

**DEVOIR D'ANALYSE****Partie A**

**1° a )** Pour tout entier naturel  $n$  on a bien sûr  $f_n$  de classe  $C^\infty$ .

**b )** On a  $f'_0(x) = -2x e^{-x^2}$  et pour  $p \geq 1$ ,  $f'_p(x) = (p - 2x^2) x^{p-1} e^{-x^2}$ . D'où les tableaux des variations de  $f_0$  et de  $f_p$  pour  $p \geq 1$ .

**c )**  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $x > 0$   $f_n(x) - f_{n+1}(x) = (1 - x) x^n e^{-x^2}$  donc  $f_{n+1} \leq f_n$  sur  $[0, 1]$  et sur  $f_n \leq f_{n+1}$  sur  $[1, +\infty[$ .

**d )** Les courbes  $(C_n)$ , représentatives des  $f_n$ , ne posent pas de problème.

**2° a )** Soit  $n \geq 2$ .  $g_n : [x \mapsto f_n(x) - 1 + x]$  est continue sur  $[0, 1]$  et prend en 0 la valeur  $f_n(0) - 1 \leq 0$  et en 1 la valeur  $1/e > 0$ . Le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence d'au moins une annulation de cette fonction sur  $[0, 1]$ . Elle est aussi dérivable sur  $[0, 1]$  de dérivée  $[x \mapsto f'_n(x) + 1]$ . Elle est ainsi strictement croissante sur  $[0, 1]$  et ne s'y annule qu'une fois.

Par ailleurs  $f_n(x) - 1 + x > 0$  pour  $x > 1$ . D'où l'équation  $f_n(x) = 1 - x$  admet une solution unique dans  $[0, 1]$ . Celle-ci est notée  $x_n$ .

**b )** Pour  $n \geq 2$ ,  $g_{n+1}(x) = x.g_n(x) - (x - 1)^2$ . De  $g_n(x_n) = 0$  on tire  $g_{n+1}(x_n) \leq 0 = g_{n+1}(x_{n+1})$  donc  $x_n \leq x_{n+1}$ .

On a donc  $(x_n)_{n \geq 2}$  croissante. Elle est majorée, elle converge. Sa limite  $\ell$  vérifie  $0 < \ell \leq 1$ . Alors  $\lim_n e^{-x_n^2} = e^{-\ell^2}$  et  $\lim_n x_n^n = 0$  pour  $\ell < 1$ . Le passage à la limite dans la relation  $x_n^n e^{-x_n^2} = 1 - x_n$  n'est compatible qu'avec  $\ell = 1$ .

Ainsi la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$  converge de limite 1.

**3°** On admet que  $f_0$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**a )** Soit  $n \geq 1$ .  $f_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , à valeurs positives ou nulles. Par ailleurs  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f_n(x) = 0$  puisque  $e^{-x^2} = o_\infty(x^{-n-2})$  et donc  $f_n(x) = o_\infty(x^{-2})$ .

Ainsi  $f_n$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . On notera  $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ .

**b )** Pour  $b > 0$ , on a  $\int_0^b t^{n+2} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^b [t^{n+1}] [2t e^{-t^2}] dt = \frac{1}{2} [t^{n+1}] [-e^{-t^2}]_0^b + \frac{1}{2} \int_0^b [(n+1)t^n] [e^{-t^2}] dt$  par une intégration par parties.

Ainsi par passage à la limite, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$ .

**c )** Une récurrence facile donne alors  $I_{2q} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{q+1}} (2q-1).(2q-3) \dots 3.1 = \frac{(2q)!}{q! 2^{2q+1}} \sqrt{\pi}$  ainsi que  $I_{2q+1} = q!.I_1 = \frac{q!}{2}$

## Partie B

**1° a )** Pour  $a$  quelconque, les fonctions  $\varphi_a$  et  $\psi_a$  sont continues sur  $[0, +\infty[$ . Par ailleurs  $|\varphi_a| \leq f_0$  et  $|\psi_a| \leq f_1$ . Ayant  $f_0$  et  $f_1$  intégrables sur  $[0, +\infty[$  on déduit que les fonctions  $\varphi_a$  et  $\psi_a$  sont intégrables sur  $[0, +\infty[$ .

On notera  $F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(at) dt$  et  $G(a) = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(at) dt$ .

**b )** Pour  $b > 0$ ,  $\int_0^b t e^{-t^2} \sin(at) dt = \left[ -\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(at) \right]_0^b + \frac{1}{2} \int_0^b e^{-t^2} a \cos(at) dt$ . Par passage à la limite on a alors  $G(a) = \frac{a}{2} F(a)$ .

**2° a )** Pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $h \in \mathbb{R}$  et  $x \geq 0$ , on a

$$1. \int_a^{a+h} (a+h-u) \cos(xu) du = \left[ (a+h-u) \frac{\sin(xu)}{x} \right]_a^{a+h} + \int_a^{a+h} \frac{\sin(xu)}{x} du = -h \frac{\sin(xa)}{x} - \frac{\cos((a+h)x)}{x^2} + \frac{\cos(ax)}{x^2}$$

donc  $\cos((a+h)x) = \cos(ax) - hx \sin(ax) - x^2 \int_a^{a+h} (a+h-u) \cos(xu) du$

$$2. \left| \int_a^{a+h} (a+h-u) \cos(xu) du \right| \leq \int_a^{a+h} |(a+h-u) \cos(xu)| du \leq \int_a^{a+h} (a+h-u) du = \frac{h^2}{2} \text{ pour } h \geq 0; \text{ de même pour } h < 0.$$

$$\text{b ) On en déduit, pour } x \geq 0, |(\cos((a+h)x) - \cos(ax) + hx \sin(ax))| \leq x^2 \frac{h^2}{2}.$$

Alors pour  $b > 0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b e^{-t^2} \cos((a+h)t) dt - \int_0^b e^{-t^2} \cos(at) dt + h \int_0^b t e^{-t^2} \sin(at) dt \right| &= \int_0^b |(\cos((a+h)t) - \cos(at)) h t \sin(at)| e^{-t^2} dt \\ &\leq \int_0^b \frac{h^2 t^2}{2} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

$$\text{Donc par passage à la limite, } \left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} + G(a) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \text{ pour } h \neq 0.$$

**c )** Le passage à la limite  $h \rightarrow 0$  dans l'inégalité précédente donne  $F$  dérivable en  $a$  de nombre dérivé  $-G(a)$ . Ainsi  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $F' = -G$  sur  $\mathbb{R}$ .

**3°** Soit la fonction  $H$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $H(a) = e^{a^2/4} F(a)$ .

$H$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée telle que  $H'(a) = \frac{a}{2} e^{a^2/4} F(a) + e^{a^2/4} F'(a) = e^{a^2/4} G(a) + e^{a^2/4} F'(a) = 0$  pour tout réel  $a$ .

Ainsi  $H$  est constante sur  $\mathbb{R}$ . On a  $H(0) = F(0) = I_0$  donc  $F(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/4}$  et  $G(a) = \frac{a\sqrt{\pi}}{4} e^{-a^2/4}$  pour tout  $a$ .

# DEVOIR D'ALGÈBRE

## Partie A

**1° a)** 1ère méthode  $A(0) = 0$  donc  $X \mid A$ . On a donc  $A = XB$  avec  $B$  de degré  $2n - 1$ , de coefficient dominant  $C_{2n}^{2n} = 1$  (celui de  $A$ ) et de terme constant  $b_0 = B(0) = A'(0) = 2n$ .

**b)** 2ème méthode On a  $A = (X + 1 - 1)[(X + 1)^{2n-1} + (X + 1)^{2n-2} + \dots + (X + 1) + 1]$ . Ainsi  $A = XB$  avec  $B$  de degré  $2n - 1$ , de coefficient dominant 1 (celui de  $(X + 1)^{2n-1}$ ) et de terme constant  $b_0 = 2n$  (somme des termes constants des  $(X + 1)^k$  entre crochets).

**c)** 3ème méthode D'après la formule du binôme de Newton, on a  $A = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k X^k - 1 = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k X^k = XB$  avec

$B = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k X^{k-1}$ . Le polynôme  $B$  est de degré  $2n - 1$ , son coefficient dominant est  $C_{2n}^{2n} = 1$  et son terme constant  $b_0$  vaut  $C_{2n}^1 = 2n$ .

**2°**  $z$  est racine de  $A$  si et seulement si  $(z + 1)^{2n} = 1$  ce qui équivaut à  $z + 1 = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)$  où  $k$  est un entier compris entre 1 et  $2n - 1$ .

Donc les racines de  $A$  sont  $z_0 = 0$  et  $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) - 1$  avec  $k$  est un entier compris entre 0 et  $2n - 1$ .

Remarquons que pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $2n - 1$  :

$$z_k = \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) \left( \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right) \right) = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)$$

**3°** Faisons dans  $P_n$  le changement d'indice  $l = 2n - k$ . Alors, puisque  $\sin(\pi - x) = \sin x$  pour tout  $x$  :

$$P_n = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-l)\pi}{2n}\right) = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{l\pi}{2n}\right) = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{l\pi}{2n}\right)$$

On en déduit que  $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n^2$ .

De plus, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $2n - 1$ ,  $\frac{k\pi}{2n}$  appartient à  $[0, \pi]$  donc  $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \geq 0$  ce qui implique que  $P_n$  et  $Q_n$  sont positifs. Par conséquent,  $P_n = \sqrt{Q_n}$ .

**4°**  $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$  est le produit des racines du polynôme  $B$ . D'après les relations coefficients racines, ce produit vaut  $(-1)^{2n-1} b_0$ .

Donc  $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n$ . D'autre part, d'après l'expression des  $z_k$  donnée au 2. :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n-1} z_k &= (2i)^{2n-1} \times Q_n \prod_{k=1}^{2n-1} \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) = \frac{2^{2n-1}(-1)^n Q_n}{i} \exp\left(\frac{i\pi}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} k\right) \\ &= \frac{2^{2n-1}(-1)^n Q_n}{i} \exp\left(i\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -2^{2n-1} Q_n \end{aligned}$$

En égalant les deux résultats, on trouve  $Q_n = \frac{4n}{2^{2n}}$  et  $P_n = \sqrt{Q_n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ .

**5°** La fraction  $F = \frac{1}{A}$  admet  $z_0, \dots, z_{2n-1}$  comme pôles simples. On a donc  $F = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\alpha_k}{X - z_k}$  avec  $\alpha_k = \frac{1}{A'(z_k)}$ .

Or  $A'(z_k) = 2n(z_k + 1)^{2n-1} = 2n \frac{(z_k + 1)^{2n}}{z_k + 1} = 2n \frac{1}{z_k + 1}$  car  $z_k$  est racine de  $A$ . Finalement,  $F = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1 + z_k}{X - z_k}$ .

## Partie B

**1°** Soit  $f = k.id_E$  ( $k \neq 0$ ) une homothétie vectorielle de rapport  $k$  où  $k$  est un nombre complexe.

On a  $(f + id_E)^{2n} - id_E = A(k).id_E$ .

Donc  $f$  est solution de l'équation proposée si et seulement si  $k$  est racine non nulle de  $A$ .

**2°** En utilisant le binôme de Newton, on a  $2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k$  et  $0 = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k$ .

Or tout entier  $k$  compris entre 0 et  $2n$  est soit pair, de la forme  $2l$  où  $l$  est un entier compris entre 0 et  $n$ , soit impair, de la forme  $2l + 1$  où  $l$  est un entier compris entre 0 et  $n - 1$ . En séparant dans les deux sommes précédentes les entiers pairs des entiers impairs, on a  $2^{2n} = S + S'$  et  $0 = S - S'$ , ce qui donne  $S = S' = 2^{2n-1}$ .

**3°** Soit  $s$  une symétrie.  $s$  et  $id_E$  commutent dans  $\mathcal{L}(E)$  donc  $(s + id_E)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k s^k$ .

Or  $s^k = id_E$  si  $k$  est pair et  $s^k = s$  si  $k$  est impair car  $s \circ s = id_E$ .

On obtient  $(s + id_E)^{2n} - id_E = (S - 1).id_E + S'.s = (2^{2n-1} - 1).id_E + 2^{2n-1}.s$ .

Ainsi, si  $s$  est une symétrie solution du problème posé,  $s = \frac{1 - 2^{2n-1}}{2^{2n-1}}.id_E$  qui n'est pas une symétrie.

Il n'y a donc pas de symétrie solution du problème posé.

## Partie C

**1° a)** Notons  $C = M_{0,1}$ . Alors  $C$  et  $I_3$  appartiennent à  $G$  et  $G = \{aI_3 + bC, (a, b) \in \mathbb{C}^2\} = \text{Vect}(I_3, C)$ .

Donc  $G$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  dont  $(I_3, C)$  est une famille génératrice.

Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux complexes tels que  $\lambda I_3 + \mu C = O_3$  alors  $M_{\lambda, \mu} = O_3$  donc  $\lambda = \mu = 0$ . La famille  $(I_3, C)$  est libre.

$G$  est donc un sous vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  de dimension 2 dont  $(I_3, C)$  est une base.

**b)** Soit  $M_{a,b}$  et  $M_{a',b'}$  deux éléments de  $G$ . Alors  $M_{a,b}M_{a',b'} = aa'I_3 + (ab' + ba')C + bb'C^2$ . Or  $C^2 = 2I_3 + C$  donc  $C^2$  appartient à  $G$  et  $M_{a,b}M_{a',b'}$  aussi.

**2° a)** Soit  $E_1 = \text{Ker}(u - (a + 2b)id_E)$ . On a, puisque  $b \neq 0$  :  $(x, y, z) \in E_1$  si et seulement si  $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$  donc si

et seulement si  $x = y = z$ . Ainsi  $E_1 = \text{Vect}(e'_1)$  avec  $e'_1 = (1, 1, 1)$ .

**b)** Soit  $E_2 = \text{Ker}(u - (a - b)id_E)$ . On a, puisque  $b \neq 0$  :  $(x, y, z) \in E_2 \iff x + y + z = 0$ . Donc  $E_2 = \text{Vect}(e'_2, e'_3)$  avec  $e'_2 = (1, -1, 0)$  et  $e'_3 = (1, 0, -1)$ . De plus  $(e'_2, e'_3)$  est libre donc c'est une base de  $E_2$ .

**c)** On a  $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 3 = \dim(\mathbb{C}^3)$  et  $E_1 \cap E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x = y = z \text{ et } x + y + z = 0\} = \{0_{\mathbb{C}^3}\}$ . Donc  $\mathbb{C}^3 = E_1 \oplus E_2$ . Puisque  $e'_1$  est une base de  $E_1$  et  $(e'_2, e'_3)$  est une base de  $E_2$ ,  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $\mathbb{C}^3$ .

**3° a)** Comme  $u(e'_1) = (a + 2b).e'_1$ ,  $u(e'_2) = (a - b).e'_2$  et  $u(e'_3) = (a - b).e'_3$ , la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est  $D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$ .

**b)**  $D$  est diagonale donc  $u$  est diagonalisable. Ses valeurs propres sont ainsi  $(a + 2b)$  et  $(a - b)$ .

**4° a)** On a  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .  $P$  est donc inversible et  $P^{-1}$  est la matrice de passage de

$\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ . L'inversion du système  $\diamond$  par pivot de Gauss donne  $P^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  car

$$\diamond \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \\ e'_3 = e_1 - e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3.e_1 = e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ 3.e_2 = e'_1 - 2.e'_2 + e'_3 \\ 3.e_3 = e'_1 + e'_2 - 2.e'_3 \end{cases}$$

**b )** D'après la formule de changement de base  $D = P^{-1} \times M \times P$  donc  $M = P \times D \times P^{-1}$ .

**5° a )** Si  $N$  est une matrice  $3 \times 3$ , on peut démontrer par récurrence sur l'entier  $n$  que  $(PNP^{-1})^n = PN^n P^{-1}$ . Alors :

$$\begin{aligned} (M + I_3)^n - I_3 &= (PDP^{-1} + I_3)^n - I_3 = (P(D + I_3)P^{-1})^n - I_3 \\ &= P(D + I_3)^n P^{-1} - I_3 = P((D + I_3)^n - I_3)P^{-1} \end{aligned}$$

D'autre part, comme  $P$  est inversible,  $PNP^{-1} = O_3$  équivaut à  $N = O_3$ . Donc, d'après le calcul précédent :

$$(M + I_3)^n - I_3 = O_3 \iff (D + I_3)^n - I_3 = O_3$$

**b )** Avec la matrice  $D$  précédente,  $(D + I_3)^n - I_3 = \begin{pmatrix} A(a + 2b) & 0 & 0 \\ 0 & A(a - b) & 0 \\ 0 & 0 & A(a - b) \end{pmatrix}$ .

Par suite,  $D$  est solution de  $(*)$  si et seulement si  $a + 2b$  et  $a - b$  sont racines de  $A$ . De plus, comme  $b \neq 0$ ,  $D$  est solution de  $(*)$  si et seulement si il existe deux entiers  $p$  et  $q$  distincts compris entre 0 et  $2n - 1$  tels que  $a + 2b = z_p$  et  $a - b = z_q$ .

Ainsi  $D$  est solution de  $(*)$  si et seulement si il existe deux entiers  $p$  et  $q$  distincts compris entre 0 et  $2n - 1$  tels que  $a = \frac{z_p + 2z_q}{3}$  et  $b = \frac{z_p - z_q}{3}$ .

**c )** Or les matrices  $M_{a,0}$  solutions de  $(*)$  sont les matrices  $M_{z_p,0}$  où  $p$  est un entier compris entre 0 et  $2n - 1$ .

D'après la question précédente, les matrices  $M_{a,b}$  avec  $b \neq 0$  solutions de  $(*)$  sont ainsi les matrices  $M_{a,b}$  avec  $a = \frac{z_p + 2z_q}{3}$  et  $b = \frac{z_p - z_q}{3}$  où  $p$  et  $q$  sont deux entiers distincts compris entre 0 et  $2n - 1$ .