

1 matrices

CORRIGÉ

Soit $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{R})$.

1° On pose $A = \frac{1}{3}(M - I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) On a $A^2 = -A$.

b) On a $M = I_3 + 3.A$ et l'hypothèse $M^p = I_3 + u_p.A$ amène à $M^{p+1} = I_3 + (3 - 2u_p).A$. Ainsi la suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $u_{p+1} = 3 - 2u_p$ pour tout p est telle que $\forall n, M^n = I_3 + u_n.A$.

La suite $(u_n - 1)_n$ est géométrique de raison -2 et donc $u_n = 1 - (-2)^n$ pour tout n .

c) On en déduit $M^n = I_3 + (1 - (-2)^n).A$.

On peut aussi, en utilisant que A et I_3 commutent, tirer $M^n = (3.A + I_3)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 3^k A^k = I_3 - \sum_{k=1}^n C_n^k (-3)^k A$. De plus $\sum_{k=1}^n C_n^k (-3)^k + 1 = (1 + (-3))^n$ et donc $M^n = I_3 + (1 - (-2)^n).A$.

2° On pose $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis $E = \{a.I_3 + b.J \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a) On a $J^2 = J$. J matrice de projection qui n'est pas l'identité, donc J n'est pas inversible.

b) $E = \text{Vect}(I_3, J)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. (I_3, J) est libre donc $\dim E = 2$.

c) Puisque $J^2 = J$, E est stable par produit. Il constitue donc une \mathbb{R} -algèbre.

d) $(a.I_3 + b.J) \times (a'.I_3 + b'.J) = (aa').I_3 + (ab' + ba' + bb').J$.

Les éléments inversibles de E ont forcément leur inverse dans E . Ainsi $(a.I_3 + b.J)$ est inversible si et seulement si il existe a' et

b' tels que $\begin{cases} aa' = 1 \\ ab' + ba' + bb' = 0 \end{cases}$ donc si et seulement si $a(a + b) \neq 0$.

L'inverse de $(a.I_3 + b.J)$ est alors $(\frac{1}{a}.I_3 - \frac{b}{a(a+b)}.J)$.

e) Bien sûr $M \in E$ puisque $M = -2.I_3 + 3.J$.

Alors on a $M^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-2)^{n-k} 3^k .J^k = (-2)^n .I_3 + \sum_{k=1}^n C_n^k (-2)^{n-k} 3^k .J = (-2)^n .I_3 + (1 - (-2)^n).J$, sachant que

$1 = (3 - 2)^n = (-2)^n + \sum_{k=1}^n C_n^k (-2)^{n-k} 3^k$.

3° On note φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont M est la matrice relativement à \mathcal{C} , la base canonique de \mathbb{R}^3 .

a) Les valeurs propres de φ sont les solutions de $\det(M - x.I_3) = 0$. Or $\det(M - x.I_3) = (1 - x)^2(-2 - x)$. Les valeurs propres sont donc 1 et -2 .

b) $M - I_3 = 3.A$ qui est de rang 1. Le sous-espace propre E_1 associé à la valeur 1 est de dimension 2. E_{-2} associé à la valeur propre -2 est de dimension 1 puisque -2 est racine simple. Par ailleurs, E_1 et E_{-2} sont en somme directe. Ils sont alors supplémentaires.

Ainsi il existe une base \mathcal{B} dans laquelle φ a pour matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. La base $\mathcal{B} = ((0, 1, 0), (1, 0, -1), (2, -1, -1))$ convient.

c) La matrice de passage P de \mathcal{C} à \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ d'où on tire $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) De $N = P^{-1} M P$ on tire $M^n = P N^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 + 2(-2)^n & 0 & -2 + 2(-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 0 & 2 - (-2)^n \end{pmatrix}$.

2 courbes intégrales

CORRIGÉ

On note (E) l'équation différentielle $x(2 - x)y' + (1 - x)y - 1 = 0$ et (E') son équation homogène associée.

0° On pose $\psi : [x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]$ et $\varphi : [x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]$. Il vient $\mathcal{D}_\psi = [1, +\infty[$ et $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}$.

Pour $x > 1$ $\psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. De la même façon, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

1° A tout élément x de l'intervalle $]0, 2[$ et à tout ϵ de $]0, x[$, on associe l'intégrale $F_\epsilon(x) = \int_\epsilon^x \frac{dt}{\sqrt{t(2-t)}}$

a) Avec $u = \sqrt{t/2}$ on tire $F_\epsilon(x) = \int_{\sqrt{\epsilon/2}}^{\sqrt{x/2}} \frac{4u}{\sqrt{2u}\sqrt{2-2u^2}} du = 2 \arcsin \sqrt{x/2} - 2 \arcsin \sqrt{\epsilon/2}$

Pour tout x de $]0, 2[$, $F_\epsilon(x)$ admet une limite réelle lorsque ϵ tend vers 0 : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(2-t)}} = 2 \arcsin \sqrt{x/2}$

b) Pour $x \in]0, 2[$, $\frac{x-1}{x(2-x)} = \frac{-1/2}{x} + \frac{-1/2}{x-2}$.

Alors les solutions sur l'intervalle $]0, 2[$ de (E') sont les $\left[x \mapsto \frac{k}{\sqrt{x(2-x)}} \right]$ où $k \in \mathbb{R}$.

c) La méthode de la variation de constante amène à chercher les fonctions k telles que $k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$ pour $x \in]0, 2[$.

Les solutions de (E) sur $]0, 2[$ sont donc les $\left[x \mapsto \frac{c + 2 \arcsin \sqrt{x/2}}{\sqrt{x(2-x)}} \right]$ où $c \in \mathbb{R}$.

d) La seule solution Ψ admettant une limite réelle en 0 correspond à $c = 0$.

2° A tout élément x de l'intervalle $] -\infty, 0[$ et à tout ϵ de $]x, 0[$, on associe l'intégrale $G_\epsilon(x) = \int_x^\epsilon \frac{dt}{\sqrt{t(t-2)}}$

a) Avec le changement $u = \sqrt{-t/2}$ on tire $G_\epsilon(x) = \int_{\sqrt{-x/2}}^{\sqrt{-\epsilon/2}} \frac{-4u}{\sqrt{2u}\sqrt{2+2u^2}} du = \int_{\sqrt{-x/2}}^{\sqrt{-\epsilon/2}} \frac{-2du}{\sqrt{1+u^2}}$ qui se calcule en $G_\epsilon(x) = 2 \ln(\sqrt{-x/2} + \sqrt{1-x/2}) - 2 \ln(\sqrt{-\epsilon/2} + \sqrt{1-\epsilon/2})$.

Pour tout x de $] -\infty, 0[$, $G_\epsilon(x)$ admet pour limite $G(x) = \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{t(t-2)}} = \ln(1 - x + \sqrt{x^2 - 2x})$ lorsque ϵ tend vers 0.

b) Pour $x \in]-\infty, 0[$, $\frac{x-1}{x(2-x)} = \frac{-1/2}{x} + \frac{-1/2}{x-2}$. Alors les solutions sur l'intervalle $] - \infty, 0[$ de (E') sont les $\left[x \mapsto \frac{k}{\sqrt{x(x-2)}} \right]$ où $k \in \mathbb{R}$.

La méthode de la variation de constante amène à chercher les fonctions k telles que $k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-2)}}$ pour x de $] - \infty, 0[$.

Les solutions de (E) sur $]0, 2[$ sont donc les $\left[x \mapsto \frac{c + \ln(1-x + \sqrt{x^2 - 2x})}{\sqrt{x(x-2)}} \right]$ où $c \in \mathbb{R}$.

c) La seule solution Ψ de (E) sur $] - \infty, 0[$ admettant une limite réelle en 0 correspond à $c = 0$.

3° a) On suppose qu'il existe une unique solution de (E) sur $] - \infty, 2[$ de classe C^1 , que l'on notera f .

Nécessairement $f(0) = 1$. Par ailleurs f admet un $DL_1(0)$: $f(x) = 1 + \alpha x + o(x)$. Comme f' est continue en 0, $f'(x) = \alpha + o(1)$.

Alors $x(2-x)(\alpha + o(1)) + (1-x)(1 + \alpha x + o(x)) - 1 = 0$, et donc $f'(0) = \alpha = 1/3$.

b) La restriction de f à $] - \infty, 0[$ est solution sur cet intervalle et admet une limite réelle en 0 : c'est Φ . La restriction de f à $]0, 2[$ est solution sur cet intervalle et admet une limite réelle en 0 : c'est Ψ .

c) Il reste à montrer que Φ et Ψ se raccordent en 0 en une fonction C^1 sur $] - \infty, 2[$ pour montrer que le jeu de conditions nécessaires qu'on vient de dégager est suffisant.

Or pour $x < 0$, $\Phi(x) = 1 + 1/3 x + o(x)$.

De même, pour $0 < x < 2$, $\Psi(x) = 1 + 1/3 x + o(x)$.

On a l'existence et l'unicité d'une fonction f , solution de (E) sur $] - \infty, 2[$.

F I N
