

Partie A

1° On fixe le réel x tel que $x > -1$.

a) La fonction $[t \mapsto e^{-t} t^x]$ est continue, à valeurs positives ou nulles sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de 0, on a $e^{-t} t^x \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x$. Or pour $x > -1$, le théorème de Riemann donne $[t \mapsto t^x]$ intégrable sur $]0, 1]$, donc $[t \mapsto e^{-t} t^x]$ est intégrable sur $]0, 1]$.

De plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} t^x t^2 = 0$ donc $e^{-t} t^x = o_{+\infty}(t^{-2})$. Le théorème de Riemann donne $[t \mapsto t^{-2}]$ intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $[t \mapsto e^{-t} t^x]$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, par additivité, $[t \mapsto e^{-t} t^x]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$;

$$A(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt.$$

b) La fonction $[t \mapsto e^{-t} t^x \ln(t)]$ est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs positives ou nulles sur $[1, +\infty[$ et à valeurs négatives ou nulles sur $]0, 1]$.

Au voisinage de $+\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} t^x \ln(t) t^2 = 0$ donc $e^{-t} t^x = o_{+\infty}(t^{-2})$. Le théorème de Riemann donne $[t \mapsto t^{-2}]$ intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $[t \mapsto e^{-t} t^x \ln(t)]$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Au voisinage de 0, $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} t^x |\ln(t)| t^{(1-x)/2} = 0$. Donc $e^{-t} t^x |\ln(t)| = o_0(t^{(x-1)/2})$ et $(x-1)/2 > -1$. Le théorème de Riemann donne $[t \mapsto e^{-t} t^x (-\ln(t))]$, et par suite $[t \mapsto e^{-t} t^x \ln(t)]$, sont intégrables sur $]0, 1]$.

Ainsi, par additivité, $[t \mapsto e^{-t} t^x \ln(t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$;

$$B(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \ln(t) dt.$$

2° Soit f sur $] -1, +\infty[$: $f(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$ pour tout x .

a) Pour $0 < a < b$, par intégration par parties, on a $\int_a^b e^{-t} t^{(x+1)} dt = \left[-e^{-t} t^{(x+1)} \right]_a^b + (x+1) \int_a^b e^{-t} t^x dt$. Ainsi $A(x+1) = (x+1)A(x)$ par passage à la limite.

$A(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1$. Une récurrence évidente amène à $A(n) = n!$, pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour $0 < a < b$, par intégration par parties, on a $\int_a^b e^{-t} t^{(x+1)} \ln(t) dt = \left[-e^{-t} t^{(x+1)} \ln(t) \right]_a^b + \int_a^b e^{-t} \left((x+1) t^x \ln(t) + \frac{t^{(x+1)}}{t} \right) dt$. Ainsi $B(x+1) = (x+1)B(x) + A(x)$ par passage à la limite.

c) On a donc pour tout $x > -1$, $f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1}$

3° a) Pour $t \in]0, 1]$, $e^{-t} |\ln(t)| < |\ln(t)|$.

Donc $\int_0^1 e^{-t} |\ln(t)| dt < \int_0^1 -\ln(t) dt = \left[-t \ln t + t \right]_0^1 = 1$. Ainsi $B(0) > -1$.

b) Pour $0 < a < 1$, $\int_a^1 e^{-t} \ln(t) dt = \int_{1/a}^1 e^{-1/u} (-\ln u) \frac{-du}{u^2}$. Alors

$$\begin{aligned} B(0) &= \int_0^1 e^{-t} \ln(t) dt + \int_1^{+\infty} e^{-u} \ln(u) du \\ &= \int_1^{+\infty} \left(e^{-u} - \frac{1}{u^2} e^{-1/u} \right) \ln(u) du \end{aligned}$$

c) Soit $\psi : \left[u \mapsto u - \frac{1}{u} - 2 \ln(u) \right]$. ψ dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour $u > 0$, $\psi'(u) = \left(\frac{u-1}{u} \right)^2$. ψ est donc croissante sur $]1, +\infty[$ et $\psi(1) = 0$.
On a donc $B(0) < 0$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B(n+1) = (n+1)B(n) + n!$. Ainsi $B(1) = 1 + B(0)$ et $-1 < B(0) < 0$. On a donc, par récurrence évidente, $B(n) > 0$ pour tout n de \mathbb{N}^* , et donc $f(n) > 0$.

Partie B

1° Les variations sur $]0, +\infty[$ de $g : [x \mapsto \ln(x) - x]$ ne posent pas de problème : elle admet -1 comme maximum absolu sur $]0, +\infty[$.

2° h est une fonction à valeurs réelles, continue sur $]0, +\infty[$, telle que la fonction $[u \mapsto e^{g(u)} h(u)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
On pose $0 < \alpha < 1$ et $T \geq 1$.

a) $[u \mapsto e^{Tg(u)} h(u)]$ est continue sur $[1 + \alpha, +\infty[$. Pour $u > 0$ $g(u) \leq -1$, donc $e^{(T-1)g(u)} \leq e^{(1-T)}$.
Ainsi $|e^{Tg(u)} h(u)| = e^{(T-1)g(u)} |e^{g(u)} h(u)| \leq e^{(1-T)} |e^{g(u)} h(u)|$.

Puisque la fonction $[u \mapsto |e^{g(u)} h(u)|]$ est intégrable sur $[1 + \alpha, +\infty[$, la comparaison des fonctions à valeurs positives ou nulles donne $[u \mapsto |e^{Tg(u)} h(u)|]$ aussi intégrable sur $[1 + \alpha, +\infty[$, donc $[u \mapsto e^{Tg(u)} h(u)]$.

b) Alors, avec $M = \int_1^{+\infty} e^{g(u)} |h(u)| du$,

$$\left| \int_{1+\alpha}^{+\infty} e^{Tg(u)} h(u) du \right| \leq \int_{1+\alpha}^{+\infty} e^{(T-1)g(u)} e^{g(u)} |h(u)| du \leq e^{(T-1)g(1+\alpha)} M$$

c) $[u \mapsto e^{Tg(u)} h(u)]$ est continue sur $]0, 1 - \alpha, 1]$. Pour $u > 0$ $g(u) \leq -1$, donc $e^{(T-1)g(u)} \leq e^{(1-T)}$.
Ainsi $|e^{Tg(u)} h(u)| = e^{(T-1)g(u)} |e^{g(u)} h(u)| \leq e^{(1-T)} |e^{g(u)} h(u)|$.

Puisque la fonction $[u \mapsto |e^{g(u)} h(u)|]$ est intégrable sur $]0, 1 - \alpha, 1]$, la comparaison des fonctions à valeurs positives ou nulles donne $[u \mapsto |e^{Tg(u)} h(u)|]$ aussi intégrable sur $]0, 1 - \alpha, 1]$, donc $[u \mapsto e^{Tg(u)} h(u)]$.

De plus on obtient pour les mêmes raisons avec $M' = \int_0^1 e^{g(u)} |h(u)| du$,

$$\left| \int_0^{1-\alpha} e^{Tg(u)} h(u) du \right| \leq e^{(T-1)g(1-\alpha)} M'$$

d) Soit β un réel tel que $0 < \beta < \alpha$. La fonction $[u \mapsto e^{Tg(u)}]$ est bien sûr à valeurs positives ou nulles sur $[1, 1 + \alpha]$, donc

$$\int_1^{1+\alpha} e^{Tg(u)} du \geq \int_1^{1+\beta} e^{Tg(u)} du \geq \int_1^{1+\beta} e^{Tg(1+\beta)} du = \beta \cdot e^{Tg(1+\beta)}$$

puisque g est décroissante sur $[1, 1 + \beta]$.

e) De la même façon, on trouve, pour $0 < \beta < \alpha$,

$$\int_{1-\alpha}^1 e^{Tg(u)} du \geq \beta \cdot e^{Tg(1-\beta)}$$

3° On suppose de plus que $h(1) = 0$.

a) Soit $\epsilon > 0$. Puisque h est continue en 1, il existe $\alpha > 0$ tel que $|h(u)| < \epsilon$ pour $|u - 1| < \alpha$. Alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{Tg(u)} h(u) du \right| &\leq \int_{1-\alpha}^1 e^{Tg(u)} |h(u)| du + \int_1^{1+\alpha} e^{Tg(u)} |h(u)| du \\ &\leq \epsilon \int_{1-\alpha}^1 e^{Tg(u)} du + \epsilon \int_1^{1+\alpha} e^{Tg(u)} du \\ &= \epsilon \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{Tg(u)} du \end{aligned}$$

b) Soit $\epsilon > 0$. On choisit $0 < \alpha < 1$ tel que $\left| \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{Tg(u)} h(u) du \right| \leq \epsilon \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{Tg(u)} du$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \left| \int_0^{+\infty} e^{Tg(u)} h(u) du \right| &\leq \int_0^{1-\alpha} e^{Tg(u)} |h(u)| du + \left| \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{Tg(u)} h(u) du \right| + \int_{1+\alpha}^{+\infty} e^{Tg(u)} |h(u)| du \\ &\leq M' e^{(T-1)g(1-\alpha)} + \epsilon \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{Tg(u)} du + M e^{(T-1)g(1+\alpha)} \end{aligned}$$

De plus $g(1+\alpha) < 0$ donc $\lim_{T \rightarrow +\infty} M e^{(T-1)g(1+\alpha)} = 0$. De même $\lim_{T \rightarrow +\infty} M' e^{(T-1)g(1-\alpha)} = 0$.

D'où $\int_0^{+\infty} e^{Tg(u)} h(u) du$ est négligeable devant $\int_0^{+\infty} e^{Tg(u)} du$ lorsque T tend vers $+\infty$.

4° On suppose $x > 0$. Le changement de variable $t = xu$ donne

$$A(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = \int_0^{+\infty} e^{-xu} (xu)^x du = x^x \int_0^{+\infty} e^{-xu} u^x du.$$

$$\text{De même } B(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \ln t dt = \ln x A(x) + x^x \int_0^{+\infty} e^{-xu} u^x \ln u du.$$

Ainsi $f(x) = \ln x + K(x)$ et la question précédente utilisée avec $h = \ln$ donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$$