

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.

- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.

- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.

- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.

- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

différence discrète

(10 points)

On désigne par \mathcal{S} l'ensemble des suites réelles définies sur \mathbb{N} . Dans \mathcal{S} , on note Z et U les suites constantes respectivement à 0 et 1.

On définit Δ sur \mathcal{S} par : $(\Delta(u) = v \iff \forall n \ v_n = u_{n+1} - u_n)$.

1° Exemples. Caractériser $\Delta(u)$ dans chacun des cas suivants :

a) $\forall n \ u_n = n$

b) $\forall n \ u_n = n^2$

c) $\forall n \ u_n = 2^n$

2° Propriétés.

a) Montrer que Δ est un endomorphisme de \mathcal{S} .

b) En donner le noyau.

c) Montrer que Δ est surjective.

d) Pour tout n , $v_n = 3n - 1$. Caractériser les antécédents de v par Δ .

e) Définir la suite A telle que $\Delta(A) = U$ et $A_0 = 0$.

f) Pour quelles valeurs du réel k existe-t-il des suites $(u_n)_n$ telles que $\Delta(u) = k.u$? Quelles sont alors ces suites ?

3° Soit E le sous-ensemble de \mathcal{S} des suites u telles que $\forall n \ 4u_{n+3} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n$.

a) Vérifier que Z , U et A sont éléments de E .

b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathcal{S} .

c) Prouver $\Delta\langle E \rangle \subset E$.

d) Montrer que E est isomorphe à \mathbb{R}^3 .

e) Pour $u \in E$, montrer que $\Delta(\Delta(u))$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

f) En déduire une expression du terme général u_n d'une suite u de E en fonction de n , u_0 , u_1 et u_2 .

EXERCICE 2**famille de fonctions**

(10 points)

Dans ce problème, on étudie la famille des fonctions $f_\lambda : \left[x \mapsto 1 + \ln(1 + \lambda x) \right]$ où le paramètre λ est un réel positif.

Pour tout $\lambda > 0$, on note \mathcal{C}_λ la courbe représentative de la fonction f_λ dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note \mathcal{D} la première bissectrice du repère (droite d'équation $y = x$).

1° a) Donner l'ensemble de définition de f_λ .

On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien. Montrer que \mathcal{C}_λ est l'image de (Γ) par une translation.

b) On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$. Étudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes de l'intervalle de définition.

Exprimer la valeur maximale $m(\lambda)$ que prend la fonction φ_λ sur son ensemble de définition.

c) Étudier les variations et le signe de $m(\lambda)$ en fonction de λ ($\lambda > 0$).

En déduire, pour $\lambda > 0$ donné, le nombre de points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_λ avec la droite \mathcal{D} .

2° Dans cette partie du problème, on étudie le cas $\lambda = 1$.

a) Représenter graphiquement la courbe \mathcal{C}_1 et la droite \mathcal{D} dans (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormal ; on prendra comme unité 3 cm.

On appelle P et Q les points d'intersection de \mathcal{C}_1 et de \mathcal{D} , d'abscisses respectives p et q avec $p < q$. Montrer que $-1 < p < 0$ et que $2 < q < 3$.

b) On se propose de calculer une valeur approchée de q . Pour cela, on définit une suite $(u_n)_n$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f_1(u_n)$ pour tout n . Illustrer la construction graphique de u_0, u_1 et u_2 sur l'axe (O, \vec{i}) à l'aide de la courbe \mathcal{C}_1 .

Montrer $2 \leq u_n \leq q$ pour tout n , et prouver que la suite $(u_n)_n$ converge vers q .

c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer

$$\forall n, \quad 0 \leq q - u_n \leq \frac{1}{3^n} (q - u_0)$$

d) A partir de quel rang est-on certain que u_n approche q à 10^{-2} ?

F I N
