

1 EXERCICE

CORRIGÉ

1° a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = 0$ et donc $A^k = 0$ pour $k \geq 3$.

b) Pour $n \geq 3$ on a alors $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k = I_3 + A + \frac{1}{2} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi A admet une exponentielle comme limite d'une suite stationnaire.

2° Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

b) Pour $n \geq 3$ on a alors $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} B^k = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} 2^k \\ b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-1)^k \end{cases}$ Or $(a_n)_n$ converge vers e^2 et

$(b_n)_n$ vers $1/e$. Donc B admet une exponentielle dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $e^B = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1/e \end{pmatrix}$.

3° Soient $C = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$ et ψ l'endomorphisme de E , \mathbb{R} -ev de dimension 2, qui admet C pour matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E .

a) λ valeur propre de ψ si et seulement si $\psi - \lambda \cdot id_E$ non injectif donc si et seulement si la matrice $C - \lambda \cdot I_2$ a un déterminant nul.

$$\begin{vmatrix} 11 - \lambda & -12 \\ 9 & -10 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 \text{ donc les valeurs propres de } \psi \text{ sont } 2 \text{ et } -1.$$

b) On pose $g_1 = 4e_1 + 3e_2$ et $g_2 = -e_1 - e_2$. g_1 et g_2 sont manifestement non colinéaires donc $\mathcal{C} = (g_1, g_2)$ est une famille libre de deux vecteurs. \mathcal{C} est une base de E .

c) La matrice de ψ dans la base \mathcal{C} est B . Par ailleurs la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} est $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = P^{-1} \times C \times P$.

d) On a donc $C = P \times B \times P^{-1}$ donc, pour $k \in \mathbb{N}$, $C^k = P \times B^k \times P^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

e) Ainsi C admet une exponentielle

$$e^C = P \times e^B \times P^{-1} = \begin{pmatrix} -3/e + 4e^2 & -4e^2 + 4/e \\ 3e^2 - 3/e & 4/e - 3e^2 \end{pmatrix}$$

Partie A

$B = (X - \beta)^3$ où β est un complexe donné. Pour A de $\mathbb{C}[X]$ on a $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < 3$. On note $R = r_0 + r_1X + r_2X^2$.

1° a) β est racine triple de BQ donc de (BQ) , de $(BQ)'$ et de $(BQ)''$. Ainsi $(t_1) : \begin{cases} R(\beta) &= A(\beta) \\ R'(\beta) &= A'(\beta) \\ R''(\beta) &= A''(\beta) \end{cases}$

b) Alors (r_0, r_1, r_2) est solution du système $(t_2) : T \times \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\beta) \\ A'(\beta) \\ A''(\beta) \end{pmatrix}$ où $T = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta^2 \\ 0 & 1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les colonnes de T sont manifestement indépendantes.

c) Donc $\text{rg } T = 3$, T est inversible et on trouve $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & \beta^2/2 \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

2° a) (t_2) se résout en : $\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \times \begin{pmatrix} A(\beta) \\ A'(\beta) \\ A''(\beta) \end{pmatrix}$.

b) Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$ on note C_i le polynôme dont les composantes dans la base \mathcal{B} sont données par la colonne $(i+1)$ de T^{-1} . Ainsi $C_0 = 1$, $C_1 = X - \beta$ et $C_2 = 1/2 X^2 - \beta X + \beta^2/2$.

c) On a pour tout i de $\{0, 1, 2\} : C_i^{(i)}(\beta) = 1$ et $C_i^{(j)}(\beta) = 0$ pour $i \neq j$.

3° application numérique : le reste de la division euclidienne de $A = (X^2 + 1)^8$ par $B = (X - 1)^3$ est donné par $T^{-1} \times \begin{pmatrix} 2^8 \\ 2^{11} \\ 2^{14} \end{pmatrix}$.

Ainsi $B = (25 \cdot 2^8) - (7 \cdot 2^{11}) \cdot X + 2^{13} \cdot X^2 = 8192 X^2 - 14336 X + 6400$.

Partie B

$B = (X - \beta_0)(X - \beta_1)(X - \beta_2)$ où $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ sont 3 complexes donnés, distincts deux à deux. Pour A de $\mathbb{C}[X]$ on a $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < 3$. On note $R = r_0 + r_1X + r_2X^2$.

1° a) R satisfait au système $(s_1) : \begin{cases} R(\beta_0) &= A(\beta_0) \\ R(\beta_1) &= A(\beta_1) \\ R(\beta_2) &= A(\beta_2) \end{cases}$

b) Alors (r_0, r_1, r_2) est solution de $(s_2) : S \times \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\beta_0) \\ A(\beta_1) \\ A(\beta_2) \end{pmatrix}$, où $S = \begin{pmatrix} 1 & \beta_0 & \beta_0^2 \\ 1 & \beta_1 & \beta_1^2 \\ 1 & \beta_2 & \beta_2^2 \end{pmatrix}$.

c) $(s) : S \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; méthode du pivot de Gauss par exemple :

$$\begin{cases} x_0 + \beta_0 x_1 + \beta_0^2 x_2 = 0 \\ x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_1^2 x_2 = 0 \\ x_0 + \beta_2 x_1 + \beta_2^2 x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 + \beta_0 x_1 + \beta_0^2 x_2 = 0 \\ (\beta_1 - \beta_0) x_1 + (\beta_1^2 - \beta_0^2) x_2 = 0 \\ (\beta_1 - \beta_0)(\beta_2 - \beta_0)(\beta_1 - \beta_2) x_2 = 0 \end{cases}$$

donc $(0, 0, 0)$ solution unique de (s) dans \mathbb{C}^3 .

d) Pour E un espace de dimension 3 rapporté à une base \mathcal{H} , S est la matrice de l'endomorphisme φ dans cette base. Le système (s) caractérise les composantes (x_0, x_1, x_2) d'un vecteur du noyau de φ . La solution unique donne φ injectif, donc bijectif. S est inversible.

2° Pour z un complexe quelconque, on définit $f_z : \begin{cases} \mathbb{C}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ P & \mapsto & P(z) \end{cases}$

a) Bien sûr : $(s_1) \iff \begin{cases} f_{\beta_0}(R) = f_{\beta_0}(A) \\ f_{\beta_1}(R) = f_{\beta_1}(A) \\ f_{\beta_2}(R) = f_{\beta_2}(A) \end{cases}$

b) Pour tout z de \mathbb{C} , f_z est une forme linéaire de $\mathbb{C}_2[X]$. Sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{C}_2[X]$ (la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$) et de \mathbb{C} (la base $\mathcal{C} = (1)$) est $\begin{pmatrix} 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$.

3° a) $\mathcal{D} = (f_{\beta_0}, f_{\beta_1}, f_{\beta_2})$ est une base de l'espace dual de $\mathbb{C}_2[X]$ puisque S est inversible : la ligne i de S est formée des composantes de f_{β_i} dans la base duale \mathcal{B}^* .

b) Pour i de $\{0, 1, 2\}$, $L_i(\beta_i) = 1$ et $L_i(\beta_j) = 0$ pour $i \neq j$ caractérise la base (L_0, L_1, L_2) de $\mathbb{C}_2[X]$ dont la duale est \mathcal{D} .

c) L_0 , de degré inférieur ou égal à 2, est factorisable par $(X - \beta_1)(X - \beta_2)$ et vérifie $L_0(\beta_0) = 1$; on a donc $L_0 = \frac{(X - \beta_1)(X - \beta_2)}{(\beta_0 - \beta_1)(\beta_0 - \beta_2)}$.

De même $L_1 = \frac{(X - \beta_2)(X - \beta_0)}{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_0)}$, $L_2 = \frac{(X - \beta_0)(X - \beta_1)}{(\beta_2 - \beta_0)(\beta_2 - \beta_1)}$.

4° L est la matrice de $\mathcal{M}_3[\mathbb{C}]$ dont la colonne i est formée des composantes de L_i dans la base \mathcal{B} . (nommons C_i cette colonne).

a) Le coefficient ligne k et colonne l de $S \times L$ est égal à $\begin{pmatrix} 1 & \beta_k & \beta_k^2 \end{pmatrix} \times C_l$ soit $f_{\beta_k}(L_l)$. Donc $S \times L = I_3$ et $S^{-1} = L$.

b) On a ainsi $(s_2) \iff \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = L \times \begin{pmatrix} A(\beta_0) \\ A(\beta_1) \\ A(\beta_2) \end{pmatrix}$.

5° application numérique : le reste de la division euclidienne de $A = (X + 1)^{738}$ par $B = X^3 - 1$ est donné par

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = L \times \begin{pmatrix} 2^{738} \\ (1+j)^{738} \\ (1+j^2)^{738} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3j & j/3 \\ 1/3 & 1/3j^2 & 1/3j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{738} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc R qui en découle, $R = \frac{1}{3} [(2^{738} + 2) + (2^{738} - 1)X + (2^{738} - 1)X^2]$.