

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**EXERCICE 1****diamètre de parties**

( 3 points)

$X$  est une partie non vide bornée de  $\mathbb{R}$ . On pose  $D = \{ |x - y| \mid x \in X, y \in X \}$ .

- a )** Justifier que  $D$  admet une borne supérieure. On la notera  $\delta(X)$  (qu'on nomme le diamètre de  $X$ ).
- b )** Comparer  $\delta(X)$  avec  $(\sup X - \inf X)$ .

**EXERCICE 2****analogie algébrique**

( 4 points)

$E$  est un ensemble non vide et  $\mathcal{P}(E)$  est l'ensemble de ses parties. On rappelle qu'on note  $A \cap B$  l'intersection,  $A \cup B$  l'union et  $A \triangle B$  la différence symétrique de deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$ .

- a )** Dans l'étude des réels, on a trouvé que la multiplication,  $\times$ , était commutative parce que  $x \times y = y \times x$  pour tous réels  $x$  et  $y$ . Diriez-vous que  $\cap$  est une opération commutative de  $\mathcal{P}(E)$  ?
- b )** Dans l'étude des réels, on a trouvé que l'addition,  $+$ , était associative parce que  $x + (y + z) = (x + y) + z$  pour tous réels  $x, y$  et  $z$ . Diriez-vous que  $\triangle$  est une opération associative de  $\mathcal{P}(E)$  ?
- c )** Dans l'étude des réels, on a trouvé que la multiplication,  $\times$ , était distributive par rapport à l'addition  $+$  parce que  $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$  pour tous réels  $x, y$  et  $z$ . Diriez-vous que  $\cap$  est une opération distributive par rapport à  $\triangle$  dans  $\mathcal{P}(E)$  ?

**EXERCICE 3****convergences**

( 6 points)

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par son premier terme  $u_0$  et la relation :  $\forall n \ u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ .

- a )** Démontrer que la suite  $(u_n)_n$  est monotone.
- b )** Démontrer que si  $(u_n)_n$  converge, alors  $\lim_n u_n = 0$ .

c ) Démontrer que dans le cas  $u_0^2 + u_0 > 0$  la suite  $(u_n)_n$  diverge.

d ) Dans le cas  $-1 < u_0 < 0$ , établir  $-1 < u_n < 0$  pour tout  $n$ .

Conclure quant à la convergence de la suite dans ce cas.

---

## EXERCICE 4

## chasse au sup

( 7 points)

$X$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée. On choisit un élément  $y_0$  de  $X$  et un réel  $\mu_0$  majorant de  $X$ . On construit par récurrence les suites  $(y_n)_n$  et  $(\mu_n)_n$  par :

$$\text{si } \frac{y_n + \mu_n}{2} \text{ est majorant de } X \text{ alors on pose } \begin{cases} y_{n+1} = y_n \\ \mu_{n+1} = \frac{y_n + \mu_n}{2} \end{cases} \text{ sinon on pose } \begin{cases} y_{n+1} = \frac{y_n + \mu_n}{2} \\ \mu_{n+1} = \mu_n \end{cases}$$

a ) Dans cette seule question on prend  $X = [0, 1[ \cup ]3, 4[$ ,  $y_0 = 0$  et  $\mu_0 = 5$ . Donner les valeurs de  $(y_n, \mu_n)$  pour  $1 \leq n \leq 4$ .

b ) Dans le cas général désormais, montrer  $y_n \leq \mu_n$  pour tout  $n$ .

c ) Justifier que les suites  $(y_n)_n$  et  $(\mu_n)_n$  sont adjacentes. On notera  $s$  leur limite commune.

d ) Montrer que  $s$  est un majorant de  $X$ .

e ) Établir l'existence d'une suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $s$ .

f ) Prouver que  $s$  est la borne supérieure de  $X$ .

---

F I N

---