

1

CORRIGÉ

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + x + 1)^n} dx$ et $J_n = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{(u^2 + 1)^n}$.

1° a) Pour $x \in [0, 1]$, $(x^2 + x + 1) > 0$, $(1 - x^3) \leq 1$ donc $1 - x \leq \frac{1}{x^2 + x + 1}$. On a aussi $0 < (x + 1) \leq (x^2 + x + 1)$ donc $\frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{1 + x}$.

b) On en déduit $\int_0^1 (1 - x)^n dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^n} \leq \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x)^n}$. D'où, pour $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$.

c) On tire, pour $n \geq 2$, $\frac{n}{n+1} \leq n I_n \leq \frac{n}{n-1}$ et par le théorème des gendarmes, $\lim_n n I_n = 1$ d'où $I_n \sim \frac{1}{n}$.

2° a) Dans I_n , le changement de variable $u = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ donne, avec $du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$, $I_n = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(\frac{3}{4}u^2 + \frac{3}{4})^n} \frac{\sqrt{3}}{2} du$ donc $I_n = \frac{4^n}{3^n} \frac{\sqrt{3}}{2} J_n$.

b) $J_1 = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{(u^2 + 1)} = [\arctan u]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ donc $I_1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

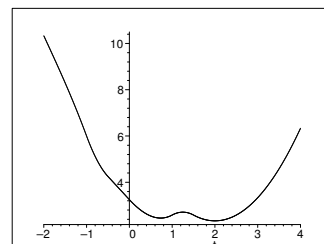
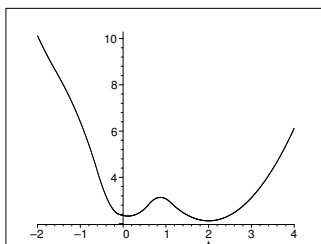
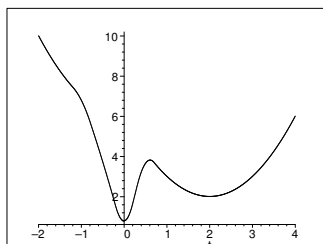
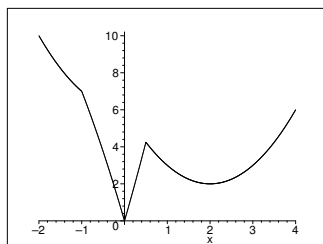
c) Par parties $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{(u^2 + 1)^2} du = \left[u \frac{-1/2}{(u^2 + 1)} \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2(u^2 + 1)} du = 0 + \frac{1}{2} J_1 = \frac{\pi}{12}$.

d) Or $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{(u^2 + 1)^2} du + J_2 = J_1$ donc $J_2 = \frac{\pi}{12}$. Donc $I_2 = \frac{\pi}{9\sqrt{3}}$.

2

CORRIGÉ

$E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $a > 0$ un réel fixé. Pour $f \in E$, $m_a(f) : \left[x \mapsto \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f \right]$ est la moyenne spatiale de paramètre a de la fonction f . Le recours à ce type de transformation a pour but de lisser la fonction étudiée : au lieu de prendre les valeurs en un point on prend des moyennes de valeurs autour de ce point. On voit ici une fonction et trois lissages correspondant à des valeurs de a de plus en plus grandes :

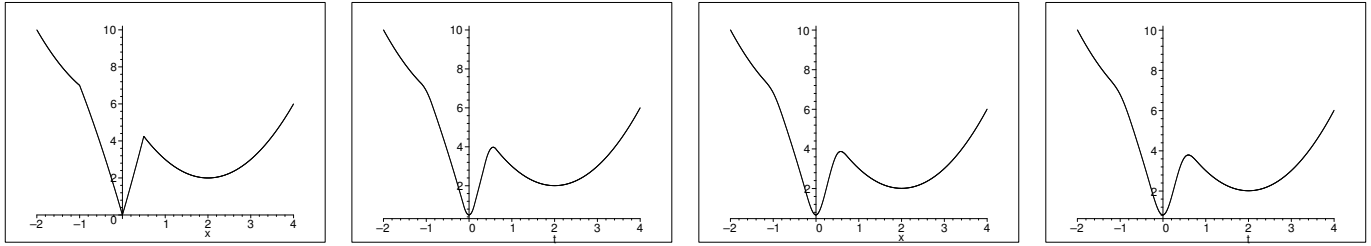


étude analytique de $m_a(f)$

1° Soit $f \in E$ quelconque. f continue sur \mathbb{R} admet sur \mathbb{R} une primitive F ; F est alors de classe C^1 sur \mathbb{R} . De plus pour tout x , $m_a(f)(x) = \frac{1}{2a} (F(x+a) - F(x-a))$. Donc $m_a(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

On a de plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $[m_a(f)]'(x) = \frac{1}{2a} (f(x+a) - f(x-a))$.

On montre par ce procédé que f de classe C^p donne $m_a(f)$ de classe C^{p+1} . On peut donc par itération faire un lissage analytique de la fonction continue pour obtenir des fonctions de classe de régularité aussi grande qu'on veut. On voit ici la même fonction que précédemment lissée plusieurs fois de suite avec la même valeur de a (ici en une fonction C^1 puis C^2 puis C^3) :



2° Soit $f \in E$ quelconque.

a) Si f est $2a$ -périodique, alors pour tout x , $f(x-a) = f(x-a+2a)$ et donc $[m_a(f)]'(x) = 0$. Ainsi $m_a(f)$ est constante sur \mathbb{R} .

b) Pour $m_a(f)$ est constante sur \mathbb{R} , $[m_a(f)]'(x) = 0$ pour tout x et donc $f(x-a) = f(x+a)$ pour tout x : $m_a(f)$ est $2a$ -périodique.

3° Soit $f \in E$ quelconque.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} [m_a(f)](-x) &= \frac{1}{2a} \int_{-x-a}^{-x+a} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x+a}^{x-a} f(-u) (-du) \text{ (changement de variable } u = -t) \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(-u) du \\ &= \begin{cases} [m_a(f)](x) & \text{si } f \text{ est paire} \\ -[m_a(f)](x) & \text{si } f \text{ est impaire} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $m_a(f)$ est de la même parité que f .

4° Comme $m_a(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , on a :

$$\begin{aligned} m_a(f) \text{ monotone} &\iff [m_a(f)]' \text{ de signe constant sur } \mathbb{R} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x-a) \text{ de signe constant} \end{aligned}$$

Si f est croissante sur \mathbb{R} , $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+a) - f(x-a) \geq 0$, ainsi $[m_a(f)]' \geq 0$ et $m_a(f)$ croissante sur \mathbb{R} ; de même si f est décroissante sur \mathbb{R} , alors $m_a(f)$ décroissante sur \mathbb{R} .

Ainsi $m_a(f)$ est de même monotonie que f .

5° On suppose qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $|x| > A$. Par continuité de f , on a d'ailleurs $f(x) = 0$ pour $|x| \geq A$.

a) $m_a(f)$ est à support borné car :

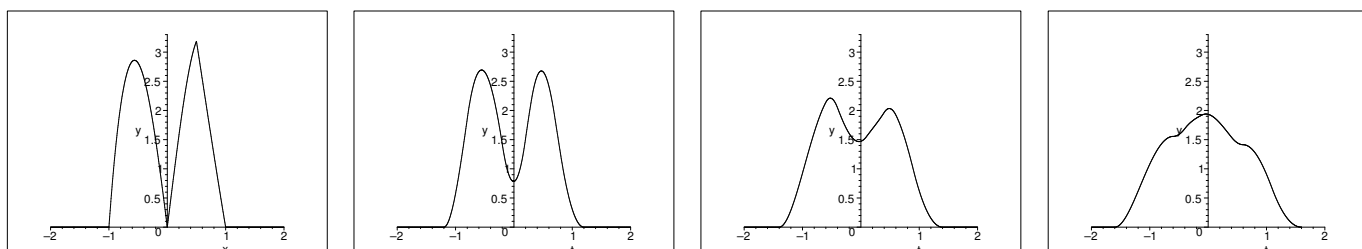
– pour $x > A+a$, on a $[x-a, x+a] \subset]A, +\infty[$, donc $[m_a(f)](x) = 0$, et

– pour $x < -A-a$, on a $[x-a, x+a] \subset]-\infty, -A[$, donc $[m_a(f)](x) = 0$, d'où $[m_a(f)](x) = 0$ pour $|x| > A+a$.

b) On intègre par parties en posant $u = m_a(f)$ et $v' = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{-A-a}^{A+a} [m_a(f)](t) dt &= [t [m_a(f)](t)]_{-A-a}^{A+a} - \int_{-A-a}^{A+a} t \frac{1}{2a} (f(t+a) - f(t-a)) dt \\ &= \frac{A+a}{2a} \left(\int_A^{A+2a} f(t) dt - \int_{-A-2a}^{-A} f(t) dt \right) + \frac{1}{2a} \left(- \int_{-A}^{A+2a} (u-a)f(u) du + \int_{-A-2a}^A (u+a)f(u) dv \right) \\ &= 0 + \frac{1}{2a} \left(- \int_{-A}^A (u-a)f(u) du + \int_{-A}^A (u+a)f(u) dv \right) \quad \text{car } f(x) = 0 \text{ pour } |x| > A \\ &= \int_{-A}^A f(u) du \end{aligned}$$

Ceci montre que la fonction à support fini f et son lissage $m_a(f)$ ont la même intégrale sur \mathbb{R} . On le voit ici pour une fonction continue à support fini et trois de ses lissages avec des valeurs de a de plus en plus grandes :



étude algébrique de m_a

6° On regarde m_a comme une application de E dans E , puisque $m_a\langle E \rangle \subset E$.

a) Pour deux éléments f et g quelconques de E et λ un réel, on a $m_a(f+g) = m_a(f) + m_a(g)$ et $m_a(\lambda.f) = \lambda.m_a(f)$ par linéarité de l'intégration. Ainsi m_a est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

b) Pour $f : \left[x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]$,

$$m_a(f) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} \cos\left(\frac{\pi t}{a}\right) dt = \left[\frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right) \right]_{x-a}^{x+a} = \frac{1}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{a} + \pi\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{a} - \pi\right) \right] = 0$$

c) $m_a(f) = 0$ si, et seulement si, f est périodique de période $2a$ et $\frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, f est périodique de période $2a$ et d'intégrale nulle sur une période.

L'exemple précédent prouve que $\text{Ker}(m_a)$ contient une fonction non nulle, donc que m_a n'est pas injectif.

d) m_a n'est pas surjectif car $\text{Im}(m_a) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \subsetneq E$.

7° Pour $p \leq n$, on note $f_p : \left[x \mapsto x^p \right]$. On a : $[m_a(f_p)](x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} t^p dt = \frac{1}{2a(p+1)} ((x+a)^{p+1} - (x-a)^{p+1})$

$m_a(f_p)$ est donc une fonction polynôme de degré au plus égal à $p+1$. Enfin le degré de $m_a(f_p)$ est au plus p puisque le coefficient de x^{p+1} est $\frac{1}{2a(p+1)}(1-1) = 0$.

On en déduit que si f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n , alors $m_a(f)$ est aussi une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n puisqu'elle est combinaison linéaire de telles fonctions.