

Partie A

On note E le \mathbb{C} -espace vectoriel des suites de complexes. Soient des réels b, c, d des réels fixés. On note S_d l'ensemble des éléments v de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} + b v_{n+1} + c v_n = d$$

puis $S = S_0$.

1° S contient bien sûr la suite nulle, la somme de deux quelconques de ses éléments et le produit par un complexe quelconque d'un de ses éléments. C'est un sous-espace vectoriel de E .

En définissant par récurrence les suites de S , $(x_n)_n$ à partir de $x_0 = 1, x_1 = 0$ et $(y_n)_n$ par $y_0 = 0, y_1 = 1$, on obtient une famille (x, y) libre de S . Par récurrence, on obtient que u de S s'écrit $u = u_0.x + u_1.y$ et donc que (x, y) est génératrice de S .

On a donc (x, y) base de S et S de dimension 2.

2° Soit $(c) : r^2 + b r + c = 0$ l'équation caractéristique de S .

a)Cas : (c) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 .

Les suites géométriques de premier terme 1, $(f_n)_n$, de raison r_1 et $(g_n)_n$, de raison r_2 sont des éléments de S . De $f_0 = g_0$ et $f_1 \neq g_1$, on tire (f, g) libre donc base de S . Alors pour tout élément u de S on trouve α et β tels que $\forall n, u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.

b)Cas : (c) admet une racine double r_0 .

On pose $(h_n)_n$ la suite géométrique de premier terme 1 et de raison r_0 . Puis $(k_n)_n$ la suite de terme général $k_n = n r_0^n$. On vérifie par récurrence que h et k sont dans S , puis que la famille (h, k) est libre. C'est donc une base de S . Alors pour tout élément u de S on trouve α et β tels que $\forall n, u_n = (\alpha n + \beta) r_0^n$.

3° Poser $s_0 = 0, s_1 = 0, s_2 = d$ définit par récurrence sans ambiguïté un élément $(s_n)_n$ de S_d . Ainsi S_d n'est pas vide.

On montre facilement $v \in S_d \iff (v - s) \in S$. Donc S_d variété linéaire affine de E de direction S .

Partie B

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . & . \\ 0 & -1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 2 & -1 & . \\ 0 & . & . & . & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrice carrée d'ordre n , et on étudie les systèmes linéaires $A X = B$. On

identifiera les vecteurs de \mathbb{R}^n (l'élément (x_1, \dots, x_n) par exemple) et les matrices colonnes de n lignes (la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ par exemple).

1° Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^n . On pose conventionnellement $y_{n+1} = y_0 = 0$.

a) Le coefficient de la ligne i de AY pour $1 \leq i \leq n$ est $-y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1}$.

$$\begin{aligned} \text{b) Alors } {}^tYAY &= \sum_{i=1}^n y_i (-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}) \\ &= 2 \sum_{j=1}^n y_j^2 - 2 \sum_{j=0}^n y_j y_{j+1} \\ &= \sum_{k=0}^n (y_{k+1} - y_k)^2 \end{aligned}$$

c) Soit $\Psi [(X, Y) \mapsto {}^tYAX]$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} .

Ψ est bien sûr une application bilinéaire.

Puisque, pour X et Y quelconques, tYAX est un réel, on a Ψ est symétrique puisque $\Psi(X, Y) = {}^tYAX = {}^t({}^tYAX) = {}^tXAY = \Psi(Y, X)$.

Par ailleurs, ayant montré ${}^tYAY = \sum_{k=0}^n (y_{k+1} - y_k)^2$ pour tout Y , on a immédiatement $\Psi(Y, Y) \geq 0$ et $\Psi(Y, Y) = 0 \iff Y = 0$: Ψ est définie positive.

Ainsi Ψ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

On notera désormais $(X | Y)_A = \Psi(X, Y)$ et $\|X\|_A = \sqrt{\Psi(X, X)}$.

2° Soit λ dans \mathbb{C} .

a) λ est valeur propre de A (considérée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) si et seulement si il existe X non nul tel que $\lambda.X = AX$ i.e. $(\lambda.I_n - A)X = 0$.

$$\text{Or pour } X = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, (\lambda.I_n - A)X = \begin{pmatrix} u_2 + (\lambda - 2)u_1 + u_0 \\ \vdots \\ u_{n+1} + (\lambda - 2)u_n + u_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ en posant } u_0 = u_{n+1} = 0.$$

Ainsi λ est valeur propre de A si et seulement si il existe une suite finie $(u_p)_{0 \leq p \leq n}$ de complexes telle que

$$\begin{cases} u_0 = u_{n+1} = 0 & (1) \\ \exists j \in [1, n], u_j \neq 0 & (2) \\ \forall p \in [1, n], u_{p+1} + (\lambda - 2)u_p + u_{p-1} = 0 & (3) \end{cases}$$

b) On recherche les suites de complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (1), (2) et (3') avec (3') : $\forall p \in \mathbb{N}, u_{p+1} + (\lambda - 2)u_p + u_{p-1} = 0$. On note r_1 et r_2 les racines de $r^2 + (\lambda - 2)r + 1 = 0$.

(i) Cas $r_1 = r_2$; les solutions de (3') sont les suites $((\alpha.n + \beta)r_1^n)_n$. (1) impose alors $\alpha = \beta = 0$ ce qui contredit (2).

(ii) Cas $r_1 \neq r_2$; les solutions de (3') sont les suites $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_n$. (1) impose $\alpha + \beta = 0$ puis $r_1^{n+1} - r_2^{n+1} = 0$ donc $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$. Ainsi $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ est une racine $(n+1)$ ème de l'unité et il existe $p \in [1, n]$ tel que $\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = e^{i\frac{p2\pi}{n+1}}$. $r_1 r_2 = 1$ permet alors $r_1 = e^{i\frac{p\pi}{n+1}}$ et $r_2 = e^{-i\frac{p\pi}{n+1}}$.

(iii) λ valeur propre de A impose donc que $r^2 + (\lambda - 2)r + 1 = 0$ admette deux racines distinctes r_1 et r_2 avec $r_1 = e^{i\frac{p\pi}{n+1}}$ et $r_2 = e^{-i\frac{p\pi}{n+1}}$.

$r_1 + r_2 = 2 - \lambda$ donne alors $\lambda = 2 - 2 \cos \frac{p\pi}{n+1} = 4 \sin^2 \frac{p\pi}{2(n+1)}$. Cette valeur λ_p donnerait le vecteur propre $v_p =$

$$\begin{pmatrix} \sin \frac{p\pi}{n+1} \\ \sin \frac{2p\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{np\pi}{n+1} \end{pmatrix} \text{ qui réciproquement convient.}$$

3° Soit $\theta = \frac{2p\pi}{n+1}$.

$$\text{a) } 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Alors } \|v_p\|^2 &= \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k p \pi}{n+1} = \sum_{k=1}^n \sin^2 k \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (1 - \cos k\theta). \text{ De la question précédente, on tire } \sum_{k=1}^n \Re(e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta}) = \sum_{k=1}^n \cos k\theta = -1. \text{ Ainsi } \|v_p\| = \sqrt{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

c) \sin est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distinctes et donc la famille de vecteurs propres (v_1, \dots, v_n) est libre, donc une base de \mathbb{R}^n .

De plus, pour $p \neq q$, $(v_p | v_q) = \sum_{k=1}^n \sin \frac{kp\pi}{n+1} \sin \frac{kq\pi}{n+1} = \sum_{k=1}^n (\cos k \frac{(p+q)\pi}{n+1} - \cos k \frac{(p-q)\pi}{n+1}) = (-1) - (-1) = 0$. La famille (v_1, \dots, v_n) est orthogonale.

Ainsi, en posant, pour tout k , $e_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \cdot v_k$ la famille $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^n . En appelant P la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^n à \mathcal{C} , on a $P^{-1} A P = \Delta$, avec Δ matrice diagonale de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. P étant une matrice de passage entre deux bases orthonormales est orthogonale (donc $P^{-1} = {}^tP$).

Partie C

On décompose la matrice A sous la forme $A = D - C - {}^tC$ avec $D = 2 I_n$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le système $A X = B$ s'écrit $(D - {}^tC) X = C X + B$ ou $D X = (C + {}^tC) X + B$.

On construit deux suites de vecteurs de \mathbb{R}^n , de terme général X_k et Z_k , définies par

$$X_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall k, (D - {}^tC) X_{k+1} = C X_k + B \quad (4)$$

$$Z_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall k, D Z_{k+1} = (C + {}^tC) Z_k + B \quad (5)$$

On prend le cas particulier $n = 3$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_0 = Z_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et pour tout k on note $X_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}$ et $Z_k = \begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ z_2^{(k)} \\ z_3^{(k)} \end{pmatrix}$

1° Alors :

Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
4	3	7/2	3	13/4
4	5	4	9/2	4
4	3	7/2	3	13/4

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
4	3	13/4	25/8	49/16
4	9/2	17/4	33/8	65/16
4	13/4	25/8	49/16	97/32

2° On a $(D - {}^tC)$ inversible et $(D - {}^tC)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$, d'où découle $(D - {}^tC) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 1/2 & 1 + 1/2 + 1/4 \end{pmatrix}$.

On obtient alors par récurrence, pour $k \geq 2$, $X_k = \begin{pmatrix} 3 + \frac{1}{2^k} \\ 4 + \frac{1}{2^k} \\ 3 + \frac{1}{2} \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}$. Alors $X_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3° Une récurrence évidente amène à $z_1^{(k)} = z_3^{(k)}$ pour tout k . Puis de (5), avec $D^{-1} = \frac{1}{2} I_3$ on tire $Z_{k+2} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} Z_k +$

$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$: (6) et donc $z_1^{(k+2)} = \frac{1}{2} z_1^{(k)} + \frac{3}{2}$ pour tout k .

Alors pour tout k , $z_1^{(k+2)} - 3 = \frac{1}{2} (z_1^{(k)} - 3)$.

Les propriétés des suites géométriques donnent donc, pour tout entier m , $z_1^{(2m)} = 3 + \frac{1}{2^m} (z_1^{(0)} - 3) = 3 + \frac{1}{2^m}$ et $z_1^{(2m+1)} = 3 + \frac{1}{2^m} (z_1^{(1)} - 3) = 3$.

De la même façon, avec la relation (6), on tire pour tout entier k ,

$z_2^{(k+2)} - 4 = \frac{1}{2} (z_2^{(k)} - 4)$ donc, pour tout m , $z_2^{(2m)} = 4$ et $z_2^{(2m+1)} = 4 + \frac{1}{2^m}$.

Ainsi $Z_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} Z_k = X_\infty$ bien sûr.

4° On remarque $A X_\infty = B$ et $A Z_\infty = B$.

5° Soit $u = A^{-1} B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = X_\infty = Z_\infty$.

$\|X_p - u\|_\infty = \frac{1}{2^p}$ donc $\|X_p - u\|_\infty < 10^{-3} \iff p > \frac{3}{\log 2} \iff p \geq 10$.

$\|Z_q - u\|_\infty \leq \frac{1}{2^{(q-1)/2}}$ donc $\|Z_q - u\|_\infty < 10^{-3} \iff q > \frac{6}{\log 2} + 1 \iff q \geq 21$.

Ceci donne la vitesse espérée de convergence d'un algorithme pour résoudre un système linéaire.

F I N
