

# I.S.E.P.

CYCLE PRÉPARATOIRE

MATH.SUP. 2

2001 - 2002

Devoir 07

## MATHÉMATIQUES

8 avril 2002

durée 3 heures 30

calculatrice non autorisée

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

### EXERCICE 1

### coefficients perdus

( 3 points)

$\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ . Un endomorphisme  $\psi$  de  $E$  a pour matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & c \\ 1 & -2 & d \\ a & b & e \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Retrouver les coefficients  $a, b, c, d, e$  de sorte que les conditions suivantes soient toutes les deux vérifiées :

- $\text{Ker}(\psi)$  est engendré par  $(u_1 + 2u_2 + 3u_3)$ ,
- $(u_2 - 3u_3, 3u_1 - 5u_3)$  est une famille libre de  $\text{Im}(\psi)$ .

### EXERCICE 2

### intégrabilités

( 6 points)

1°  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres réels positifs ; pour  $a$  et  $b$  dans  $[0, \pi]$  on note  $I(a, b) = \int_a^b \frac{dt}{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 t}$ .

a ) Faire dans  $I(a, b)$  le changement de variable  $x = \tan t$  si c'est possible. Ecrire l'intégrale obtenue. Quelle est sa valeur ?

b ) En déduire la valeur de  $\int_0^\pi \frac{dt}{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 t}$ .

2° On choisit  $\gamma$  et  $\delta$  deux réels, et on définit la suite  $(u_n)_n$  de terme général  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^\gamma}{1 + t^\delta \sin^2 t} dt$ .

a ) Justifier, grâce à un encadrement,  $u_n \sim n^\gamma \pi^\gamma \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\delta \sin^2 t}$ .

b ) Suivant que  $\delta > 0$ ,  $\delta = 0$  ou  $\delta < 0$ , donner un équivalent de  $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\delta \sin^2 t}$ .

c ) Déduire de ce qui précède l'ensemble des couples  $(\gamma, \delta)$  tels que la fonction  $\left[ x \mapsto \frac{x^\gamma}{1 + x^\delta \sin^2 x} \right]$  soit intégrable sur  $[\pi, +\infty[$ .

### EXERCICE 3

### matrices exponentielles

( 11 points)

Pour  $M$  une matrice carrée à coefficients réels, on peut définir la suite de matrices  $(S_n)_n$  par son terme général  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k$ . Lorsque la suite  $(S_n)_n$  converge (i.e. chaque coefficient est une suite de réels convergente) on appelle sa limite l'exponentielle de  $M$  et on note  $e^M = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k$ .

1° Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

a ) Calculer  $A^2$ ,  $A^3$ , puis  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

b ) Montrer que  $A$  admet une exponentielle dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et donner la matrice  $e^A$ .

c ) Justifier que la matrice  $e^A$  est inversible. Son inverse est-elle  $e^{-A}$  ?

2° Plus généralement, dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  on dit qu'une matrice  $N$  est nilpotente si et seulement si il existe un entier  $r \geq 1$  tel que  $N^r = 0$ .

a ) Prouver que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes qui commutent est une matrice nilpotente.

b ) Justifier qu'une matrice nilpotente  $N$  admet à coup sûr une exponentielle.

c ) Lorsque deux matrices  $N$  et  $M$  sont nilpotentes, a-t-on  $e^{(M+N)} = e^M \times e^N$  ?

d ) Pour  $t \in \mathbb{R}$ , soit  $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

i/ Trouver  $N$  nilpotente telle que :  $\forall t \ M(t) = \exp(t.N)$ .

ii/ Montrer que  $\{M(t) / t \in \mathbb{R}\}$  est un sous-groupe de  $GL(3, \mathbb{R})$ .

3° Soit  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

a ) Donner  $B^2$ ,  $B^3$  puis  $B^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

b ) Montrer que  $B$  admet une exponentielle dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et donner la matrice  $e^B$ .

4° Soient  $C = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$  et  $\psi$  l'endomorphisme de  $E$ ,  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2, qui admet  $C$  pour matrice dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  de  $E$ .

a ) Trouver les valeurs propres de  $\psi$ .

b ) Vérifier que  $g_1 = 4.e_1 + 3.e_2$  est vecteur propre de  $\psi$ .

c ) Trouver un vecteur propre  $g_2$  tel que la famille  $\mathcal{C} = (g_1, g_2)$  soit une base de  $E$ .

d ) Donner la matrice de  $\psi$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

e ) En déduire la valeur de  $C^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

f ) Montrer que  $C$  admet une exponentielle et donner  $e^C$ .

F I N