+1) \dots (a+n)} I(a+n, 0) = \frac{n!}{(a+1)(a+2) \dots (a+n+1)}.$$

5° Dans le cas de p et q deux entiers naturels, on a alors

$$I(p, q) = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$$

6° Soit $J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p+1} (\cos \theta)^{2q+1} d\theta$. Le changement de variable $u = \sin^2 \theta$ donne $du = 2 \sin \theta \cos \theta$, $(\sin \theta)^{2p} = u^p$ et $(\cos \theta)^{2q} = (1-u)^q$ d'où

$$J(p, q) = \int_0^1 \frac{1}{2} u^p (1-u)^q du = \frac{1}{2} I(p, q) = \frac{1}{2} \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$$

Partie B

1° $x \in \mathcal{D}_{f_a}$ si et seulement si $\left(1 - \frac{a}{x}\right) > 0$ d'où $\mathcal{D}_{f_a} =]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[$.

2° Plusieurs méthodes :

– On connaît l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ pour tout u . Alors, pour $0 < a < x$ on a $\ln\left(\frac{x}{x-a}\right) = \ln\left(1 + \frac{a}{x-a}\right) \leq \frac{a}{x-a}$ puis

$$\ln\left(\frac{x}{x-a}\right) = -\ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) \geq \frac{a}{x}.$$

– La fonction \ln est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Pour $0 < a < x$ et $x-a \leq t \leq x$, on a $\frac{1}{x} \leq \ln'(t) = \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x-a}$. Le théorème des accroissements finis appliqué à \ln sur $[x-a, x]$ donne alors $\frac{1}{x} \cdot a \leq \ln x - \ln(x-a) \leq \frac{1}{x-a} \cdot a$.

– Soit $\varphi : \left[x \mapsto \ln x - \ln(x-a) - \frac{a}{x}\right] = \ln\left(\frac{x}{x-a}\right) - \frac{a}{x}$. Pour $x > a$ on a $\varphi'(x) = \frac{a^2}{x^2(x-a)} < 0$. Ainsi φ est décroissante sur $]a, +\infty[$ et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$, on a $\varphi(x) > 0$ pour $x > a$.

Soit $\psi : \left[x \mapsto \ln x - \ln(x-a) - \frac{a}{x-a}\right] = \ln\left(\frac{x}{x-a}\right) - \frac{a}{x-a}$. Pour $x > a$ on a $\psi'(x) = \frac{a^2}{x(x-a)^2} > 0$. Ainsi ψ est croissante sur $]a, +\infty[$ et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$, on a $\psi(x) < 0$ pour $x > a$.

Ainsi $0 < a < x$ donne $\frac{a}{x} \leq \ln x - \ln(x-a) \leq \frac{a}{x-a}$.

3° f_a est bien sûr de classe C^∞ sur $]a, +\infty[$ et pour $x > a$, on a

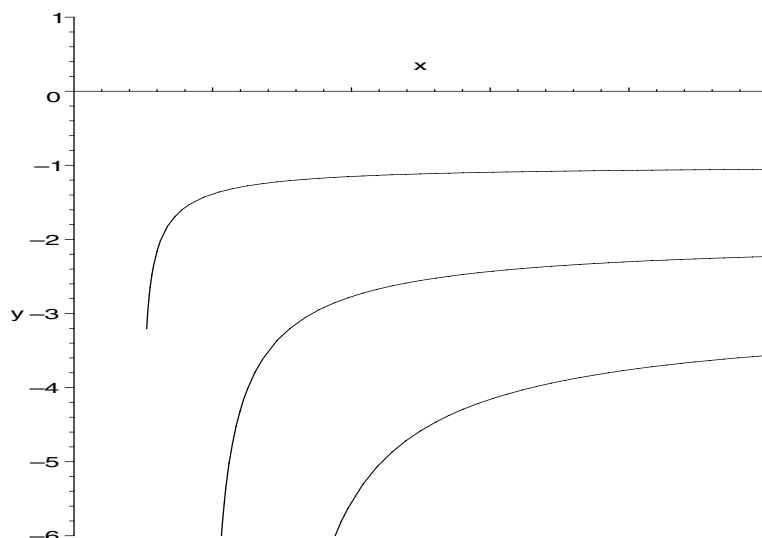
$$f'_a(x) = \ln(x-a) - \ln x + x \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x} \right) = \ln\left(\frac{x-a}{x}\right) + \frac{a}{x-a} = -\psi(x).$$

La question précédente donne f_a croissante sur $]a, +\infty[$. Sans difficulté on a $\lim_{x \rightarrow a} f_a(x) = -\infty$.

Pour x vers $+\infty$, on a $\ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) \sim -\frac{a}{x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = -a$. D'où le tableau de variations :

x	a	$+\infty$
$f'_a(x)$		+
$f_a(x)$		$-a$
	$-\infty$	

4°



5° a) $a > 0$, pour $n > a$, $y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \exp f_a(n)$. Puisque \exp et f_a sont croissantes sur leurs ensembles de définition, on a la suite $(y_n)_{n > a}$ croissante.

b) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_a(n) = -a$, on a $\lim_n y_n = e^{-a}$, la suite $(y_n)_{n>a}$ converge.

6° La suite $(y_n)_{n>a}$ étant croissante, on a $\lim_n y_n = \sup_n y_n = e^{-a}$, donc $\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n < e^{-a}$ pour tout n , $0 < a < n$.

Partie C

1° Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés. On peut définir h sur $[0, +\infty[$ par $h(0) = 0$ et pour $u > 0$, $h(u) = u^x \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n$. h est le produit de g_x par une fonction polynomiale, elle est continue sur $[0, +\infty[$. Le théorème de changement de variable donne alors avec $u = nt$:

$$F_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n (nt)^x n dt = n^{x+1} I(x, n).$$

2° La suite $(y_n)_n$ de la partie précédente est croissante donc pour $u > 0$, $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1}$. Ce résultat est encore vérifié pour $u = 0$.

Par croissance de l'intégrale on a $F_n(x) \leq \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x du$ puis $F_n(x) \leq F_{n+1}(x)$ puisque la fonction intégrée est à valeurs positives sur $[n, n+1]$.

D'où, pour tout x fixé, la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

3° a) Pour $0 < u < n$, $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right)$. Or $n \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right) = n(\ln(n-u) - \ln n) \leq -\frac{u}{n} n$ d'après la partie B. Alors $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}$.

b) La majoration précédente restant vraie pour $u = 0$ et $u = n$ on déduit $F_n(x) \leq \int_0^n e^{-u} u^x du$.

c) On sait $u^{x+2} = o_{+\infty}(e^u)$ donc $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{x+2}}{e^u} = 0$. On a donc l'existence de U tel que $0 < \frac{u^{x+2}}{e^u} < 1$ si $u > U$, donc

$$\forall u \in [0, +\infty[, \quad u \geq U \Rightarrow e^{-u} \leq \frac{1}{u^{x+2}}$$

d) On a pour $n < U$, $F_n(x) \leq \int_0^n e^{-u} u^x du \leq \int_0^U e^{-u} u^x du \leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \frac{1}{U}$. De même pour $n \geq U$,
 $F_n(x) \leq \int_0^n e^{-u} u^x du = \int_0^U e^{-u} u^x du + \int_U^n e^{-u} u^x du \leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \int_U^n \frac{u^x}{u^{x+2}} du \leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \frac{1}{U}$.

e) La suite $(F_n(x))_n$ est croissante. On vient d'obtenir qu'elle est majorée, elle converge. Sa limite est $F(x)$.

4° a) $F_n(x+1) = n^{x+2} I(x+1, n) = n^{x+2} \frac{x+1}{n+1} I(x, n+1)$. Par ailleurs $F_{n+1}(x) = (n+1)^{x+1} I(x, n+1)$ donc
 $F_n(x+1) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{x+2} (x+1) F_{n+1}(x)$.

b) Par passage à la limite, on a $\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x+1) = (x+1) F(x)$.

c) On en déduit $F(k) = k! F(0)$ pour tout k . Or $F_n(0) = n I(0, n) = \frac{n}{n+1}$, donc $F(0) = 1$ à la limite. D'où $F(k) = k!$ pour tout k entier naturel.

DEVOIR D'ALGÈBRE

Dans cet exercice, l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 est rapporté à sa base canonique \mathcal{B} et on identifie : – tout vecteur de \mathbb{R}^2 à la matrice colonne V de ses composantes x et y dans \mathcal{B} . – tout endomorphisme de \mathbb{R}^2 à sa matrice M dans \mathcal{B} . – toute matrice 1×1 à un réel

Etude des matrices appartenant à \mathcal{T}

1° A , B et C sont symétriques. A et C sont de rang 2 et B de rang 1. Les valeurs propres de B sont 0 (vecteurs propres les $(\lambda, -\lambda)$) et 2 (vecteurs propres les (λ, λ)). Ainsi seule B est dans \mathcal{T} .

2° $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M = V {}^t V$.

a) On a $[\phi(V)]^2 = (x^2 + y^2)^2$ et $\phi(M) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$, donc $\phi(M) = [\phi(V)]^2$.

M est nulle si et seulement si $\phi(M) = 0$ donc si et seulement si $\phi(V) = 0$ donc si et seulement si V est nul.

b) $MV = \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 \\ x^2y + y^3 \end{pmatrix} = \phi(V).V$ et alors $M^2 = M(V {}^t V) = (MV) {}^t V = \phi(V).V {}^t V = \phi(V).M$.

c) Pour $V \neq 0$, $MV = \phi(V).V$ donne V vecteur propre et donc $\phi(V)$ valeur propre. On a $\phi(V) \neq 0$ donc $\text{Im } M$ de dimension 1, donc M de rang 1, donc $\text{Ker } M$ de dimension 1 donc 0 valeur propre.

X dans \mathbb{R}^2 . $X \in \text{Ker } M$ si et seulement si $MX = 0$. Or $MX = (V {}^t V)X = V({}^t V X) = ({}^t V X).V$ car $({}^t V X)$ réel. On a $V \neq 0$ donc $X \in \text{Ker } M$ si et seulement si ${}^t V X = 0$. Le noyau de M est la droite orthogonale à V .

d) Nous venons de voir M de rang 1, de valeurs propres 0 et $\phi(V) > 0$. Par ailleurs ${}^t M = {}^t(V {}^t V) = {}^t({}^t V) {}^t V = M$ donc M symétrique. Ainsi M appartient à \mathcal{T} .

3° On considère réciproquement une matrice M non nulle de \mathcal{T} .

a) M non nulle de \mathcal{T} donc $\text{rg } M = 1$. Posons $\text{Im } M = \text{Vect}(X)$. Les colonnes de M sont les images de vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 , elles sont dans $\text{Im } M$. Elles s'écrivent donc $\alpha.X$ et $\beta.X$. En posant $Y = (\alpha, \beta)$, on a bien $M = X {}^t Y$. De plus Y est non nul car sinon on aurait $M = 0$.

b) M symétrique donc ${}^t M = M$ i.e. $Y {}^t X = X {}^t Y$. Donc $Y \in \text{Im } M$ i.e. $Y = \lambda.X$, $\lambda \neq 0$.

c) On a alors $M = X {}^t (\lambda.X) = \lambda.X {}^t X$, donc $MX = [\lambda\phi(X)].X$. Ainsi $\lambda\phi(X)$ est valeur propre de M , positive ou nulle. On a $\phi(X) > 0$, $\lambda \neq 0$ donc $\lambda > 0$.

On pose $V = \sqrt{\lambda}.X$ et alors $M = V {}^t V$.

4° On considère l'application f associant à tout vecteur V de \mathbb{R}^2 la matrice carrée $f(V) = V {}^t V$.

a) f n'est pas linéaire de \mathbb{R}^2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque pour $V \neq 0$, $f(2.V) = 4.f(V) \neq 0$.

b) f est bien à valeurs dans \mathcal{T} d'après la question 2 et surjective d'après la question 3.

c) f n'est pas injective puisque pour $V \neq 0$, on a $f(v) \neq 0$ et $f(-V) = f(V)$ (attention, puisque f n'est pas linéaire, l'étude d'un "noyau" ne suffit pas).

matrices M de \mathcal{T} minimisant l'expression $\phi(A - M)$

$$0 < p < q < 1, p + q = 1 \text{ et } A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

1° On a bien A symétrique, non nulle. $\text{rg } A = 1$ si et seulement si $\det A = 0$ i.e. $p = q = 0,5$. Ceci n'est pas conforme à l'hypothèse, donc $A \notin \mathcal{T}$.

2° Pour x, y réels, on pose $F(x, y) = \phi(A - V^t V)$ où $V = (x, y)$.

a) $A - V^t V = \begin{pmatrix} p - x^2 & q - xy \\ q - xy & p - y^2 \end{pmatrix}$. Alors $F(x, y) = (p - x^2)^2 + 2(q - xy)^2 + (p - y^2)^2$.

b)
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 4(x^3 - px - qy + xy^2) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 4(y^3 - py - qx + x^2y) \end{cases}.$$

c) Soit le système (s) :
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \text{ donc } (s) \iff \begin{cases} x^3 + y^3 - x - y + xy(x + y) = 0 \\ (x^3 - y^3) + (q - p)(x - y) = 0 \end{cases}.$$
 Puisque

$(q - p) > 0$ et $(x^2 + xy + y^2) > 0$ pour tous x et y , la seconde équation rend nécessaire $x = y$. On a alors la condition nécessaire $x = y = 0$ ou $x = y = 1/\sqrt{2}$ ou $x = y = -1/\sqrt{2}$, qui est suffisante.

On a $O = (0, 0)$, $a = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $b = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ les points critiques de F . En ces points on a les valeurs $F(0, 0) = 2p^2 + 2q^2 = 2 - 4pq = 1 + (q - p)^2$, $F(a) = (q - p)^2$ et $F(b) = (q - p)^2$.

d) Pour x réel, $F(x, x) - F(0, 0) = 4x^4 - 4x^2 \sim -4x^2$, et $F(x, -x) - F(0, 0) = 4x^4 - 4(p - q)x^2 \sim 4(q - p)x^2$.

La fonction partielle $[x \mapsto F(x, x)]$ admet donc un maximum local en 0 tandis que la fonction partielle $[x \mapsto F(x, -x)]$ admet un minimum local en 0 puisque $(q - p) > 0$.

F ne présente donc pas d'extremum en $(0, 0)$ (point col).

e) Un calcul simple donne pour tout (x, y) l'égalité $F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 2q(x - y)^2 + (q - p)^2$.

Ainsi pour (x, y) sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R , i.e. $x^2 + y^2 = R^2$, on a $F(x, y) \geq (R^2 - 1)^2$ puisque $q > 0$.

f) \mathcal{B} est la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 2. Son image par F qui est continue sur \mathbb{R}^2 (fonction polynomiale) est un segment de \mathbb{R} . Celui-ci admet un plus petit élément m (avec $m \leq (q - p)^2$ puisque $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ fait partie de \mathcal{B}). Il n'y a pas d'antécédent de m sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2 puisque sur ce cercle les valeurs prises sont supérieures ou égales à 1. Le minimum est donc atteint en des points intérieurs à \mathcal{B} qui doivent donc être des points critiques de F . Ils sont donc a et b .

g) F est minimale en a et b et ce minimum $(q - p)^2$ est absolu puisque à l'extérieur du cercle de centre O et de rayon 1, les images sont supérieures ou égales à $1 + (q - p)^2$.

Donc le minimum absolu de l'expression $\phi(A - V^t V)$ lorsque V décrit l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^2 est $(q - p)^2$. Il est atteint en deux vecteurs : a et b .

h) Les M et \mathcal{T} sont les $V^t V$ où $V \in \mathbb{R}^2$ (première partie). Celles qui minimisent l'expression $\phi(A - M)$ sont donc $a^t a$ et $b^t b$. Or $a^t a = b^t b = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

L'endomorphisme de \mathbb{R}^2 représenté par cette matrice est la projection orthogonale sur la droite d'équation $y = x$.

$F \mid N$
