

1 SUITES, MATRICES ET ALGÈBRE LINÉAIRE

CORRIGÉ

Partie A

On note F l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$(R) : \quad \forall n, \quad u_{n+2} = \frac{11}{10} u_{n+1} - \frac{1}{10} u_n$$

1° La suite constante nulle est bien sûr dans F .

Avec $(u_n)_n$ dans F et k dans \mathbb{R} , on a pour tout n : $u_{n+2} = \frac{11}{10} u_{n+1} - \frac{1}{10} u_n$ donc pour tout n : $k u_{n+2} = \frac{11}{10} k u_{n+1} - \frac{1}{10} k u_n$ et donc la suite $(k u_n)_n$ appartient à F .

Avec $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ dans F , on a pour tout n : $u_{n+2} = \frac{11}{10} u_{n+1} - \frac{1}{10} u_n$ et aussi $v_{n+2} = \frac{11}{10} v_{n+1} - \frac{1}{10} v_n$ donc $(u_{n+2} + v_{n+2}) = \frac{11}{10} (u_{n+1} + v_{n+1}) - \frac{1}{10} (u_n + v_n)$ et donc la suite $(u_n + v_n)_n$ appartient à F .

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2° a) Dans \mathbb{R}^2 , posons $X_0 = (10, 1)$. Pour ψ l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par $\psi(a, b) = (\frac{11}{10}a - \frac{1}{10}b, a)$ la relation de récurrence $\forall n, X_{n+1} = \psi(X_n)$ définit une suite unique d'éléments de \mathbb{R}^2 .

Ainsi il existe une unique suite $(w_n)_n$ de F telle que $w_0 = 1$ et $w_1 = 10$: c'est la suite des composantes secondes de $(X_n)_n$.

b) Toute suite constante appartient bien sûr à F puisque $\frac{11}{10} - \frac{1}{10} = 1$.

c) Soit $(v_n)_n$ géométrique, non constante, de raison q . L'appartenance de $(v_n)_n$ à F impose $v_2 = \frac{11}{10} v_1 - \frac{1}{10} v_0$ donc $q^2 v_0 = \frac{11}{10} q v_0 - \frac{1}{10} v_0$. Or $v_0 \neq 0$ impose $10q^2 - 11q + 1 = 0$. $(v_n)_n$ est non constante donc $q \neq 1$ et ainsi $q = \frac{1}{10}$ est nécessaire pour $(v_n)_n$ dans F .

Réciproquement, on vérifie que pour $v_0 \neq 0$, $(\frac{1}{10}^n v_0)_n$ appartient à F .

On peut énoncer que les suites géométriques éléments de F sont les suites constantes et les non constantes de raison $\frac{1}{10}$.

3° a) Le système $\begin{cases} u_0 - c = d \\ u_1 - c = \frac{1}{10} d \end{cases}$ d'inconnue (c, d) admet une solution unique : $(\frac{1}{9}(10u_1 - u_0), \frac{10}{9}(u_0 - u_1))$ quand u_0 et u_1 sont fixés.

b) Soit $(u_n)_n$ quelconque dans F . On pose $c = \frac{1}{9}(10u_1 - u_0)$ et $(v_n)_n$ géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $v_0 = \frac{10}{9}(u_0 - u_1)$. La question précédente donne $\begin{cases} u_0 = c + v_0 \\ u_1 = c + v_1 \end{cases}$.

Le **a)** donne pour (u_1, u_0) quelconque, de la même façon que pour $(10, 1)$ l'existence et l'unicité d'une suite de F dont les deux premiers termes sont imposés. Ainsi la suite $(u_n)_n$ est $(c + v_n)_n$ et donc $(u_n - c)_n$ est géométrique.

4° Dans le cas de la suite $(w_n)_n$ on a alors $w_n = 11 - (\frac{1}{10})^n 10$ pour tout n .

Partie B

E désigne l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversibles, telles que $a + c = b + d = 1$.

1° a) Le critère d'inversibilité d'une matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est $ad - bc \neq 0$.

Les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifient ce critère et sont manifestement éléments de E .

b) E contient bien sûr la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mais $2.I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas dans E , bien que $I \in E$.

Ainsi E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Par construction, E est une partie de $GL(2, \mathbb{R})$, et I , le neutre de $GL(2, \mathbb{R})$ pour \times , est dans E .

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ on a $M \times M' = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}$. Pour M et M' dans E on aura

$$\begin{cases} (aa' + cb') + (ac' + cd') = a(a' + c') + c(b' + d') = a + c = 1 \\ (ba' + db') + (bc' + dd') = b(a' + c') + d(b' + d') = b + d = 1 \end{cases}$$

Donc $M \times M' \in E$.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans E , M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-c}{ad-bc} \\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$. Or $\frac{d}{ad-bc} + \frac{-c}{ad-bc} = 1$ puisque $ad - bc = (a + c)d - (b + d)c$. Et $\frac{-b}{ad-bc} + \frac{a}{ad-bc} = 1$ puisque $ad - bc = a(b + d) - b(a + c)$. On a donc $M^{-1} \in E$.

Ainsi E est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

2° a) De la stabilité de E pour \times , on déduit par récurrence évidente, à partir de $A^0 = I \in E$ et $A \in E$, $A^n \in E$ pour tout n .

L'écriture pour n donné $A^n = \begin{pmatrix} x_n & 1 - x_n \\ 1 - y_n & y_n \end{pmatrix}$ permet de définir les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$.

b) $A^0 = I$ donc $x_0 = y_0 = 1$. $A^1 = A$ donc $x_1 = \frac{3}{5}$ et $y_1 = \frac{1}{2}$. $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{14}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{11}{20} & \frac{9}{20} \end{pmatrix}$ donc $x_2 = \frac{14}{25}$ et $y_2 = \frac{9}{20}$.

3° a) On trouve $A^2 = \alpha.A + \beta.I$ avec $\alpha = \frac{11}{10}$ et $\beta = -\frac{1}{10}$.

b) De $A^2 = \alpha.A + \beta.I$ on tire $A^{n+2} = \alpha.A^{n+1} + \beta.A^n$ pour tout n , et donc $\begin{cases} x_{n+2} = \alpha.x_{n+1} + \beta.x_n \\ y_{n+2} = \alpha.y_{n+1} + \beta.y_n \end{cases}$. Vues les valeurs de α et β , les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ satisfont la récurrence (R) de la **Partie A**.

c) Le procédé mis en place pour $(w_n)_n$ dans la **Partie A** donne ici $\begin{cases} x_n = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \left(\frac{1}{10}\right)^n \\ y_n = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \left(\frac{1}{10}\right)^n \end{cases}$ pour tout n .

D'où l'expression générale de A^n pour n quelconque.

4° a) Toute suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ converge vers 0, donc $(x_n)_n$ converge vers $\lambda = \frac{5}{9}$ et $(y_n)_n$ converge vers $\mu = \frac{4}{9}$.

b) On notera $A^\infty = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

Alors, pour tout n , $A^n = A^\infty + \left(\frac{1}{10}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$.

(C) : pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall p, \forall n (p \geq n \geq N \Rightarrow |v_n - v_p| < \varepsilon)$

1° Soient $(u_n)_n$ une suite convergente et ℓ sa limite. Pour un réel $\varepsilon > 0$, on a un entier N tel que $|v_m - \ell| < \varepsilon/2$ pour $m \geq N$.

Ainsi, pour $p \geq n \geq N$ quelconques on a $|v_n - v_p| \leq |v_n - \ell| + |v_p - \ell| < \varepsilon$.

Ainsi $(u_n)_n$ possède la propriété (C).

2° Réciproquement, considérons $(u_n)_n$ une suite possédant la propriété (C) :

a) On a alors un entier N tel que $|v_n - v_p| < 1$ pour $p \geq n \geq N$. Ainsi, pour $n \geq N$, on a $u_N - 1 < u_n < u_N + 1$. L'ensemble $\{u_m / m < N\}$ est fini, donc borné.

Ainsi la suite $(u_n)_n$ est bornée.

b) Pour n quelconque, on pose $U_n = \{u_m / m \geq n\}$. U_n est bien sûr non vide, et étant inclus dans l'ensemble image de la suite, U_n est borné.

U_n admet ainsi une borne supérieure dans \mathbb{R} : α_n .

c) Soit n quelconque. Ou bien $\alpha_n > u_n$ et u_n n'étant pas majorant de U_{n+1} , on a $\alpha_{n+1} = \alpha_n$. Ou bien $\alpha_n = u_n$ et u_n est un majorant de U_{n+1} donc $\alpha_{n+1} \leq u_n = \alpha_n$.

Ainsi la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante. Elle est minorée par tout minorant de la suite $(u_n)_n$, donc elle converge. On note ℓ sa limite.

d) $\varepsilon > 0$ quelconque est fixé.

On a N_1 tel que $|\alpha_n - \ell| < \varepsilon$ pour $n \geq N_1$ puisque $(\alpha_n)_n$ converge de limite ℓ .

On a N_2 tel que $|u_m - u_q| < \varepsilon$ pour $m \geq q \geq N_2$ puisque $(u_n)_n$ vérifie (C).

En posant $N = \max(N_1, N_2)$ et en choisissant $n \geq N$ quelconque, on a un $p > n$ tel que $|u_p - \alpha_n| < \varepsilon$ puisque $\alpha_n = \sup(U_n)$.

Alors, puisque $p > n \geq N$, on a $|u_n - u_p| < \varepsilon$.

e) Alors $|u_n - \ell| \leq |u_n - u_p| + |u_p - \alpha_n| + |\alpha_n - \ell| < 3\varepsilon$.

Ceci est vérifié par tout n à partir du rang N dont l'existence est assurée pour un $\varepsilon > 0$ quelconque. Ainsi $(u_n)_n$ converge et ℓ est sa limite.

F I N
