

Soit la fonction de la variable réelle :

$$F : \quad x \longmapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

1° Préliminaire. Soit $\varphi : \left[x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt \right]$.

La fonction $f : \left[x \mapsto e^{x^2} \right]$ est définie et continue (même de classe C^∞) sur \mathbb{R} . La fonction φ , fonction intégrale de f , est donc définie sur \mathbb{R} et c'est une primitive de f sur \mathbb{R} (elle est donc elle aussi de classe C^∞ sur \mathbb{R}).

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = f(x) = e^{x^2}$.

2° Généralités sur F .

a) f est à valeurs non nulles sur \mathbb{R} et $F = \frac{\varphi}{f}$ donc $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}, \varphi(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt = \int_0^x (-1) e^{(-t)^2} dt = - \int_0^x e^{t^2} dt = -\varphi(x)$ par le changement de variable $[t \mapsto -t]$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, F(-x) = -F(x)$. F est impaire.

b) f est à valeurs positives sur \mathbb{R} donc l'intégrale de f sur tout segment est positive.

Ainsi pour $x > 0$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt > 0$. F impaire donc pour $x < 0, F(x) < 0$. De plus $F(0) = 0$.

c) Soit $x > 0$. Sur $[0, x]$, f est croissante donc $f(0) \leq f(t) \leq f(x)$ pour $t \in [0, x]$. L'inégalité de la moyenne donne donc

$$x \cdot f(0) \leq \int_0^x f(t) dt \leq x \cdot f(x)$$

d'où $\forall x > 0, x \cdot e^{-x^2} \leq F(x) \leq x$

3° Etude locale en $+\infty$.

a) Par deux intégrations par parties, on obtient pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \int_1^x e^{t^2} \frac{1}{t^4} dt &= \left[\frac{3}{4} e^{t^2} \frac{-1}{3t^3} \right]_1^x - \int_1^x \frac{3}{4} 2t e^{t^2} \frac{-1}{3t^3} dt \\ &= \left(-\frac{e^{x^2}}{4x^3} + \frac{e}{4} \right) + \int_1^x e^{t^2} \frac{1}{2t^2} dt \\ &= \left(-\frac{e^{x^2}}{4x^3} + \frac{e}{4} \right) + \left[e^{t^2} \frac{-1}{2t} \right]_1^x - \int_1^x 2te^{t^2} \frac{-1}{2t} dt \\ &= \left(-\frac{e^{x^2}}{4x^3} + \frac{e}{4} \right) + \left(-\frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e}{2} \right) + \int_1^x e^{t^2} dt \end{aligned}$$

D'où $\int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$

b) La fonction $h : \left[t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^2} \right]$ est de classe C^∞ sur $[1, +\infty[$. Pour $t \geq 1, h'(t) = \frac{2(t^2 - 1)}{t^3} e^{t^2} \geq 0$. Ainsi, h est croissante sur $[1, +\infty[$.

c) On a donc, pour $x > 1$ et $t \in [1, x]$ $\frac{1}{t^2}h(t) \leq \frac{1}{t^2}h(x)$.

Le théorème de comparaison donne ainsi $0 \leq \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \frac{x-1}{x}h(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} \frac{2(x-1)}{x^2}$

d) De $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-1)}{x^2} = 0$ on tire $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

e) La relation $\int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$ avec $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ $\frac{e^{x^2}}{4x^3} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ et $\frac{3e}{4} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ donne $\int_1^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$

f) D'où $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

4° Variations de F .

a) Il a été établi que f et φ sont de classe C^1 sur \mathbb{R} donc F est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

b) Pour $x \in \mathbb{R}$ $F'(x) = -2x e^{-x^2} \varphi(x) + e^{-x^2} \varphi(x) = -2x F(x) + e^{-x^2} e^{x^2} = 1 - 2x F(x)$.

F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et pour tout x , $1 = F'(x) + 2x F(x)$ donc F est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

c) F est continue sur $[0, +\infty[$ donc le théorème des valeurs intermédiaires donne que l'image de cet intervalle par F est un intervalle. On choisit $\alpha > 0$; on a $F(\alpha) > 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ donc il existe $A > 0$ tel que $0 < F < F(\alpha)$ sur $]A, +\infty[$. Le théorème de Heine donne que l'image de $[0, A]$ par F est un segment. Avec $F(0) = 0$, on a $F([0, A]) = [0, m]$ avec $F(\alpha) \leq m$. Donc $F([0, +\infty[) = [0, m]$.

F admet donc un maximum en un point a de $]0, +\infty[$.

d) F dérivable sur $[0, +\infty[$ et admet un extremum en $a > 0$, donc $F'(a) = 0$; donc $2a F(a) = 1$, i.e. $F(a) = \frac{1}{2a}$

e) Les conditions précédentes se retrouvent en tout extremum de F sur $]0, +\infty[$.

$0 = F(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $F(x) > 0$ pour $x > 0$ donne que le nombre d'extrema de F sur $]0, +\infty[$ est impair, deux maxima encadrant un minimum. La présence d'un deuxième extremum est donc en contradiction avec les valeurs strictement décroissantes des extrema.

f) D'où

x	0	a	$+\infty$
F	0	$F(a)$	0

F I N