

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**groupes de matrices carrées**

(5 points)

On note G l'ensemble des matrices M de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. On note I_2 la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, neutre pour \times .

Il est rappelé que pour une matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le déterminant de M est le nombre $\det(M) = (\alpha\delta - \beta\gamma)$.

1° a) Établir que (G, \times) est un groupe.

b) Donner une expression simple de M^n où $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2° Soit Δ l'application $[M \mapsto \det(M)]$. Montrer que Δ est un morphisme de groupes de (G, \times) vers (\mathbb{R}^*, \times) .

3° Soit D le sous-ensemble des matrices "diagonales" de G : $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a) Est-il un sous-groupe de G ?

b) Montrer que (D, \times) est un groupe isomorphe à (\mathbb{R}^*, \times) .

EXERCICE 2**convergences**

(6 points)

Pour un entier naturel n , $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ pour tout x .

1° a) Étudier la fonction f_n et dresser le tableau de ses variations.

b) Représenter graphiquement, sans y passer trop de temps, l'allure des courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 représentant f_1 , f_2 et f_3 .

2° a) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . On notera F la limite simple de cette suite.

b) Montrer que la convergence de $(f_n)_n$ vers F est uniforme.

3° Pour tout n , $n \geq 1$, on définit la fonction u_n sur \mathbb{R} par : $u_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$.

a) Donner une expression simple (sans signe \sum) de $u_n(x)$ pour x fixé.

b) Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_n$ converge simplement et donner la limite simple, S , de cette suite.

c) La convergence de la suite $(u_n)_n$ vers S est-elle uniforme ?

EXERCICE 3**endomorphismes et projecteurs**

(9 points)

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel. (O désigne l'endomorphisme nul de E).

Partie A

1° (Ré)Établir que pour π un projecteur de E on a $\text{Ker } \pi$ et $\text{Im } \pi$ sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

2° p et q sont deux projecteurs de E . On suppose $p \circ q + q \circ p = O$.

a) Pour $x \in \text{Ker } p$ montrer $(p \circ q)(x) = 0_E$.

b) Pour $x \in \text{Im } p$ montrer $(p \circ q)(x) = 0_E$.

c) En déduire $p \circ q = q \circ p = O$.

3° p et q sont deux projecteurs de E . Montrer que les trois énoncés sont équivalents :

i/ $p + q$ projecteur de E .

ii/ $p \circ q = q \circ p = O$.

iii/ $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$ et $\text{Im } q \subset \text{Ker } p$.

Partie B

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi \neq O$ tel que $(\varphi - a.\text{id}_E) \circ (\varphi - b.\text{id}_E) = O$. (a et b réels distincts non nuls).

On pose $p = \frac{1}{b-a} \cdot (\varphi - a.\text{id}_E)$ et $q = \frac{1}{a-b} \cdot (\varphi - b.\text{id}_E)$.

1° a) Montrer que p et q sont deux projecteurs de E .

b) Montrer que $p + q$ est un projecteur de E . Le caractériser.

2° a) Exprimer φ comme une combinaison linéaire de p et q .

b) Pour tout n , en déduire une expression de $\varphi^n (= \varphi \circ \varphi \dots \circ \varphi)$ en fonction de p et q .

3° a) Etablir que φ est bijective.

b) Donner φ^{-1} en fonction de p et q .

$F \mid N$
