

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

DEVOIR D'ANALYSE

(noté sur 10 points)

durée conseillée 1 heure 50 ; en aucun cas n'y passer plus de 2 heures 10

PROBLÈME

fonction définie par une intégrale

(10 points)

On pose $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ et $D' = D \setminus \{0\}$. On définit f sur D par :

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= \frac{1}{\ln x} \text{ si } x \in D' \end{cases}$$

1° Montrer que f est définie et continue sur D . Justifier l'existence de primitives de f sur D .

2° a) Étudier la dérivabilité de f sur D' , et calculer $f'(x)$ sur cet ensemble.

b) Étudier la dérivabilité de f en 0.

c) Dresser le tableau complet des variations de f .

On définit φ par : $\varphi(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$.

3° a) Montrer que φ est définie sur D . Donner le signe de φ .

b) Montrer que φ est continue sur D .

4° a) Montrer que φ est dérivable sur D' , et montrer que $\varphi'(x)$ peut s'écrire $\frac{x-1}{\ln x}$ sur cet ensemble.

b) En déduire les variations de φ .

c) Étudier la dérivabilité de φ en 0. φ est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur D ?

On définit ψ par : $\psi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$.

5° a) Trouver la fonction g telle que $[\varphi(x) - \psi(x)] = \int_{x-1}^{x^2-1} g(u) du$.

b) Montrer que g est prolongeable en 0 par continuité.

c) Montrer : $\lim_{x \rightarrow 1} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$. En déduire l'existence et la valeur d'une limite de φ en 1.

d) φ' a-t-elle une limite en 1 ? Qu'en déduit-on pour la courbe représentative de φ ?

6° Étudier la branche infinie de la courbe représentative de φ . Représenter graphiquement φ .

DEVOIR D'ALGÈBRE

(noté sur 10 points)

durée conseillée 2 heures ; en aucun cas n'y passer plus de 2 heures 15

EXERCICE 2

matrices dans l'espace euclidien

(4 points)

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (i.e. l'espace des matrices réelles à 3 lignes et 1 colonne) est muni de sa structure euclidienne usuelle et de son orientation usuelle (la base canonique est une base orthonormale directe).

Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note A_1, A_2 et A_3 ses colonnes et on écrit $A = (A_1 | A_2 | A_3)$. On définit alors $\tilde{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $\tilde{A} = (A_2 \wedge A_3 | A_3 \wedge A_1 | A_1 \wedge A_2)$.

1° a) Montrer que A est inversible si et seulement si \tilde{A} est inversible.

b) Dans ce cas exprimer A^{-1} à l'aide de \tilde{A} et de $\det(A)$.

2° On suppose A non inversible. Déterminer, selon le rang de A , le rang de \tilde{A} .

EXERCICE 3

trouver la bonne base

(4 points)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et φ un endomorphisme non nul de E tel que $\varphi^3 + \varphi^2 + \varphi = O$ (φ^2 note bien sûr $\varphi \circ \varphi \dots$). On note $F = \text{Ker } \varphi$, $\psi = \varphi^2 + \varphi + id_E$ et $G = \text{Ker } \psi$.

1° a) Montrer $F \cap G = \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$.

b) Soit $x \neq 0_E$ dans G . Montrer que $\varphi(x)$ est dans G et que la famille $(x, \varphi(x))$ est libre.

2° a) Etablir l'existence d'une base \mathcal{B} de E et de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la matrice de φ dans \mathcal{B} soit $\begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

b) Observer la matrice dans \mathcal{B} de $(\varphi^3 + \varphi^2 + \varphi)$ et déduire la valeur de c .

3° Montrer que $E = F \oplus G$. Donner les dimensions de F et G .

4° Etablir l'existence d'une base \mathcal{B}' de E dans laquelle la matrice de φ est : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4

polynômes réels scindés ?

(4 points)

Pour $A = \sum_{j=0}^n a_j X^j$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on note $\overline{A} = \sum_{j=0}^n \overline{a_j} X^j \in \mathbb{C}[X]$ son polynôme conjugué.

1° Montrer : $\forall (A, B) \in (\mathbb{C}[X])^2, \overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$.

2° Déterminer \overline{A} dans le cas où A se factorise en $A = \lambda \prod_{k=1}^n (X - z_k)$, avec $(\lambda, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

3° Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ dont les racines ont toutes une partie imaginaire négative. On écrit $P = Q + iR$ avec Q et R des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, i.e. à coefficients réels.

a) Exprimer Q et R en fonction de P et \overline{P} .

b) Comparer, selon $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)|$ et $|\overline{P}(z)|$. En déduire que les polynômes Q et R sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$.