

DEVOIR D'ANALYSE

$$\varphi \text{ solution de } (P) \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} \varphi \text{ définie sur } \mathbb{R} \\ \varphi \text{ dérivable en } 0 \\ \forall x \quad \varphi(2x) = \frac{2\varphi(x)}{1+\varphi(x)^2} \end{cases}$$

Partie A

1° a) th est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Étant continue, elle donne pour image à l'intervalle \mathbb{R} un intervalle I , conformément au théorème des accroissements finis. Par ailleurs, pour tout x , $\text{th}' x = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$, donc th , strictement croissante sur \mathbb{R} réalise une injection de \mathbb{R} dans I . Ainsi th bijective de \mathbb{R} sur I . La monotonie de th donne $I =] \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th } x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th } x[=]-1, 1[$.

b) th^{-1} définie sur $] -1, 1[$, symétrique par rapport à 0. th impaire impose, pour x dans \mathbb{R} , $\text{th}^{-1}(\text{th}(-x)) = -\text{th}^{-1}(\text{th } x)$, donc th^{-1} est impaire.

c) th est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et sa dérivée th' ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Le théorème régularité de la bijection réciproque donne alors th^{-1} est de classe C^∞ sur I .

d) Pour $x \in I$, $\text{th}^{-1}(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{th}^{-1} x)} = \frac{1}{1 - x^2}$ puisque $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$.

2° On pose $f : \left[x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]$.

a) f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Puisque \ln est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , le théorème de composition donne f de classe C^∞ sur chaque intervalle où elle est définie : $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ et $]1, +\infty[$.

b) \mathcal{D}_f est symétrique par rapport à 0. Et f est impaire puisque, pour $|x| \neq 1$, on a $f(-x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = -f(x)$.

c) Première façon. Pour $x \in] -1, 1[$, $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ donc f et th^{-1} diffèrent d'une constante sur $] -1, 1[$. Ayant $\text{th}^{-1}(0) = 0 = f(0)$, on déduit $f|_{]-1, 1[} = \text{th}^{-1}$.

Deuxième façon. th est une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$, et pour $x \in \mathbb{R}$ on a $f(\text{th } x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\text{th } x}{1-\text{th } x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2e^x}{2e^{-x}} \right| = \frac{1}{2} \ln(e^{2x}) = x$.

Donc $f|_{]-1, 1[} = \text{th}^{-1}$.

d) Pour $x \in] -1, 1[$, $\text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Or $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o_0(x^5)$ et le théorème de primitivation des DL donne, avec $\text{argth } 0 = 0$,

$$\text{argth}(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$$

Partie B

On définit l'équation différentielle (e) : $xy' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$

1° (e) admet 0 pour seul point singulier. L'équation homogène associée à (e) est (e') : $xy' + 3y = 0$.

$J =]0, 1[$ ne contient pas de point singulier, les solutions de (e') sur J sont les $\left[x \mapsto \frac{k}{x^3} \right]$ où $k \in \mathbb{R}$.

Par méthode de variation de constante, chercher g solution de (e) revient, en posant $g(x) = \frac{k(x)}{x^3}$, à chercher k telle que, pour

$$x \in J, x \frac{k'(x)}{x^3} = \frac{1}{1-x^2} \text{ donc } k'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} - 1.$$

Les solutions de (e) sur J sont donc les $\left[x \mapsto \frac{\operatorname{argth} x - x + c}{x^3} \right]$ où $c \in \mathbb{R}$.

2° Une solution de (e) sur $[0, 1[$ est une fonction dérivable sur $[0, 1[$, donc en 0, et solution de (e) sur $]0, 1[$. Une solution quelconque g de (e) sur $]0, 1[$ est $g : \left[x \mapsto \frac{\operatorname{argth} x - x + c}{x^3} \right]$, avec $c \in \mathbb{R}$. Cette fonction n'admet de limite en 0 que pour $c = 0$, la limite étant alors $\frac{1}{3}$. g prolongée par continuité est alors solution de (e) sur $[0, 1[$ (g dérivable en 0 et $g'(0) = 0$), c'est la seule.

Partie C

1° th est bien sûr définie sur \mathbb{R} , dérivable en 0, et vérifie, pour $x \in \mathbb{R}$, $\frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} = \frac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \operatorname{th}(2x)$. Ainsi th est solution de (P).

2° La fonction constante C est solution de (P) si et seulement si $C = \frac{2C}{1+C^2}$ donc si et seulement si $(1-C^2)C = 0$.

Les fonctions constantes solutions de (P) sont les constantes 0, 1 et -1.

3° Pour une solution φ de (P), $\varphi(0)$ vérifie $\varphi = \frac{2\varphi}{1+\varphi^2}$ donc $\varphi = 0$ ou $\varphi = 1$ ou $\varphi = -1$.

4° Pour φ une solution de (P), la fonction $-\varphi$ est aussi solution de (P) de manière évidente.

5° Pour φ une solution de (P) et x un réel, on pose $\alpha = |\varphi(\frac{x}{2})|$. Alors $1 - |\varphi(x)| = 1 - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha^2} \geq 0$. Ainsi $|\varphi(x)| \leq 1$.

Partie D

On considère ici, s'il en existe, une solution φ du problème (P) non constante, telle que $\varphi(0) = 1$.

On choisit alors a réel vérifiant $0 < \varphi(a) < 1$. On pose alors $\forall n, u_n = \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right)$.

1° On a $\lim_n \frac{a}{2^n} = 0$ et φ continue, puisque dérivable, en 0. Donc $(u_n)_n$ converge, de limite $\varphi(0) = 1$.

2° a) Pour n quelconque, $u_n = \varphi\left(2\frac{a}{2^{n+1}}\right) = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$.

b) On a ainsi, par récurrence immédiate, pour tout n , u_n de même signe que u_0 , et $u_0 = \varphi(a) > 0$.

c) Pour n quelconque, on a alors $u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1}(u_{n+1}^2 - 1)}{1 + u_{n+1}^2}$. Or, puisque pour tout x on a $-1 \leq \varphi(x) \leq 1$, on a pour tout n , $u_{n+1}^2 - 1 \leq 0$ et donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite $(u_n)_n$ est décroissante.

3° $u_0 < 1$, $(u_n)_n$ décroissante et $\lim_n u_n = 1$ sont contradictoires. Il n'existe pas de solution à (P) non constante prenant la valeur 1 en 0.

4° Il n'existe pas non plus de solution à (P) non constante prenant la valeur -1 en 0, puisque son opposée serait une solution non constante prenant la valeur 1 en 0.

Partie E

On considère une solution φ du problème (P) non constante, telle que $\varphi(0) = 0$. On admet $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) \neq 1, \varphi(x) \neq -1$ et on pose $\forall x, \psi(x) = \operatorname{argth}(\varphi(x))$.

1° Pour $x \in \mathbb{R}$, $\psi(2x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \varphi(2x)}{1 - \varphi(2x)} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1 + \varphi(x))^2}{(1 - \varphi(x))^2} \right) = 2\psi(x)$.

2° φ dérivable en 0, $\varphi(0) = 0$, et argth dérivable en 0. Le théorème de dérivation composée donne ψ dérivable en 0. (et $\psi(0) = 0$).

3° On prend $x \neq 0$, et on pose $\forall n, v_n = \frac{2^n}{x} \psi \left(\frac{x}{2^n} \right)$.

a) On a $\lim_n \frac{x}{2^n} = 0$ et ψ étant dérivable en 0, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(t)}{t} = \psi'(0)$. Ainsi la suite $(v_n)_n$ converge de limite $\psi'(0)$.

b) Pour n quelconque, $v_n = \frac{\psi \left(2 \frac{x}{2^{n+1}} \right)}{2 \frac{x}{2^{n+1}}} = \frac{\psi \left(\frac{x}{2^{n+1}} \right)}{\frac{x}{2^{n+1}}} = v_{n+1}$ et donc la suite $(v_n)_n$ est constante.

Cette constante est $v_0 = \frac{\psi(x)}{x}$ et la suite converge vers $\psi'(0)$.

Ainsi $\psi(x) = \psi'(0)x$ pour x non nul. Ceci restant valable pour $x = 0$.

4° Les solutions de (P) sont donc, outre les constantes -1 et 1 , les fonctions φ telles que $\operatorname{argth} \circ \varphi$ est une fonction linéaire $[x \mapsto cx]$ donc les fonctions $[x \mapsto \operatorname{th} cx]$ où $c \in \mathbb{R}$.

DEVOIR D'ALGÈBRE

Partie A

n est un entier naturel non nul et dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $A = (X + 1)^{2n} - 1$.

1° On a $A = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k X^k - 1 = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k X^k = X B$, par la formule du binôme de Newton, avec $B = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} C_{2n}^{k+1} X^k$.

Le degré de B est $(2n - 1)$, son coefficient dominant est $C_{2n}^{2n} = 1$ et son terme constant est $b_0 = C_{2n}^1 = 2n$.

2° a) z est racine de A si et seulement si $(z + 1)^{2n} = 1$. Les racine $2n$ -ièmes de l'unité étant connues, les racines de A sont donc $z_0 = 0$ et les $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)$ où $1 \leq k \leq (2n - 1)$.

On remarque de plus que $z_k = \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) \left(\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(\frac{-ik\pi}{2n}\right) \right) = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)$.

b) La somme des racines de A est $\sum_{k=0}^{2n-1} z_k = -C_{2n}^1 = -2n$ et le produit des racines de B et $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = (-1)^{2n-1} b_0 = -2n$.

Partie B

On choisit un \mathbb{C} -espace vectoriel E non réduit au vecteur nul.

Soit l'équation $(e) : (\varphi + id_E)^{2n} - id_E = \theta_E$ d'inconnue $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1° Une homothétie vectorielle de E est une $h = z.id_E$ où $z \in \mathbb{C}$. On obtient $(h + id_E)^{2n} - id_E = A(z).id_E$ et donc h est solution de (e) si et seulement si z est racine de A .

2° a) La formule du binôme de Newton donne $2^{2n} = (1 + 1)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} C_{2n}^j$ et $0 = (1 - 1)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j C_{2n}^j$. Alors avec

$$s_1 = \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k} \text{ et } s_2 = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1} \text{ on tire } \begin{cases} s_1 + s_2 = 2^{2n} \\ s_1 - s_2 = 0 \end{cases} \text{ donc } s_1 = s_2 = 2^{2n-1}.$$

b) Soit σ une symétrie vectorielle de E . Pour tout k entier, on a $\sigma^{2k} = id_E$ et $\sigma^{2k+1} = \sigma$.

Donc $(\sigma + id_E)^{2n} - id_E = (s_1 - 1).id_E + s_2.\sigma = (2^{2n-1} - 1).id_E - 2^{2n-1}.\sigma$.

c) Dans le cas où σ est solution de (e) , on a alors $\sigma = \frac{1 - 2^{2n-1}}{2^{2n-1}}.id_E$ qui n'est pas une symétrie.

(e) n'admet donc aucune symétrie vectorielle pour solution.

Partie C

On note $G = \{M_{a,b} / (a, b) \in \mathbb{C}^2\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ avec $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ pour a et b dans \mathbb{C} .

1° a) En posant $J = M_{0,1}$, on a immédiatement $G = \text{Vect}(I_3, J)$ et donc G sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) G immédiatement de dimension 2 puisque (I_3, J) en forme une base, les deux matrices étant non colinéaires.

c) De $J^2 = 2.I_3 + J \in G$ on tire que G est stable par produit matriciel, donc sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Soit l'équation $(f) : (M + I_3)^{2n} - I_3 = O_3$ d'inconnue $M \in G$.

On note E le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On choisit M dans G non colinéaire à I_3 et u l'endomorphisme de E de matrice M dans la base \mathcal{B} .

2° Soit $E_1 = \text{Ker}(u - (a + 2b).id_E)$. $M - (a + 2b).I_3 = \begin{pmatrix} -2b & b & \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix}$ est de rang 2 ($b \neq 0$) donc E_1 est de dimension 1, de base (e'_1) avec $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$.

3° Soit $E_2 = \text{Ker}(u - (a - b).id_E)$. $M - (a - b).I_3 = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ est de rang 1 ($b \neq 0$) donc E_2 est de dimension 2, de base (e'_2, e'_3) avec $e'_2 = e_1 - e_2$ et $e'_3 = e_2 - e_3$.

4° a) Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. Les valeurs propres $(a + 2b)$ et $(a - b)$ de u sont distinctes ($b \neq 0$), donc \mathcal{B}' est une base de E .

b) E_1 et E_2 sont en somme directe et la somme de leur dimension est 3. Donc ils sont deux sous-espaces supplémentaires de E .

c) De plus $D = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} a + 2b & 0 & 0 \\ 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & a - b \end{pmatrix}$ puisque les vecteurs de \mathcal{B}' sont des vecteurs propres de u .

5° On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

a) On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) De $\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \\ e'_3 = e_2 - e_3 \end{cases}$ on tire $\begin{cases} e_1 = 1/3(e'_1 + e'_2 + e'_3) \\ e_2 = 1/3(2.e'_1 - e'_2 - e'_3) \\ e_3 = 1/3(e'_1 + e'_2 - 2.e'_3) \end{cases}$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

6° a) On a, par la formule du changement de base, $D = P^{-1} M P$. Grâce à $P^{-1} P = I_3$, on tire

$$(D + I_3)^{2n} - I_3 = (P^{-1} M P + P^{-1} P)^{2n} - P^{-1} P = P^{-1} [(M + I_3)^{2n} - I_3] P$$

Donc M est solution de (f) si et seulement si D est solution de (f) .

b) Δ une matrice diagonale. On a $\Delta = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, x, y et z dans \mathbb{C} et donc $(\Delta + I_3)^{2n} - I_3 = \begin{pmatrix} A(x) & 0 & 0 \\ 0 & A(y) & 0 \\ 0 & 0 & A(z) \end{pmatrix}$.

Ainsi Δ est solution de (f) si et seulement si x, y et z sont racines de A .

c) En résumé, les matrices $M_{a,b}$ solutions avec $b = 0$ sont les $M_{z_k,0}$ où $0 \leq k \leq 2n - 1$. Les matrices $M_{a,b}$ solutions avec $b \neq 0$ sont celles obtenues avec $\begin{cases} a + 2b = z_p \\ a - b = z_q \end{cases}$ c'est-à-dire avec $\begin{cases} a = \frac{z_p + 2z_q}{3} \\ b = \frac{z_p - z_q}{3} \end{cases}$ avec p et q entre 0 et $(2n - 1)$.

F I N
