

1

CORRIGÉ

c est un réel donné. On définit la suite $(U_n)_n$ par $U_0 = 0$ $U_1 = 1$ $\forall n$ $U_{n+2} = cU_{n+1} + (1-c)U_n$ puis la suite $(V_n)_n$ par $\forall n, V_n = U_{n+1} - U_n$.

a) Pour tout n on a $V_{n+1} = (c-1)V_n$ et donc la suite $(V_n)_n$ est géométrique.

b) Pour tout n on a $V_n = (c-1)^n V_0 = (c-1)^n$. Alors $U_0 = 0$ et pour tout n , $U_{n+1} = U_n + (c-1)^n$. Alors pour tout $n > 0$, $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} (c-1)^k$.

Pour $c = 2$, on a $U_n = n$ pour tout n , et pour $c \neq 2$, on a $U_n = \frac{(c-1)^n - 1}{c-2}$ pour tout n .

c) $(U_n)_n$ est convergente si et seulement si $(c-1)^n$ admet une limite réelle (avec $c \neq 2$), donc si et seulement si $|c-1| < 1$. La limite de $(U_n)_n$ est alors $\frac{-1}{c-2}$.

2

CORRIGÉ

$(u_n)_n$ est une suite bornée de réels : pour tout $n, m \leq u_n \leq M$. On définit les deux suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ par : $v_n = \max_{i \leq n} u_i$ et $w_n = \min_{i \leq n} u_i$ pour tout n .

a) Pour tout n , $v_{n+1} = \max(v_n, u_{n+1})$ et $w_{n+1} = \min(w_n, u_{n+1})$; ainsi $(v_n)_n$ est croissante, $(w_n)_n$ est décroissante.

b) $(u_n)_n$ est bornée, donc $\mathcal{U} = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Pour tout n , $v_n \in \mathcal{U}$ et $w_n \in \mathcal{U}$; ainsi $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont bornées.

c) Soit le cas particulier où, pour tout n , $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$. On a $u_0 = v_0 = w_0 = 2$, $u_1 = w_1 = -1/2$, $v_1 = 2$ et pour $n \geq 2$, $v_n = 2$, $w_{n+1} = w_n = -1 + \frac{1}{n+1}$ si n pair.

d) $\forall n, u_n = v_n$ impose $\forall n > 0, u_n \geq u_{n-1}$ donc $(u_n)_n$ croissante. Réciproquement pour $(u_n)_n$ croissante on a bien sûr $\forall n, u_n = v_n$.

On caractériserait de même $(u_n)_n$ décroissante par $\forall n, u_n = w_n$.

e) \mathcal{B} l'ensemble des suites réelles bornées. f et g sont les applications de \mathcal{B} dans \mathcal{B} qui à toute suite $(u_n)_n$ associent respectivement $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$.

Pour $(u_n)_n$ bornée, on a $(v_n)_n$ croissante; la question précédente donne donc $f \circ f = f$.

Pour $(u_n)_n$ bornée, on a $(w_n)_n$ décroissante; la question précédente donne donc $g \circ g = g$.

Ces mêmes remarques donnent que $g \circ f$ et $f \circ g$ associent toutes deux à $(u_n)_n$ la suite constante de valeur u_0 .

Soit $f : [x \mapsto e^x + x]$.

a) f est dérivable et de limites $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$; elle est donc surjective. Elle a pour dérivée $[x \mapsto e^x + 1]$; elle est strictement croissante sur \mathbb{R} donc injective. Pour $n > 0$, f prend une et une seule fois la valeur n : en x_n .

b) Pour tout n on a $n = x_n + e^{x_n}$ donc $n \leq 2e^{x_n} - 1 \leq 2e^{x_n}$.

c) Alors $x_n \geq \ln(n/2)$ et $(x_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

d) Pour tout n on a $n = x_n + e^{x_n}$ et $\lim_n x_n = +\infty$. Donc $x_n = o(e^{x_n})$ donc $n \sim e^{x_n}$ donc $x_n = o(n)$.

De $\lim_n \frac{e^{x_n}}{n} = 1$ on tire $\lim_n (x_n - \ln n) = 0$ puis $\lim_n \frac{x_n}{\ln n} = 1$ donc $x_n \sim \ln n$.

e) Puisque $\lim_n (x_n - \ln n) = 0$, on a $(e^{x_n - \ln n} - 1) \sim (x_n - \ln n)$, donc $(x_n - \ln n) \sim \frac{e^{x_n} - n}{n}$, $(x_n - \ln n) \sim \frac{-x_n}{n}$ et donc $(x_n - \ln n) \sim -\frac{\ln n}{n}$.

On rappelle le "lemme de Césaro" :

Théorème. Si $(u_n)_n$ est une suite de limite λ ($\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$), alors la suite $(v_n)_n$ admet également λ pour limite, $(v_n)_n$ étant définie

par : $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ pour tout n .

On choisit $a > 0$ et $A > 0$ et on impose $u_0 = A$ et $\forall n \begin{cases} u_{n+1} > 0 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{a^2}{u_{n+1}} \end{cases}$.

1° L'équation $\left(x - k = \frac{a^2}{x}\right)$ admet pour tout $k > 0$ deux solutions : $\frac{k + \sqrt{k^2 + 4a^2}}{2}$ (positive) et $\frac{k - \sqrt{k^2 + 4a^2}}{2}$ (négative). Ainsi une récurrence évidente donne la définition de la suite positive $(u_n)_n$ sur \mathbb{N} .

2° a) Pour tout n , $u_{n+1} = u_n + \frac{a^2}{u_{n+1}} > u_n$ donc $(u_n)_n$ est croissante. Elle admet une limite $\lambda > 0$.

b) Pour tout n , $u_{n+1} = u_n + \frac{a^2}{u_{n+1}}$ donc λ réelle impose $\lambda - \lambda = \frac{a^2}{\lambda}$ qui est contradictoire. D'où $\lambda = +\infty$.

3° On pose, pour tout n , $w_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.

a) $w_n = (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = \frac{a^2}{u_{n+1}}(u_{n+1} + u_n) = a^2 \left(2 - \frac{a^2}{u_{n+1}^2}\right)$ donc $\lim_n w_n = 2a^2$.

b) Le lemme de Césaro donne alors que la suite de terme général $v_n = \frac{(u_1^2 - u_0^2) + \dots + (u_{n+1}^2 - u_n^2)}{n}$ converge vers $2a^2$. Or $v_n = \frac{u_{n+1}^2 - u_0^2}{n}$. Ainsi $\lim_n \frac{u_n^2}{n} = 2a^2$ et $\lim_n \frac{u_n}{a\sqrt{2n}} = 1$: $u_n \sim a\sqrt{2n}$.