

1 EXERCICE

CORRIGÉ

(G, \times) est un groupe fini de cardinal 12 ; son neutre est noté e . On suppose que G est cyclique et que a en est un générateur.

1° Pour x et y dans G , on a $x = a^n$ et $y = a^m$. Ainsi $x \times y = a^n \times a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m \times a^n = y \times x$. Ainsi \times est commutative et le groupe est abélien.

2° a) $gr(a) = G$ donc $G = \{a^k / k \in \mathbb{Z}\}$. Mais G est fini, de cardinal 12. On a donc $a^{12} = a^k$ avec $0 \leq k \leq 11$. Alors $a^{12-k} = e$ donc $\text{card}(gr(a)) = 12 - k$ et ainsi $k = 0$. On a donc $a^{12} = e$.

b) Soit $H_8 = gr(a^8)$. Les éléments de H_8 sont : $(a^8)^1 = a^8$, $(a^8)^2 = a^{16} = a^4$, $(a^8)^3 = a^{24} = e$ et ainsi $\text{card}(H_8) = 3$.

3° Soit $\varphi_k : \begin{cases} G & \rightarrow G \\ x & \mapsto x^k \end{cases}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Il est clair que $\mathcal{D}_{\varphi_k} = G$ et on a pour tout $(x, y) \in G^2$, $(xy)^k = x^k y^k$ et donc φ_k est un endomorphisme du groupe G .

4° Réciproquement, soit un endomorphisme ψ du groupe G . On a $\psi(a) \in G$ donc $\psi(a) = a^k$. Alors, pour $x \in G$, $x = a^p$, on a $\psi(x) = \psi(a^p) = (\psi(a))^p = (a^k)^p = a^{pk} = (a^p)^k = x^k$. Et donc $\psi = \varphi_k$.

5° φ_3 n'est pas injective car $\varphi_3(e) = e$ et $\varphi_3(a^4) = a^{12} = e$.

φ_5 est surjective puisque les éléments de $G : e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}$ ont respectivement pour images : $e, a^5, a^{10}, a^3, a^8, a, a^6, a^{11}, a^4, a^9, a^2, a^7$. Puisque G est fini, φ_5 est bijective, c'est un automorphisme du groupe G .

6° a) $\text{Im}(\varphi_8) = H_8$.

b) Donc l'équation $x^8 = b$ n'a pas de solution pour $b \notin H_8$.

$x^8 = e$ a pour ensemble de solution $\text{Ker}(\varphi_8) = \{e, a^3, a^6, a^9\}$

$x^8 = a^4$ a pour ensemble de solution $\{a^2, a^5, a^8, a^{11}\}$

$x^8 = a^8$ a pour ensemble de solution $\{a, a^4, a^7, a^{10}\}$

2 EXERCICE

CORRIGÉ

1° Soit g l'application de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\ln(1+x)}{x}$

a) On a $\mathcal{D}_g =]0, +\infty[$; $\left[x \mapsto \frac{x}{1+x}\right]$ est C^∞ sur $]0, +\infty[$ à valeurs positives et \ln est C^∞ sur $]0, +\infty[$, donc g est C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Pour $x > 0$, $g'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

b) Immédiatement g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Enfin, pour $x > 0$, $g(x) = \ln x - \ln(1+x) - \frac{\ln(1+x)}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

2° Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(h(x) = g \circ \exp)(x) = g(e^x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = x - \ln(1+e^x) - e^{-x} \ln(1+e^x)$.

Donc $h'(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} + e^{-x} \ln(1+e^x) - e^{-x} \frac{e^x}{1+e^x} = f(x)$.

b) Pour $x > 0$, $\int_0^x f(t) dt = h(x) - h(0) = g(e^x) - g(1) = g(e^x) + 2 \ln 2$.

c) Alors $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} g(e^x) + 2 \ln 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) + 2 \ln 2 = 2 \ln 2$.

3 EXERCICE

CORRIGÉ

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : $\left[x \mapsto 1+x + \frac{2x \ln x}{1-x} \right]$. Immédiatement $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[\setminus \{1\}$.

1° a) On a $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ donc f admet une limite en 0 de valeur 1.

b) On a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \ln'(1) = 1$ donc f admet une limite en 1 de valeur 0.

Ainsi f peut être prolongée par continuité en 0 et en 1 par la fonction F telle que $F(0) = 1$, $F(1) = 0$, $F(x) = f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.

2° On a alors $D_F = [0, +\infty[$ et $F(0) = 1$. De plus, pour $x > 1$, $F(x) = 1+x \left(1 + \frac{2 \ln x}{1-x}\right)$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

3° a) F , comme f est C^∞ sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ et F continue sur $[0, +\infty[$.

Pour $0 < x < 1$, $\frac{F(x) - F(0)}{x} = 1 + \frac{2 \ln x}{1-x}$ et donc F n'est pas dérivable en 0.

Pour $|h| < 1$, $F(1+h) = 1 + (1+h) - 2(1+h) \frac{\ln(1+h)}{h} = 2+h - 2(1+h) \left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right) = o(h)$. On a ainsi que F est dérivable en 1 de nombre dérivé $F'(1) = 0$.

b) Pour $x > 0$, $x \neq 1$, $F'(x) = 1 + 2 \frac{\ln(x)}{1-x} + 2 \frac{1}{1-x} + 2 \frac{x \ln(x)}{(1-x)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3 + 2 \ln(x)}{(x-1)^2}$, F non dérivable en 0 et $F'(1) = 0$.

On a pour $|h| < 1$, $h \neq 0$, $F'(1+h) = 1 - 2 \frac{\ln(1+h)}{h} - 2 \frac{1}{h} + 2 \frac{(1+h) \ln(1+h)}{h^2}$
 $= 1 - (2 - h + o(h)) - \frac{2}{h} + (1+h) \left(\frac{2}{h} - 1 + o(1)\right)$
 $= o(1)$

Ayant $F'(1) = 0$ on déduit F' continue en 1. D'où F est de classe C^1 sur tout intervalle inclus dans $]0, +\infty[$.

4° Pour $x > 0$, $x \neq 1$, $F'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3 + 2 \ln x}{(x-1)^2}$ et $F'(1) = 0$. Posons $g : [x \mapsto x^2 - 4x + 3 + 2 \ln x]$.

g est immédiatement C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $g'(x) = 2x - 4 + 2 \frac{1}{x} = 2 \frac{(x-1)^2}{x}$. g est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $g(1) = 0$ fournit le signe de F' sur $]0, +\infty[$ et donc l'étude des variations de F .

5° La courbe \mathcal{C} de F dans (O, \vec{i}, \vec{j}) présente donc une branche infinie.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 1$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - x = -\infty$ donnent que cette branche infinie est une branche parabolique oblique dans la direction $\vec{i} + \vec{j}$.

6° Le dernier élément caractéristique manquant est donné par $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -\infty$ puisque, pour $0 < x < 1$,

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = 1 + \frac{2 \ln x}{1 - x}$$

\mathcal{C} admet en $A(0, 1)$ une demi-tangente verticale.

D'où la courbe

F I N

Le saviez-vous ?

1999 et 19981999 sont PREMIERS

```

169562271288068747887400393222573314541871031172152584028227546394444
391501766518767764859045800095276019439238167628964472781614506010476
756059209553529911469128098893937883832759885590549112958887218296059
768544191667870736381948421313108625160739828916259849380903171097200
622744525334228076766180550265759478070751768471966219817315344351220
000523695481076043193396089032520799135785547911697825724813770921462
191448004112124119861318903084696307908851821381356953026591660917755
708041545318032286256893481372013293565404561012313536070745569648205
201111917803917089426925046726225659955364931026166928894392564678755
824916865678525054526152384537484817311899176972545929717019438989128
268350978198688634535632050868586493434240748304066486419914613594413
124474943793224882857838081787190401816486139297997330339271686500570
778220506278552338058642568033176696034210912974807429316748028057862
495354202212099429417576968655166743180824969651582473388052430230763
273284685429286971892397157765116923799050487122757054071124036147984
242060317055743215346402267587221808345889464859007798282655043163469
909845198800773148443020688736746034904112643805305579536776436596545
370995982233304571888022964361481031860298227385804865206029214697167
774081289053572837698431384583733163168315320866788978732054662757387
113620757117588811133939675875891109260929936228265548681727789466112
921643585414570154298104289971895529671817718760720047896316571929479
540535020439735959026693283761942669724863257628123192353176446192991
978366133934267987429040830567754122294457133246360909854909990051831
314511395563957356654879738029278858802439304646158950266071940448366
958466636932720958627072047306042797549371347605800416108083941373126
238651162238106254279628160459016991526332735165194734663597772286383
643625302527774569513412755938863974268316555850852432079602047913499
527900550689219152703706763849942067841781864906059067455902834520379
8346607822008724593604204628509305970497781774812777709652208140691

```

est un nombre de 2000 chiffres (comme 10^{1999}), et il est PREMIER !