

# I.S.E.P.

Cycle préparatoire

Math.Sup. 2

Devoir 1

## Mathématiques

22 septembre 1997

durée 3 heures 30

sans calculatrice

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

### EXERCICE 1

#### bonne résolution

( 2 points)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\sqrt{7-9x} > 2(x-1)$

### EXERCICE 2

#### quelque logique

( 2 points)

Énoncer la négation de l'assertion :

$\langle\langle$  Pour tout entier  $n$ , si  $n$  est impair alors il existe un entier  $p$  tel que  $n^2 = 8p + 1$   $\rangle\rangle$

### EXERCICE 3

#### des ensembles . . . et un peu de raisonnement

( 6 points)

1° Soient  $A, B, C$  et  $D$  des parties d'un ensemble  $E$  telles que  $A \setminus B = C \setminus D$ .

A-t-on  $A \setminus C = B \setminus D$  ?

2° Soient  $A, B$  et  $C$  des parties d'un ensemble  $E$  telles que  $A \Delta B = A \Delta C$ .

Peut-on en déduire  $B = C$  ?

3° Soient  $A, B$  et  $C$  des parties d'un ensemble  $E$ .

De  $\begin{cases} A \cap B \subset A \cap C \\ A \cup B \subset A \cup C \end{cases}$  peut-on déduire  $B \subset C$  ?

**EXERCICE 4****souvenirs de jeunesse**

( 6 points)

On s'intéresse à l'intégrale  $I = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

1° Déterminer l'ensemble des solutions définies sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$(e_1) : y'' + y = 0$$

2° On considère l'équation différentielle

$$(e_2) : x^4 y'' + y = 0$$

a ) Etant donnée une fonction numérique  $g$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , on définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  par :

$$\text{pour tout } x \neq 0 \quad f(x) = x \cdot g\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exprimer  $f''(x)$  en fonction de  $x$  et  $g''\left(\frac{1}{x}\right)$

b ) Démontrer que  $g$  est solution de  $(e_2)$  si et seulement si  $f$  est solution de  $(e_1)$ .

c ) En déduire les solutions de  $(e_2)$  sur chacun des intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

3° Soit  $g$  une solution de l'équation  $(e_2)$ , définie sur  $]0, +\infty[$ .

a ) Dédurre de ce qui précède une primitive de la fonction  $\left[ x \mapsto \frac{1}{x^4} g(x) \right]$ .

b ) Calculer alors  $I$ .

---

**EXERCICE 5****suite et intégrale**

( 4 points)

On considère la suite  $u$  définie pour  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=1}^n \ln(n+k) \right] - \ln n$$

1° Démontrer :  $u_n = \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right]$  pour tout  $n$

2° a ) Pour  $k$  un entier, compris entre 0 et  $n-1$ , démontrer :

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

b ) En déduire :  $u_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln x \, dx \leq u_n$

3° Dédurre de ce qui précède un encadrement de  $u_n$  puis la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

---

F I N