

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

• On pose  $f_0 : [x \mapsto e^{-x}]$  et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_k : [x \mapsto x^k e^{-x}]$ . On note  $\mathcal{B}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n)$  et  $E_n = \text{Vect}(\mathcal{B}_n)$ , où  $n$  est un entier positif choisi pour l'exercice.

• On définit  $d$  sur  $E_n$  par  $\forall f, d(f) = f'$  l'opérateur de dérivation.

1° Montrer que  $\mathcal{B}_n$  constitue une base de  $E_n$ .

2° a) Donner  $d(f_0)$  puis montrer  $d(f_k) = k \cdot f_{k-1} - f_k$  pour  $1 \leq k \leq n$ .

b) Etablir que  $d$  est un endomorphisme de  $E_n$ .

3° a) Donner la valeur de  $\det(d)$ .

b) Justifier que  $d$  est un automorphisme de  $E_n$ .

c) Donner  $\text{mat}_{\mathcal{B}_n}(d^{-1})$ .

4° a) Pour  $j \in \mathbb{N}$ , montrer que  $[x \mapsto x^j e^{-x}]$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

b) En utilisant la question précédente, donner la valeur de  $I_j = \int_0^{+\infty} x^j e^{-x} dx$ .

c) Etablir que toute fonction de  $E_n$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , et donner, pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\int_0^{+\infty} P(x) e^{-x} dx$ .

• Pour  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $E_n$ , on note  $(\varphi | \psi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) \psi(x) e^x dx$ .

5° a) Montrer que  $[(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi | \psi)]$  est une forme bilinéaire sur  $E_n$ .

b) Montrer que cette forme est symétrique.

c) Etablir, pour  $\varphi \in E_n$ ,  $(\varphi | \varphi) = 0 \iff \varphi = 0$ .

• Pour  $\varphi$  dans  $E_n$ , on note  $\|\varphi\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \varphi(x)^2 e^x dx}$ .

6° a) Etablir "l'inégalité triangulaire" : Pour  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $E_n$ ,  $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ .

b) Montrer que pour  $(\varphi | \psi) = 0$ , on a  $\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2$ .

• On note  $E_{n-1} = \text{Vect}(f_0, \dots, f_{n-1})$  et  $F_1 = \{g \in E_n \mid (g \mid h) = 0 \text{ pour tout } h \in E_{n-1}\}$ .

**7° a )** Montrer que  $F_1$  est un sous-espace vectoriel de  $E_n$  et  $\dim F_1 \geq 1$ .

**b )** Etudier  $E_{n-1} \cap F_1$  et en déduire que  $E_{n-1}$  et  $F_1$  sont supplémentaires dans  $E_n$ .

• On note  $h_n$  le projeté de  $f_n$  sur  $E_{n-1}$  dans la direction  $F_1$ . On note  $h_n = - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot f_j$ .

**8° a )** Justifier  $\|f_n - h_n\| = \inf_{g \in E_{n-1}} \|f_n - g\|$ .

**b )** Calculer  $(f_n - h_n \mid f_k)$  pour  $0 \leq k \leq n-1$ . En déduire  $\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)! = 0$ .

**9°** On définit le polynôme  $P = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (X+1) \dots (X+j) + (X+1)(X+2) \dots (X+n)$ .

**a )** Vérifier  $P(k) = 0$  pour  $0 \leq k \leq n-1$ .

**b )** En déduire explicitement  $P$  et vérifier  $P(n) = n!$ .

**10° a )** Montrer  $\|f_n - h_n\|^2 = (f_n - h_n \mid f_n)$ .

**b )** En déduire la valeur de  $\inf_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} \int_0^{+\infty} (x^n - P(x))^2 e^{-x} dx$ .

---

**F I N**

---