

# I.S.E.P.

Cycle préparatoire

Math.Sup. 2

Devoir 7

## Mathématiques

9 mars 1998

durée 3 heures 30

sans calculatrice

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

### EXERCICE 1

### matrices $2 \times 2$

(10 points)

Soit le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Dans  $E$  on pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$   $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   $I = A + D$ .

1° On pose  $F = \{M \in E / M \times A = A \times M\}$ .

a ) Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

b ) Justifier que  $F = \text{Vect}(\{A, D\})$ .

2° On appelle centre de  $E$  l'ensemble  $\Omega = \{M \in E / \forall X \in E \ M \times X = X \times M\}$ .

a ) Montrer que  $\Omega$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

b )  $A, B, C$  et  $D$  sont-elles dans  $\Omega$  ?

c ) Justifier que  $\Omega$  est isomorphe à  $\mathbb{R}$ .

3° Pour  $U \in E$ , on pose  $\Phi_U : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ X & \mapsto U \times X - X \times U \end{cases}$

a ) Montrer que  $\Phi_U$  est un endomorphisme de  $E$ .

b ) Quel est  $\Phi_U$  pour  $U \in \Omega$  ?

c ) Pour  $U$  quelconque, montrer  $\Omega \subset \text{Ker } \Phi_U$ .

d ) Dans le cas  $U = A + B - C$ , caractériser  $\text{Ker } \Phi_U$  et  $\text{Im } \Phi_U$ . Sont-ils supplémentaires ?

e ) Peut-on trouver  $U$  tel que  $\Phi_U$  soit un automorphisme de  $E$  ?

## EXERCICE 2

## différence finie

( 10 points)

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$ .

**1°** On pose  $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 0\}$ .

**a )** Montrer que  $F$  et  $\mathbb{R}$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $E$ .

**b )** Pour  $\pi$  la projection de  $E$  sur  $F$  dans la direction  $\mathbb{R}$ , donner  $\pi(X^5 - X^3 + X - 1)$  et  $\pi((X^2 - 1)(X^3 - 2))$ .

**2°** On définit  $\Delta$  sur  $E$  par :  $\Delta(P) = P(X + 1) - P$ .

**a )** Donner  $\Delta(X^5 - X^3 + X - 1)$  et  $\Delta((X^2 - 1)(X^3 - 2))$ .

**b )** Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $E$ .

**c )** Donner le noyau de  $\Delta$ .

**d )** Dans le cas général, calculer le degré de  $\Delta(P)$  en fonction du degré de  $P$ .

**e )** En déduire que pour tout  $P$ , il existe  $m$  tel que  $\Delta^m(P) = 0$ . ( $\Delta^m$  est  $\Delta \circ \Delta \dots \circ \Delta$ ).

**f )** application : trouver  $P(10)$  sachant  $d^0 P = 4$ ,  $P(3) = -1$ ,  $P(4) = 2$ ,  $P(5) = 3$ ,  $P(6) = -2$  et  $P(7) = -1$ .

**3°** Dans  $E$ , on envisage, pour tout  $n > 0$ ,  $E_n = \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] / d^0 P \leq n\}$ .

**a )** Montrer que pour tout  $n > 0$ ,  $E_n$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**b )** Montrer que l'image de  $E_n$  par  $\Delta$  est  $E_{n-1}$ .

**c )** Pour  $Q \in E_{n-1}$  montrer qu'il existe  $P$  unique dans  $F \cap E_n$  tel que  $\Delta(P) = Q$ .

---

F I N

---