

introduction

F est l'ensemble des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définies et continues sur $]0, +\infty[$, telles que $[t \mapsto e^{-t}(f(t))^2]$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$.

Soient $\varphi_p : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^p e^{-t} \end{cases}$ et $L_p : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \varphi_p^{(p)}(t) \end{cases}$.

Partie A

a) Pour $t > 0$, on a $0 \leq e^{-t} \sin^2 t \leq e^{-t}$. Or la fonction $\frac{1}{\exp}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'intégrale 1) et donc \sin appartient à F .

b) Pour $t > 0$, $e^{-t}(e^t)^2 = e^t$. Or la fonction \exp n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$, puisque $\int_0^n e^t dt = e^n - 1$ de limite $+\infty$ pour $n \rightarrow +\infty$, donc \exp n'appartient pas à F .

c) On a $e^{-t} \ln^2 t \sim \ln^2 t$. Or $\sqrt{t} \ln t = 16 (t^{1/4} \ln t^{1/4})^2 \rightarrow_0 0$ dont on déduit $|\ln^2 t| = o_0(1/\sqrt{t})$ et donc \ln^2 intégrable sur $]0, 1[$. (d'intégrale 2).

De plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t} \ln^2 t = 0$ donc $e^{-t} \ln^2 t = o_{+\infty}(t^{-2})$ et la comparaison aux intégrales de Riemann donne $[t \mapsto e^{-t} \ln^2 t]$ intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'intégrale $\pi^2/6 + \gamma^2$).

Ainsi, \ln appartient à F .

d) $[t \mapsto e^{-t} \sqrt{t}^2]$ est définie et continue sur $[0, 1]$. De $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 e^{-t} = 0$ on tire $0 \leq e^{-t} \sqrt{t}^2 = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Le critère de Riemann donne alors $[t \mapsto e^{-t} \sqrt{t}^2]$ intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi $[x \mapsto \sqrt{x}]$ appartient à F .

Partie B

1° Soient f et g dans F .

a) Les fonctions $[t \mapsto \sqrt{e^{-t}} f(t)]$ et $[t \mapsto \sqrt{e^{-t}} g(t)]$ sont continues sur $]0, +\infty[$, donc sur $[u, v]$ avec $0 < u \leq v$. Le théorème de Schwarz donne alors

$$\left(\int_u^v \sqrt{e^{-t}} f(t) \sqrt{e^{-t}} g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_u^v (\sqrt{e^{-t}} f(t))^2 dt \right) \left(\int_u^v (\sqrt{e^{-t}} g(t))^2 dt \right)$$

$$\left(\int_u^v e^{-t} f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_u^v e^{-t} (f(t))^2 dt \right) \left(\int_u^v e^{-t} (g(t))^2 dt \right)$$

puis pour les mêmes raisons, puisque $|f| \in F$ et $|g| \in F$,

$$\left(\int_u^v e^{-t} |f(t) g(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_u^v e^{-t} (f(t))^2 dt \right) \left(\int_u^v e^{-t} (g(t))^2 dt \right)$$

b) Pour $h \in F$ on a $\lim_{d \rightarrow +\infty} \int_0^d e^{-t} (h(t))^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} (h(t))^2 dt$ donc $\lim_{d \rightarrow +\infty} \int_d^{+\infty} e^{-t} (h(t))^2 dt = 0$.

Ici alors $\lim_{d \rightarrow +\infty} \left(\int_d^{+\infty} e^{-t} (f(t))^2 dt \right) \left(\int_d^{+\infty} e^{-t} (g(t))^2 dt \right) = 0$ d'où on tire $\lim_{d \rightarrow +\infty} \int_d^{+\infty} e^{-t} |f(t)g(t)| dt = 0$.

Alors pour $\varepsilon > 0$ on a $c \geq 0$ tel que $\left| \int_d^{+\infty} e^{-t} |f(t)g(t)| dt \right| < \varepsilon$ pour $d \geq c$.

Alors $\left| \int_u^v e^{-t} f(t)g(t) dt \right| \leq \int_u^v e^{-t} |f(t)g(t)| dt < \int_c^{+\infty} e^{-t} |f(t)g(t)| dt < \varepsilon$ pour $c < u < v$.

c) Ce dernier résultat donne donc que l'ensemble des intégrales de $[t \mapsto e^{-t} f(t)g(t)]$ sur les segments inclus dans $]0, +\infty[$ est majoré.

$[t \mapsto e^{-t} f(t)g(t)]$ est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

2° a) La fonction nulle est bien sûr dans F .

Pour f dans F , $[t \mapsto e^{-t} (k f(t))^2 = k^2 e^{-t} (f(t))^2]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout k , et donc $k.f \in F$.

Pour f et g dans F , $[t \mapsto e^{-t} (f(t) + g(t))^2]$ est la fonction $[t \mapsto e^{-t} (f(t))^2 + 2e^{-t} f(t)g(t) + e^{-t} (g(t))^2]$ donc intégrable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions intégrables, et donc $(f + g) \in F$.

Ainsi F est un \mathbb{R} -espace vectoriel, sous-espace de $C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

b) E_n a une structure d'espace vectoriel. Or $E_n \subset F$ puisque pour tout p , $[t \mapsto t^p e^{-t}]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Alors E_n est un sous-espace de F .

3° a) $\Psi : \left[(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)g(t) dt \right]$ est une application de F^2 dans \mathbb{R} d'après la question **1 c**).

Elle est immédiatement bilinéaire et symétrique.

Pour $f \in F$, $\Psi(f, f) \geq 0$ bien sûr, et $\Psi(f, f) = 0$ donne, puisque la fonction $[t \mapsto e^{-t} (f(t))^2]$ est positive ou nulle, $\int_S e^{-t} (f(t))^2 dt = 0$ pour tout segment S de $]0, +\infty[$. La continuité de f sur S achève de caractériser la nullité de f sur tout S donc sur $]0, +\infty[$.

Ψ est donc un produit scalaire sur F .

b) E_n étant un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni de Ψ il induit une structure d'espace vectoriel euclidien.

Partie C

On note désormais E_n l'espace euclidien muni de $(f|g) = \Psi(f, g)$ pour f et g dans E_n .

1° Soit $0 \leq p \leq n$. $\forall t$, $\varphi_p^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^p C_p^k A_p^k t^{p-k} (-1)^{p-k} e^{-t}$ par la formule de Leibniz donc $L_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k A_p^k X^{p-k}$.

Ainsi $L_p \in E_n$ puisque $d^\circ L_p = p$.

$L_0 = 1, L_1 = 1 - X$ et $L_2 = 2 - 4X + X^2$.

2° Remarquons d'abord, pour $p \leq n$ et $k < p$, que $\varphi_p^{(k)}$ s'écrit comme le quotient d'un polynôme de degré p , de valuation $p - k$, par la fonction exp. Donc $\varphi_p^{(k)}(0) = 0$.

Par ailleurs, pour T un polynôme quelconque, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} T(t) = 0$.

Pour $0 \leq q < p \leq n$, $(L_p|L_q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} L_p(t) L_q(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi_p^{(p)}(t) L_q(t) dt$. En intégrant par parties, on a

$$\int_0^{+\infty} \varphi_p^{(p)}(t) L_q(t) dt = \left[\varphi_p^{(p-1)}(t) L_q(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi_p^{(p-1)}(t) L_q'(t) dt = - \int_0^{+\infty} \varphi_p^{(p-1)}(t) L_q'(t) dt$$

En recommençant q fois, on aura $\int_0^{+\infty} \varphi_p^{(p)}(t) L_q(t) dt = (-1)^{q+1} \int_0^{+\infty} \varphi_p^{(p-q-1)}(t) L_q^{(q+1)}(t) dt = 0$ puisque L_q est de degré q .

Pour $0 \leq p \leq n$, $(L_p|L_p) = (-1)^p \int_0^{+\infty} \varphi_p(t) L_p^{(p)}(t) dt = p! \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$ par le même procédé itéré cette fois p fois. Or on

établit par récurrence : $\int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = p!$ et on déduit $(L_p|L_p) = (p!)^2$.

3° Il en résulte immédiatement que $\left(\frac{1}{k!}L_k\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille orthonormale de E_n , formée de $(n+1)$ vecteurs : c'est une base orthonormale.

Partie D

On considère, pour $0 \leq p \leq n$, $P_p = L_{p+2} + (X - 2p - 3)L_{p+1}$.

1° Soit $p \in \{0, \dots, n\}$. On a $d^\circ P_p \leq p+2$.

Le coefficient de X^{p+2} est $(-1)^{p+2} + (-1)^{p+1} = 0$.

Celui de X^{p+1} est $(-1)^{p+1}C_{p+2}^1 A_{p+2}^1 + (-1)^p C_{p+1}^1 A_{p+1}^1 - (2p+3)(-1)^{p+1} = 0$

et enfin celui de X^p est $(-1)^p C_{p+2}^2 A_{p+2}^2 + (-1)^{p-1} C_{p+1}^2 A_{p+1}^2 - (2p+3)(-1)^p C_{p+1}^1 A_{p+1}^1 \neq 0$.

Donc $d^\circ P_p = p$ et $P_p \in E_n$.

2° $(P_p|L_k) = (L_{p+2}|L_k) + (X L_{p+1}|L_k) - (2p+3)(L_{p+1}|L_k) = (X L_{p+1}|L_k)$ pour $0 \leq k \leq p-1$, puisque la famille est orthonormale.

Or, avec les mêmes arguments qu'en **C 2**, puisque $d^\circ X L_k < (p+1)$, on a $(X L_{p+1}|L_k) = \int_0^{+\infty} \varphi_{p+1}^{(p+1)}(t) t L_k(t) dt = 0$.

D'où $(P_p|L_k) = 0$ pour $0 \leq k \leq p-1$.

3° Nous avons donc $d^\circ P_p = p$ et P_p orthogonal aux vecteurs de (L_0, \dots, L_{p-1}) . Ayant (L_0, \dots, L_p) base orthonormale de E_p , P_p est colinéaire à L_p : $P_p = k.L_p$.

On calcule $(P_p|L_p) = k.\|L_p\|^2 = k.(p!)^2$ d'une part et d'autre part on calcule $(P_p|L_p) = (X L_{p+1}|L_p) = -((p+1)!)^2$ comme au **C 2**.

Ainsi $P_p = -(p+1)^2.L_p$ et donc

$$\forall t \geq 0 \quad L_{p+2}(t) + (t - 2p - 3)L_{p+1}(t) + (p+1)^2 L_p(t) = 0$$

propriété caractéristique des polynômes de Laguerre.