

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**conique plane**

(5 points)

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne l'ensemble \mathcal{C} de \mathcal{P} dont l'équation dans ce repère est

$$x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0.$$

- Donner la nature de \mathcal{C} et ses éléments caractéristiques.
- En déduire l'ensemble \mathcal{D} des points $M(x, y)$ du plan vérifiant $x^3 + 3xy + y^3 = 1$. Représenter \mathcal{D} .
- Donner six couples (p, q) d'entiers solutions de l'équation $p^3 + 3pq + q^3 = 1$.

EXERCICE 2**cône et plan**

(15 points)

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On définit dans \mathcal{E} le point $S(0, 0, 2)$ et le cercle \mathcal{C} du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) de centre O et de rayon 2.

1° On appelle cône de sommet S et de base \mathcal{C} l'ensemble Γ des points de l'espace alignés avec S et un point de \mathcal{C} .

a) Caractériser (centre Ω et rayon r) la sphère Σ contenant \mathcal{C} et tangente à toutes les demi-droites $[SM]$ pour les points M de \mathcal{C} .

b) Donner une équation de Σ .

2° On définit le plan \mathcal{P} passant par $A(0, 4, -2)$ normal au vecteur $\vec{n} = \vec{j} - \vec{k}$.

a) Donner une équation cartésienne de \mathcal{P} .

b) Caractériser l'intersection \mathcal{D} de \mathcal{P} et du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .

c) Justifier que le plan \mathcal{P} est tangent à la sphère Σ .

d) Donner les coordonnées du point F d'intersection de \mathcal{P} et Σ .

3° On s'intéresse à l'intersection Π du cône Γ et du plan \mathcal{P} en tant que courbe de \mathcal{P} .

a) Pour tout point $M(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$ de \mathcal{C} , la droite (SM) coupe \mathcal{P} en N dont on donnera les coordonnées en fonction de θ .

b) Justifier que les distances de N à \mathcal{D} et à F sont égales.

c) En déduire un lien de Π avec une conique du plan \mathcal{P} dont on donnera les éléments caractéristiques (excentricité, foyer, directrice et paramètre).

4° Passage au plan \mathcal{P} .

- a) Soit le vecteur $\vec{u} = (\vec{j} + \vec{k})/\sqrt{2}$. Justifier que $\mathcal{R} = (A, \vec{i}, \vec{u})$ est un repère orthonormal de \mathcal{P} .
- b) Donner dans ce repère les coordonnées de A , de F et une équation de la droite \mathcal{D} .
- c) Donner une équation cartésienne dans \mathcal{R} de la parabole \mathcal{T} de sommet A et de foyer F .
- d) Justifier que le point N défini précédemment a dans \mathcal{R} pour coordonnées

$$\left(8 \frac{\cos \theta}{\sin \theta + 1}, 4\sqrt{2} \frac{\sin \theta - 1}{\sin \theta + 1} \right)$$

- e) Dédurre l'identité de Π et \mathcal{T} .

$F \mid N$
