

1 EXERCICE

CORRIGÉ

Soit la fonction f de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} qui à tout nombre irrationnel associe 0 et à tout nombre rationnel qui s'écrit $\frac{p}{q}$ sous forme de fraction irréductible associe $\frac{1}{q}$.

1° Pour $n \geq 2$ quelconque dans \mathbb{N} , on pose $u_n = \frac{n + \sqrt{2}}{2n}$.

a) $(u_n)_n$ converge de limite $\frac{1}{2}$.

b) Pour $n \geq 2$, $f(u_n) = 0$ puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel et donc u_n irrationnel.

c) $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ donc f n'est pas continue en $\frac{1}{2}$ par la caractérisation séquentielle de la continuité.

2° Avec $\epsilon > 0$ on pose $E_\epsilon = \{x \in]0, 1[\mid f(x) > \epsilon\}$.

a) $E_1 = \emptyset$, $E_{1/2} = \emptyset$ et $E_{1/8} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\}$.

b) Soit $\epsilon > 0$. $x \in E_\epsilon$ impose x rationnel et $0 < x < 1$. On a donc $x = \frac{p}{q}$ (irréductible et $p < q$). $x \in E_\epsilon$ impose alors $q < \frac{1}{\epsilon}$, puis $(p, q) \in (]0, \frac{1}{\epsilon}[\cap \mathbb{N})^2$. Ainsi E_ϵ fini.

3° On choisit $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

a) Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble des distances de a aux éléments de E_ϵ est fini et admet donc un plus petit élément $\eta > 0$. Alors $E_\epsilon \cap]a - \eta, a + \eta[= \emptyset$ et donc f majorée par ϵ sur $]a - \eta, a + \eta[$.

b) La propriété précédente établie pour tout $\epsilon > 0$ traduit f est continue en a .

2 PROBLÈME

CORRIGÉ

E désigne l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa structure canonique. On note \mathcal{F} le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ; son vecteur nul, $[x \mapsto 0]$, est notée O . On note

$$p : [x \mapsto \exp(x) = e^x] \quad q : [x \mapsto \exp(2x) = e^{2x}] \quad r : [x \mapsto \exp(x^2) = e^{x^2}]$$

et enfin $\mathcal{E} = \text{Vect}(p, q, r)$ le sous-espace vectoriel de \mathcal{F} engendré par p, q et r (en fait par la partie $\{p, q, r\}$).

Partie A

1° cas du vecteur nul : O s'écrit $O = 0.p + 0.q + 0.r$ et aussi $O = a.p + b.q + c.r$ avec a, b et c réels.

a) première méthode.

$$\begin{cases} (a.p + b.q + c.r)(0) = a + b + c \\ (a.p + b.q + c.r)(1) = ae + be^2 + ce \\ (a.p + b.q + c.r)(2) = ae^2 + be^4 + ce^4 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + eb + c = 0 \\ a + e^2b + e^2c = 0 \end{cases} \quad \text{et donc } a = b = c = 0.$$

b) deuxième méthode.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} (a.p + b.q + c.r)(x) = c \text{ donc } c = 0 \text{ puis } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} (a.p + b.q + c.r)(x) = b \text{ donc } b = 0 \text{ et enfin } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} (a.p + b.q + c.r)(x) = a \text{ donc } a = b = c = 0.$$

2° cas d'un vecteur quelconque : soit $f \in \mathcal{E}$ et $f = a.p + b.q + c.r$, $f = x.p + y.q + z.r$.

Alors $(a - x).p + (b - y).q + (c - z).r = O$ et d'après la question précédente, $(a - x) = (b - y) = (c - z) = 0$ et donc la décomposition de f est unique comme combinaison linéaire de p, q et r .

3° On note $\psi : \begin{cases} \mathcal{E} & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & (f(0), f'(0), f(1)) \end{cases}$

a) On vérifie que ψ est une application linéaire.

De plus, pour $f = a.p + b.q + c.r$, on a $\psi(f) = (a + b + c, a + 2b, ae + be^2 + ce)$.

b) Soit $(x, y, z) \in E$.

Le système $\begin{cases} a + b + c = x \\ a + 2b = y \\ ae + be^2 + ce = z \end{cases}$ admet une solution unique $\begin{cases} a = \frac{1}{e(e-1)} (2ex - 2z - ey + e^2y) \\ b = \frac{1}{e(e-1)} (-ex + z) \\ c = \frac{1}{e(e-1)} (e^2x - 2ex + z + ey - e^2y) \end{cases}$ ce qui justifie que

tout élément de E admet un antécédent et un seul dans \mathcal{E} par f . f est une bijection : un isomorphisme de \mathcal{E} sur E .

De plus $\psi^{-1} : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathcal{E} \\ (x, y, z) & \mapsto & \left(\frac{2}{e-1}x + y - \frac{2}{e(e-1)}z \right) . p + \left(-\frac{1}{e-1}x + \frac{1}{e(e-1)}z \right) . q + \left(\frac{e-2}{e-1}x - y + \frac{1}{e(e-1)}z \right) . r \end{cases}$

Partie B

On pose $\varphi : \begin{cases} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ f & \mapsto & A.p + B.q + C.r \end{cases}$ avec $\begin{cases} A = \frac{2}{e-1} f(0) + f'(0) + \frac{2}{e(e-1)} f(1) \\ B = \frac{-1}{e-1} f(0) - \frac{1}{e(e-1)} f(1) \\ C = \frac{e-2}{e-1} f(0) - f'(0) - \frac{1}{e(e-1)} f(1) \end{cases}$

1° a) $\theta : [(a, b, c) \mapsto (a, b, -c)]$ sur E . Alors pour $f \in \mathcal{E}$, $\psi^{-1} \circ \theta \circ \psi(f) = \psi^{-1}((f(0), f'(0), -f(1)))$ et avec la formule trouvée dans la partie précédente on a bien $\psi^{-1} \circ \theta \circ \psi(f) = \varphi(f)$.

b) Ainsi $\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi$. Or $\theta \circ \theta = id_E$ donc θ bijective et donc φ est un automorphisme de \mathcal{E} .

2° $\varphi(p) = \frac{e+3}{e-1}p - \frac{2}{e-1}q - \frac{2}{e-1}r$ $\varphi(q) = \frac{4e}{e-1}p - \frac{e+1}{e-1}q - \frac{2e}{e-1}r$ et $\varphi(r) = \frac{4}{e-1}p - \frac{2}{e-1}q - \frac{e-3}{e-1}r$.

3° $\varphi \circ \varphi = \psi^{-1} \circ (\theta \circ \theta) \circ \psi = id_{\mathcal{E}}$ et donc φ est une symétrie.

Partie C

On se propose de caractériser $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} / \varphi(f) = f\}$ le support de la symétrie φ et $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} / \varphi(f) = -f\}$ sa direction.

1° On admettra que \mathcal{D} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} .

\mathcal{P} est non vide, il contient O .

Pour f et g dans \mathcal{P} , on a $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g) = f + g$ et donc $(f + g) \in \mathcal{P}$.

Pour f dans \mathcal{P} et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\lambda.f) = \lambda.\varphi(f) = \lambda.f$ et donc $\lambda.f \in \mathcal{P}$.

Ainsi \mathcal{P} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} .

2° $f \in \mathcal{E}. f \in \mathcal{P} \iff (\theta \circ \psi)(f) = \psi(f)$ donc $f \in \mathcal{P} \iff f(1) = 0$.

3° Soit $f = a.p + b.q + c.r$. $f(1) = e(a + be + c)$ donc $f \in \mathcal{P} \iff c = -a - be$.

Donc $\mathcal{P} = \{a.(p - r) + b.(q - e.r) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(p - r, q - e.r)$.

4° $f \in \mathcal{E}. f \in \mathcal{D} \iff (\theta \circ \psi)(f) = -\psi(f)$ donc $f \in \mathcal{P} \iff f(0) = f'(0) = 0$.

5° Soit $f = a.p + b.q + c.r$. $f(0) = (a + b + c)$ et $f'(0) = a + 2b$ donc $f \in \mathcal{P} \iff c = b$ et $a = -2b$.

Donc $\mathcal{P} = \{a.(-2.p + q + r) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(-2.p + q + r)$.

6° $f \in \mathcal{E}. f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ signifie $\varphi(f) = f = -f$ donc $f = 0$. Ainsi $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

On pose $e_1 = p - r$, $e_2 = q - e.r$ et $e_3 = -2.p + q + r$.

On a alors $p = \frac{1}{e-1} \cdot ((1+e).e_1 - e_2 + e_3)$, $q = \frac{1}{e-1} \cdot (2e.e_1 - e_2 + e.e_3)$ et $r = \frac{1}{e-1} \cdot (2.e_1 - e_2 + e_3)$.

Les combinaisons linéaires de p , q et r sont des combinaisons linéaires de e_1 , e_2 et e_3 . On a donc $\mathcal{E} = \mathcal{P} + \mathcal{D}$.

On a donc \mathcal{P} et \mathcal{D} supplémentaires.

F I N
