

I.S.E.P.

Cycle préparatoire

Math.Sup. 2

Devoir 4

Mathématiques

21 janvier 1998

durée 3 heures 30

sans calculatrice

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

QUESTIONS DE COURS

(3 points)

Enoncer et démontrer un théorème de Taylor pour les polynômes.

EXERCICE 2

(5 points)

On désigne par \mathcal{E} et \mathcal{L} les courbes respectives des fonctions \exp et \ln dans un même repère du plan.

- 1° Déterminer une fonction φ telle que la droite d'équation $y = mx + p$ n'est tangente à \mathcal{E} que si et seulement si $p = \varphi(m)$.
- 2° Déterminer une fonction ψ telle que la droite d'équation $y = mx + p$ n'est tangente à \mathcal{L} que si et seulement si $p = \psi(m)$.
- 3° Déterminer le nombre de tangentes communes aux courbes \mathcal{E} et \mathcal{L} . Que dire des pentes ?

EXERCICE 3

(12 points)

Dans \mathbb{C} , on note $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Soit dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $F = \frac{1}{1 + X + X^2}$.

- 1° Décomposer F en éléments simples.
- 2° n désigne un entier naturel non nul. Déterminer le complexe c_n tel que $F^{(n)} = c_n \left(\frac{1}{(X - j)^{n+1}} - \frac{1}{(X - j^2)^{n+1}} \right)$ ($F^{(n)}$ désigne la fraction dérivée $n^{\text{ième}}$ de F).
- 3° n désigne un entier naturel non nul.

a) Montrer l'existence d'un polynôme P_n de $\mathbb{C}[X]$, à coefficients entiers, tel que $F^{(n)} = \frac{P_n}{(1 + X + X^2)^{n+1}}$

b) Donner P_0, P_1, P_2 .

c) Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n .

4° a) Pour z complexe, trouver $\min_{x \in \mathbb{R}} |z - x|$

b) Etablir : pour tout $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \frac{|F^{(n)}(x)|}{n!} \leq k \cdot \alpha^n$ où k et α sont des constantes positives dont on donnera des valeurs possibles.

5° n désigne un entier naturel non nul. Déterminer les racines de P_n .

F I N
