

Polynômes de Tchébycheff de deuxième espèce.

Partie A

$$\varphi : \left[P \mapsto (1 - X^2) P'' - 3X P' \right] \text{ sur } E = \mathbb{R}_n[X].$$

1° a) Pour $P \in E$, on a $\deg(P) \leq n$; alors $\deg(P'') \leq n - 2$ et $\deg(P') \leq n - 1$ donc $\deg(\varphi(P)) \leq n$. φ est une application de E dans E . On vérifie aisément sa linéarité conséquence de la linéarité de la dérivation et de la distributivité du produit.

Ainsi φ est un endomorphisme de E .

b) $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de E . On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = -3X$ et $\varphi(X^p) = -p(p+2)X^p + p(p-1)X^{p-2}$ pour $p \geq 2$. Ainsi

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -3 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -8 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -n(n+2) \end{pmatrix}$$

2° a) Pour λ un réel quelconque, $\det(M - \lambda I_n) = (-\lambda)(-3 - \lambda) \dots (-n(n+2) - \lambda)$ comme matrice triangulaire.

b) Les valeurs propres de φ sont les réels qui annulent $\det(M - \lambda I_n)$, ce sont $0, -3, -8, \dots, -n(n+2)$.

φ admet ainsi $(n+1)$ valeurs propres distinctes. Une famille formée de vecteurs propres, un vecteur pour chaque valeur propre, est alors une famille libre. Ayant $(n+1)$ vecteurs, elle est une base de E . Cette base étant formée de vecteurs propres, la matrice de φ dans cette base est diagonale.

c) Plus concrètement, pour $0 \leq k \leq n$, posons $\lambda_k = -k(k+2)$. Il existe un polynôme non nul associé à cette valeur propre. En le divisant par son coefficient dominant on obtient un vecteur propre U_k associé à λ_k . U_k est unitaire.

La restriction de φ à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ n'admet pas λ_k comme valeur propre et $(U_k - X^k)$ a une image de degré inférieur à k ; ainsi $\deg(U_k) = k$.

Puisque les valeurs propres sont deux à deux distinctes, on a $\mathcal{C} = (U_0, U_1, U_2, \dots, U_n)$ base de E .

d) On a $U_0 = 1, U_1 = X, U_2 = X^2 - \frac{1}{4}$ et $U_3 = X^3 - \frac{X}{2}$.

e) Posons $U_n = X^n + a.X^{n-1} + b.X^{n-2} + \dots$, avec $\deg(\dots) < n-2$. Alors

$$0 = \varphi(U_n) + n(n+2).U_n = 0.X^n + a(2n+1).X^{n-1} + [n(n-1) + 4nb].X^{n-2} + \dots$$

Ainsi le coefficient de X^{n-1} dans la décomposition de U_n dans la base \mathcal{B} est nul et que celui de X^{n-2} vaut $\frac{1-n}{4}$.

Partie B

Pour P et Q dans E , $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) \sqrt{1-t^2} dt$.

1° On réalise bien ainsi une application de E^2 dans \mathbb{R} . La symétrie vient de la commutativité du produit. La bilinéarité vient immédiatement de la linéarité de l'intégrale. De plus pour P quelconque, P^2 étant à valeurs positives ou nulle sur $[-1; 1]$, on a $(P|P) \geq 0$. Enfin, $(P|P) = 0$ impose $P = 0$ à cause de la continuité de la fonction $\left[t \mapsto P(t)^2 \sqrt{1-t^2} \right]$ sur $[-1; 1]$.

Ainsi on a un produit scalaire sur E .

2° Pour tout entier p on pose $I_p = \int_{-1}^1 t^p \sqrt{1-t^2} dt$.

a) Pour p impair, $\left[t \mapsto t^p \sqrt{1-t^2} \right]$ est impaire, elle a une intégrale nulle sur $[-1; 1]$: $I_p = 0$.

$$b) \quad I_{p+2} = \int_{-1}^1 t^{p+1} t \sqrt{1-t^2} dt = \left[t^{p+1} \frac{\sqrt{1-t^2}^3}{-3} \right]_{-1}^1 + \frac{p+1}{3} \int_{-1}^1 t^p (1-t^2) \sqrt{1-t^2} dt = \frac{p+1}{3} (I_p - I_{p+2}).$$

Ainsi $I_{p+2} = \frac{p+1}{p+4} I_p$ pour tout p . De $I_0 = \frac{\pi}{2}$ on tire $I_{2q} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2q-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2q+2)}$ qui se prouve par récurrence.

c) Pour i et j dans \mathbb{N} , $(X^i | X^j) = I_{i+j}$. Pour $i+j$ impair, on a $(X^i | X^j) = 0$. Pour $i+j$ pair, on a

$$(X^i | X^j) = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (i+j-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (i+j+2)}$$

3° a) Soit $r : \left[t \mapsto \sqrt{1-t^2} \right]$. On a $r' = -td/r$. $(r^3 P')' = 3r' r^2 P' + r^3 P'' = r \varphi(P)$.

b) Soient P et Q dans E . On a

$$\begin{aligned} (\varphi(P) | Q) &= \int_{-1}^1 (r \varphi(P))(t) Q(t) dt \\ &= [(r^3 P')(t) Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (r^3 P')(t) Q'(t) dt \\ &= -[P(t) (r^3 Q')(t)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 P(t) (r^3 Q')'(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 P(t) (r \varphi(Q))(t) dt \\ &= (P | \varphi(Q)) \end{aligned}$$

c) $i \neq j$. $(\varphi(U_i) | U_j) = -i(i+2) (U_i | U_j)$ et $(U_i | \varphi(U_j)) = -j(j+2) (U_i | U_j)$. L'égalité de ces deux nombres implique $(U_i | U_j) = 0$.

La base \mathcal{C} est orthogonale.

4° a) U_n est unitaire de degré n . $X U_{n-1}$ est unitaire de degré n . Donc $(U_n - X U_{n-1})$ est de degré au plus $n-1$.

Puisque \mathcal{C} est orthogonale on a $(U_n | U_k) = 0$ pour $0 \leq k \leq (n-1)$: U_n est orthogonal à tout polynôme de degré au plus $(n-1)$. On trouve de même que U_{n-1} est orthogonal à tout polynôme de degré au plus $(n-2)$.

Or pour tout P , $(X U_{n-1} | P) = \int_{-1}^1 t U_{n-1}(t) P(t) \sqrt{1-t^2} dt = (U_{n-1} | X P)$. Donc $X U_{n-1}$ est orthogonal à tout P de degré au plus $(n-3)$.

Ainsi $(U_n - X U_{n-1})$ est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-3$.

b) Vu son degré, $U_n - X U_{n-1}$ appartient à $\text{Vect}(U_0, U_1, \dots, U_{n-1})$. On a $U_n - X U_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k U_k$. Mais pour $0 \leq k \leq (n-3)$, on a $0 = (U_n - X U_{n-1} | U_k) = a_k (U_k | U_k)$ et donc $a_k = 0$.

Ainsi $(U_n - X U_{n-1})$ est combinaison linéaire de U_{n-1} et de U_{n-2} .

c) $(U_n - X U_{n-1}) = a_{n-1} U_{n-1} + a_{n-2} U_{n-2}$. Or nous savons que dans la décomposition dans la base \mathcal{B} , le coefficient de U_n et de $X U_{n-1}$ suivant X^{n-1} est nul : $(U_n - X U_{n-1})$ est de degré au plus $(n-2)$, i.e. $a_{n-1} = 0$.

De plus par le même calcul, on obtient le coefficient de $(U_n - X U_{n-1})$ suivant X^{n-2} est $\frac{1-n}{4} - \frac{1-(n-1)}{4} = -\frac{1}{4}$. Or U_{n-2} étant unitaire dans la base \mathcal{B} , X^{n-2} est unitaire dans la base \mathcal{C} . Ainsi $a_{n-2} = -\frac{1}{4}$.

On en déduit $4U_n - 4X U_{n-1} + U_{n-2} = 0$.

d) Pour tout n on pose $u_n = U_n(1)$. La suite $(u_n)_n$ vérifie : $4u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2} = 0$, une récurrence linéaire à deux niveaux. L'équation caractéristique est $4r^2 - 4r + 1 = 0$ de racine double $1/2$.

Ainsi pour tout n , $u_n = (an + b) \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ayant $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ on tire $U_n(1) = \frac{(n+1)}{2^n}$ pour tout n .

5° a) X^n est de degré n donc combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{C} . Son coefficient en U_n est 1. Alors par orthogonalité de la base \mathcal{C} , $(U_n | U_n) = (U_n | X^n)$.

De $(1 | 1) = I_0 = \frac{\pi}{2}$, $(1 | X) = I_1 = 0$, $(X | X) = (1 | X^2) = I_2 = \frac{\pi}{8}$, $(X | X^2) = I_3 = 0$ et $(X^2 | X^2) = I_4 = \frac{3\pi}{48}$ on tire $(U_0 | U_0) = \frac{\pi}{2}$, $(U_1 | U_1) = \frac{\pi}{8}$ et $(U_2 | U_2) = (U_2 | X^2) = \frac{\pi}{32}$.

b) Nous savons $U_p = X^p + \frac{1-p}{4} X^{p-2} + \dots$ pour tout p ; donc $X^{k+2} = U_{k+2} - \frac{1-(k+2)}{4} U_k + \dots$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.
Ainsi $(U_k | X^{k+2}) = \frac{k+1}{4} (U_k | U_k)$ par orthogonalité de la base \mathcal{C} .

c) On a l'enchaînement :

$$\begin{aligned} 4U_n - 4X U_{n-1} + U_{n-2} &= 0 \\ (4U_n - 4X U_{n-1} + U_{n-2} | X^n) &= 0 \\ (4U_n | X^n) - (4X U_{n-1} | X^n) + (U_{n-2} | X^n) &= 0 \\ 4(U_n | X^n) - 4(U_{n-1} | X^{n+1}) + (U_{n-2} | X^n) &= 0 \\ 4(U_n | U_n) - 4\frac{n}{4}(U_{n-1} | U_{n-1}) + \frac{n-1}{4}(U_{n-2} | U_{n-2}) &= 0 \end{aligned}$$

D'où on tire $4(U_n | U_n) - n(U_{n-1} | U_{n-1}) + \frac{n-1}{4}(U_{n-2} | U_{n-2}) = 0$.

d) $(U_n | U_n) = \frac{\pi}{2^{2n+1}}$ vérifie la relation de récurrence précédente et s'initialise avec les valeurs calculées pour $n \leq 2$. Le théorème de récurrence donne alors $(U_n | U_n) = \frac{\pi}{2^{2n+1}}$ pour tout n .

e) La base \mathcal{C} est orthogonale. Il suffit de poser, pour tout k , $V_k = \frac{1}{2^k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} U_k$ pour obtenir une base orthonormale de E : (V_0, V_1, \dots, V_n) .