

I.S.E.P.

Cycle préparatoire

Math.Sup. 2

Devoir 9

Mathématiques

11 mai 1998

durée 3 heures 30

sans calculatrice

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

EXERCICE 1

(6 points)

On cherche les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$(e) : y'' - 4y = 4 - 8|x|$$

1° Donner l'ensemble des solutions de (e) sur $]0, +\infty[$

2° Donner l'ensemble des solutions de (e) sur $] - \infty, 0[$

3° Montrer que la fonction φ définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} \varphi(x) = \alpha \operatorname{ch} 2x + \beta \operatorname{sh} 2x + 2x - 1 & \text{si } x > 0 \\ \varphi(x) = \alpha \operatorname{ch} 2x + (\beta + 2) \operatorname{sh} 2x - 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(0) = \alpha - 1 \end{cases}$$

(où α et β sont deux constantes réelles) est solution de (e) sur \mathbb{R} .

4° Réciproquement, pour une solution f de (e) sur \mathbb{R} , montrer qu'il existe α et β réels tels que

$$\begin{cases} f(x) = \alpha \operatorname{ch} 2x + \beta \operatorname{sh} 2x + 2x - 1 & \text{pour } x > 0 \\ f(x) = \alpha \operatorname{ch} 2x + (\beta + 2) \operatorname{sh} 2x - 2x - 1 & \text{pour } x < 0 \\ f(0) = \alpha - 1 \end{cases}$$

5° Soit g une solution de (e) sur \mathbb{R} satisfaisant aux conditions initiales $g(0) = g'(0) = 0$.

a) Expliciter $g(x)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$.

b) Etudier la parité de g .

c) Représenter g dans un repère orthonormal du plan.

PROBLÈME

(14 points)

Une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs complexes vérifie la condition $\mathcal{C}(\alpha, A)$ si :

f est continue sur $[0, +\infty[$ et pour tout $t \geq 0$, on a $|f(t)| \leq A.e^{\alpha t}$.

1° Pour f vérifiant la condition $\mathcal{C}(\alpha, A)$, donner les valeurs de p pour lesquelles on est sûr que la fonction $[t \mapsto e^{-pt}.f(t)]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

REMARQUE : Pour f vérifiant une condition $\mathcal{C}(\alpha, A)$ et p tel que $[t \mapsto e^{-pt}.f(t)]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, on note $F(p)$

l'intégrale $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.f(t) dt$

REMARQUE : On note \mathcal{L} la correspondance $f \mapsto F$ ainsi établie.

2° a) Dans quel sens peut-on dire que \mathcal{L} est linéaire ?

b) Caractériser $\mathcal{L}(f)$, en donnant son ensemble de définition, dans les cas suivants :

(i) $f : [t \mapsto 1]$

(ii) $f : [t \mapsto \cos \omega.t]$ où $\omega \in \mathbb{R}$

(iii) $f : [t \mapsto e^{-\lambda.t}]$ où $\lambda \in \mathbb{C}$

3° On suppose f de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ dont la dérivée f' vérifie la condition $\mathcal{C}(\alpha, A)$.

a) Trouver B tel que f vérifie la condition $\mathcal{C}(\alpha, B)$.

b) Etablir, en précisant son domaine de validité, la relation $\mathcal{L}(f')(p) = p.\mathcal{L}(f)(p) - f(0)$.

4° Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $f_n(t) = e^{-\lambda.t} \frac{t^n}{n!}$ pour $t \geq 0$.

a) Etablir, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre f'_{n+1} , f_{n+1} et f_n .

b) En déduire l'expression de $\mathcal{L}(f_n)(p)$ en précisant le domaine de validité.

5° On désigne par f la solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (e) : $y'' - 7y' + 6y = e^{-x}$ satisfaisant la condition initiale $(0, 1, 1)$ (i.e. $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$).

a) Que vaut $\mathcal{L}(f)$?

b) Déterminer alors f en décomposant $\mathcal{L}(f)$ en éléments simples.

c) Retrouver f par une résolution directe de l'équation (e)

6° On désigne par (φ, ψ) la solution sur $[0, +\infty[$ du système différentiel $\begin{cases} y' = -y + 2z \\ z' = -y - 4z \end{cases}$ qui satisfait à la condition initiale $(0, (1, 1))$ (i.e. $\varphi(0) = \psi(0) = 1$). On pose $\Phi = \mathcal{L}(\varphi)$ et $\Psi = \mathcal{L}(\psi)$.

a) Montrer que (Φ, Ψ) est solution d'un système linéaire.

b) Calculer Φ et Ψ .

c) En déduire les expressions de φ et ψ .