

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

suites, matrices et algèbre linéaire

(15 points)

Partie A

On rappelle que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times, .)$ est une \mathbb{R} -algèbre. ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ note l'ensemble des suites de réels).

On note F la partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formée des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$(R) : \quad \forall n, \quad u_{n+2} = \frac{11}{10} u_{n+1} - \frac{1}{10} u_n$$

1° Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2° a) Justifier qu'il existe une unique suite $(w_n)_n$ de F telle que $w_0 = 1$ et $w_1 = 10$.

b) Montrer que F contient les suites constantes.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur q pour qu'une suite géométrique $(v_n)_n$ non constante, de raison q , appartienne à F .

3° a) Les réels u_0 et u_1 étant fixés, justifier qu'il existe deux réels c et d tels que
$$\begin{cases} u_0 - c = d \\ u_1 - c = \frac{1}{10} d \end{cases}.$$

b) En déduire que pour un élément quelconque $(u_n)_n$ de F , il existe une suite constante de valeur c telle que $(u_n - c)_n$ soit géométrique.

4° Dans le cas de la suite $(w_n)_n$, donner explicitement la suite géométrique $(v_n)_n$ et la valeur de la constante c telles que $w_n - c = v_n$ pour tout n .

Partie B

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times, .)$ est une \mathbb{R} -algèbre et que $(GL(2, \mathbb{R}), \times)$ est un groupe, où $GL(2, \mathbb{R})$ note l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note E l'ensemble des matrices inversibles $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $a + c = b + d = 1$.

1° a) Justifier que les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont éléments de E .

b) E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

c) E est-il une partie de $GL(2, \mathbb{R})$ stable par produit ?

2° a) Justifier qu'il existe deux suites de réels, $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ telles que $A^n = \begin{pmatrix} x_n & 1 - x_n \\ 1 - y_n & y_n \end{pmatrix}$ pour tout n .

b) Donner x_p et y_p pour les valeurs 0, 1 et 2 de p .

3° a) Montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I i.e. qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha.A + \beta.I$.

b) En déduire que les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ satisfont la récurrence (R) de la **Partie A**.

c) Donner alors en fonction de n l'expression générale de A^n pour n quelconque.

4° a) Justifier que les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont convergentes. Donner leurs limites respectives λ et μ .

On notera A^∞ la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \mu & \mu \end{pmatrix}$.

b) Justifier l'écriture, pour tout n , $A^n = A^\infty + k^n B$ avec un réel k et une matrice B que l'on précisera.

EXERCICE 2

critère de convergence

(5 points)

On se propose d'établir que la propriété suivante est un critère (dit de Cauchy) de convergence de la suite $(v_n)_n$:

(C) : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $p \geq N$, pour tout $n \geq N$, $|v_n - v_p| < \varepsilon$

1° Soient $(u_n)_n$ une suite convergente et ℓ sa limite. Montrer que $(u_n)_n$ possède la propriété (C) .

2° Réciproquement, considérons $(u_n)_n$ une suite possédant la propriété (C) :

a) Établir que la suite $(u_n)_n$ est bornée.

b) Pour n quelconque, on pose $U_n = \{u_m / m \geq n\}$. Justifier que U_n admet une borne supérieure dans \mathbb{R} : α_n .

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante, puis prouver qu'elle converge. On note ℓ sa limite.

d) $\varepsilon > 0$ quelconque est fixé. Montrer qu'il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait à la fois $|\alpha_n - \ell| < \varepsilon$ et l'existence d'un $p \geq n$ vérifiant $|u_p - \alpha_n| < \varepsilon$ et $|u_n - u_p| < \varepsilon$.

e) En déduire la convergence de $(u_n)_n$.

F I N
