

I.S.E.P.

Cycle préparatoire

Math.Sup. 2

Devoir 6

Mathématiques

9 février 1998

durée 3 heures 30

sans calculatrice

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

Le problème se propose de faire l'étude de la fonction de la variable réelle :

$$F : \quad x \longmapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

1° Préliminaire. Soit $\varphi : \left[x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt \right]$.

a) Etablir que φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

b) Donner, pour x réel, $\varphi'(x)$.

2° Généralités sur F .

a) Etudier la parité de F .

b) Donner le signe de F sur \mathbb{R} .

c) Prouver : $\forall x > 0, x.e^{-x^2} \leq F(x) \leq x$

3° Etude locale en $+\infty$.

a) A l'aide de deux intégrations par parties, établir, pour $x > 1$:

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$$

b) Montrer que la fonction $h : \left[t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^2} \right]$ est croissante sur $[1, +\infty[$.

c) En déduire pour $x > 1$: $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$

d) Etablir : $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

e) En déduire : $\int_1^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$

f) Donner un équivalent simple de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$ puis justifier $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

4° Variations de F .

a) Etablir que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

b) Donner $F'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Justifier que F est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

c) Prouver que sur $[0, +\infty[$ F admet un extremum au moins, en un réel qui sera noté a .

d) Montrer $F(a) = \frac{1}{2a}$

e) En déduire l'unicité du point de $[0, +\infty[$ où F atteint un extremum.

f) Dresser le tableau complet des variations de F , avec toutes les justifications.

F I N
