

## 1 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DEUXIÈME ORDRE, COEFFICIENT VARIABLE

CORRIGÉ

$\mathcal{S}$  désigne l'ensemble des solutions sur  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[$  de l'équation (e) :  $y'' - y' \tan x + 2y = 0$ .

1° a)  $\frac{1}{X^2(1-X^2)} = \frac{1}{X^2} + \frac{1/2}{1-X} + \frac{1/2}{1+X}$ .

b) Soit  $a \in I$ . Le changement de variable ( $u = \sin t$ ) donne

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{dt}{\sin^2 t \cos t} &= \int_a^x \frac{\cos t dt}{\sin^2 t (1 - \sin^2 t)} = \int_{\sin a}^{\sin x} \frac{du}{u^2 (1 - u^2)} \\ &= \left[ -\frac{1}{u} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+u}{1-u} \right) \right]_{\sin a}^{\sin x} = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right) + c \end{aligned}$$

Donc les primitives sur  $I$  de  $\left[ x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x \cos x} \right]$  sont les  $\left[ x \mapsto -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right) + c \right]$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

2° a)  $\sin' = \cos$  et  $\sin'' = -\sin$ . Donc sur  $I$ ,  $\sin'' - \sin' \tan + 2 \sin = 0$  :  $\sin$  appartient à  $\mathcal{S}$ .

L'équation (e) est linéaire homogène, son ensemble des solutions est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Donc pour tout  $k$  réel,  $k \cdot \sin \in \mathcal{S}$ .

b)  $\sin$  ne s'annule pas sur  $I$ . Pour  $f$  de classe  $C^2$  sur  $I$  on définit  $g$  sur  $I$  par  $g = \frac{f}{\sin}$ . Puisque  $\sin$  est  $C^\infty$  sur  $I$ , on a  $g$  de classe  $C^2$  sur  $I$ .

Ainsi toute fonction  $f$  de classe  $C^2$  sur  $I$  peut s'écrire  $f = g \times \sin$  où  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $I$ .

c) Avec ( $f = g \times \sin$ ), on a ( $f' = g' \times \sin + g \times \cos$ ) puis ( $f'' = g'' \times \sin + 2g' \times \cos - g \times \sin$ ). D'où  $f$  est solution de (e) sur  $I$  si et seulement si  $g$  est solution sur  $I$  de (E) :  $y'' \sin x + y' (2 \cos x - \tan x \sin x) = 0$ .

3°  $g$  est solution de (E) sur  $I$  si et seulement si  $g'$  est solution sur  $I$  de (E') :  $y' \sin x + y (2 \cos x - \tan x \sin x) = 0$ . Celle-ci est linéaire homogène du premier ordre, ses solutions sont directement les  $\left[ x \mapsto \frac{k}{\sin^2 x \cos x} \right]$  où  $k \in \mathbb{R}$ .

On déduit que les solutions de (E) sur  $I$  sont les  $\left[ x \mapsto k \left( -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right) \right) + c \right]$  où  $k \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

On déduit que les solutions de (e) sur  $I$  sont les  $\left[ x \mapsto k \left( \frac{\sin x}{2} \ln \left( \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right) - 1 \right) + c \sin x \right]$  où  $k \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

## 2 FAMILLES D'INTÉGRALES

CORRIGÉ

1° Pour tout  $n$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ,  $u'_n = u_{2n}$ ,  $u''_n = u_{2n-1}$ .

a)  $u'_1 = \frac{1}{2}$ ,  $u'_2 = \frac{7}{12}$ ,  $u'_3 = \frac{37}{60}$ ,  $u''_1 = 1$ ,  $u''_2 = \frac{5}{6}$ ,  $u''_3 = \frac{47}{60}$ .

b) Pour tout  $n$ ,  $u'_{n+1} - u'_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$ ;  $u''_{n+1} - u''_n = u_{2n+1} - u_{2n-1} = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} < 0$ ;  
 $u'_n - u''_n = u_{2n} - u_{2n-1} = -\frac{1}{2n} \longrightarrow 0$ .

Ainsi  $(u'_n)_n$  et  $(u''_n)_n$  sont adjacentes.

c)  $(u'_n)_n$  et  $(u''_n)_n$  sont adjacentes, elles convergent et ont même limite  $\ell$ . Ainsi  $\lim_n u_{2n} = \lim_n u_{2n+1} = \ell$ . Donc  $(u_n)_n$  converge vers  $\ell$ .

2° Pour la suite  $(v_n)_n$  définie pour  $n \geq 1$  par  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$  la démarche peut être la même : on pose  $v'_n = v_{2n}$  et  $v''_n = v_{2n-1}$  pour tout  $n$ , on obtient  $(v'_n)_n$  et  $(v''_n)_n$  adjacentes.

On déduit de la même façon la convergence de  $(v_n)_n$ . Soit  $\lambda$  sa limite.

3° On considère, pour tout  $p \geq 0$  les intégrales  $I_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2} dx$ .

$$a) \quad I_0 = \left[ \arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \text{ et } I_1 = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$b) \quad I_p + I_{p+2} = \int_0^1 \frac{x^p + x^{p+2}}{1+x^2} dx = \frac{1}{p+1}.$$

$$\text{Ainsi } I_2 = 1 - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4} \text{ et } I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$c) \quad \text{Pour } p \text{ quelconque, on a } 0 \leq I_p \leq \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \text{ donc } \lim_p I_p = 0.$$

4° a) Nous avons  $u_1 + 2I_3 = \ln 2$ . En supposant  $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2$  on déduit

$$u_{q+1} + 2(-1)^{q+1} I_{2(q+1)+1} = u_q + \frac{(-1)^{q+2}}{q+1} + 2(-1)^{q+1} \left( \frac{1}{2q+2} - I_{2q+1} \right) = u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2.$$

Le théorème de récurrence donne bien  $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2$  pour tout  $q \geq 1$ .

De même  $v_1 - I_2 = \frac{\pi}{4}$ . En supposant  $v_q + (-1)^q I_{2q} = \frac{\pi}{4}$  on déduit

$$v_{q+1} + (-1)^{q+1} I_{2(q+1)} = v_q + \frac{(-1)^{q+2}}{2q+1} + (-1)^{q+1} \left( \frac{1}{2q+1} - I_{2q} \right) = v_q + (-1)^q I_{2q} = \frac{\pi}{4}.$$

Le théorème de récurrence donne bien  $v_q + (-1)^q I_{2q} = \frac{\pi}{4}$  pour tout  $q \geq 1$ .

b) Puisque  $\lim_q I_{2q} = \lim_q I_{2q+1} = 0$  on déduit  $\ell = \lim_n u_n = \ln 2$  et  $\lambda = \lim_n v_n = \frac{\pi}{4}$ .

5° Pour tout  $p$  on a  $p I_p = \left[ \frac{p}{p+1} \frac{x^{p+1}}{x^2+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{p}{p+1} x^{p+1} \frac{-2x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{p}{2(p+1)} + \int_0^1 \frac{2x^{p+1}}{(x^2+1)^2} dx$ .

$$\text{Or } 0 \leq \int_0^1 \frac{2x^{p+1}}{(x^2+1)^2} dx \leq \int_0^1 2x^{p+1} dx = \frac{2}{p+2} \text{ donc } \lim_p (p I_p) = \frac{1}{2}.$$

6° Soit  $J_{p,q} = \int_0^1 \frac{x^p}{(1+x^2)^q} dx$ .

$$a) \quad J_{1,1} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = I_1 = \frac{\ln 2}{2}. \text{ Pour } q \geq 2, \text{ on a } J_{1,q} = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^q} dx = \left[ \frac{-1}{2(q-1)} \frac{1}{(1+x^2)^{q-1}} \right]_0^1 = \frac{1}{2q-2} \left( 1 - \frac{1}{2^{q-1}} \right).$$

b)  $J_{0,1} = I_0 = \frac{\pi}{4}$ . Puis en intégrant par parties :

$$J_{0,1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[ \frac{x}{1+x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{2(1+x^2) - 2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} + 2 J_{0,1} - 2 J_{0,2}$$

D'où  $J_{0,2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$ . Puis en intégrant par parties :

$$J_{0,2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \left[ \frac{x}{(1+x^2)^2} \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{-4x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{4} + \int_0^1 \frac{4(1+x^2) - 4}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{4} + 4 J_{0,2} - 4 J_{0,3}$$

D'où  $J_{0,2} = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$ .

c) Avec  $p \geq 2$  et  $q \geq 1$  on a  $J_{p,q} = \int_0^1 \frac{x^p + x^{p-2} - x^{p-2}}{(1+x^2)^q} dx = J_{p,q-1} - J_{p-2,q}$ .

d) D'où les valeurs

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
$q = 0$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$q = 1$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\ln 2}{2}$	$1 - \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$
$q = 2$	$\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$	$\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$
$q = 3$	$\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{\pi}{32}$	$\frac{1}{16}$

### 3 POLYNÔMES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

CORRIGÉ

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'' - 2X P' \end{cases}$$

1° a) Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$  on a bien sûr  $(P'' - 2X P') \in \mathbb{R}[X]$ . La dérivation étant linéaire on a tout de suite  $\phi$  linéaire. Ainsi  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

b)  $P \in \text{Ker}(\phi)$  si et seulement si  $P'' = 2X P'$ .  $P \notin \mathbb{R}$  entraîne  $\deg P'' < \deg(2X P')$  donc  $P \notin \text{Ker}(\phi)$ . Pour  $P \in \mathbb{R}$  on a  $\phi(P) = 0$ . Ainsi  $\text{Ker}(\phi) = \mathbb{R}$ .

c) Pour  $P$  constant, on a  $P' = P'' = 0$  donc  $\phi(P) = 0$ . Pour  $P$  de degré  $n$ ,  $n \geq 1$ , on a  $P'$  de degré  $(n-1)$  et  $P''$  de degré inférieur ou égal à  $(n-2)$ . Donc  $\phi(P)$  a pour degré  $n$ .

Ainsi  $\mathbb{R}_n[X]$  est un sous espace stable par  $\phi$ .

d) Avec  $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^n)$  base de  $\mathbb{R}_n[X]$  on a  $A_n = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\phi_n) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -4 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & -2n \end{pmatrix}$$

2° a)  $n \neq 0$  et  $P$  de degré  $n$ . On sait déjà  $\phi(P)$  de degré  $n$ . Puisque  $\phi$  est linéaire et  $\phi(X^n) = -2nX^n + n(n-1)X^{n-2}$ , on a  $(\phi + 2n \cdot \text{id})(X^n)$  donc  $(\phi + 2n \cdot \text{id})(P)$  de degré inférieur ou égal à  $n-1$ .

b)  $p$  quelconque. Puisque  $(\phi + 2p \cdot \text{id})(\mathbb{R}_p[X]) \subset \mathbb{R}_{p-1}[X]$ , l'application  $(\phi_p + 2p \cdot \text{id})$  ne saurait être bijective. Elle n'est donc pas injective donc  $-2p$  est valeur propre de  $\phi_p$  donc de  $\phi$ . Le sous-espace propre associé à cette valeur est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_p[X]$ , il contient un polynôme unitaire : il existe  $H_p$ , polynôme unitaire de degré  $p$ , vérifiant  $\phi(H_p) = -2p H_p$ .

c)  $H_0 = 1, H_1 = X, H_2 = X^2 - 1/2$  et  $H_3 = X^3 - 3/2 X$ .

3° a)  $n$  quelconque. On a  $H_n$  unitaire de degré  $n$  qui vérifie  $\phi(H_n) = -2n H_n$ . On déduit  $H_n'' - 2X H_n' = -2n H_n$  donc  $H_n'' = 2X H_n' - 2n H_n$ .

Le polynôme  $K_n = X H_n - \frac{1}{2} H_n'$  est unitaire et de degré  $(n+1)$ . Il vérifie  $K_n' = (n+1) H_n$ . D'où  $\phi(K_n) = K_n'' - 2X K_n' = (n+1)(H_n' - 2X H_n) = -2(n+1) K_n$ . Ce polynôme est donc  $H_{n+1}$ .

On a ainsi  $H_{n+1} = X H_n - \frac{1}{2} H_n'$  pour tout  $n$ .

b)  $n \neq 0$ . Nous avons vérifié  $H_n = K_{n-1}$  donc  $H_n' = K_{n-1}' = n H_{n-1}$ .

c)  $n \neq 0$ . Les deux formules précédentes donnent  $2H_{n+1} = 2X H_n - H'_n = 2X H_n - n H_{n-1}$ , c'est à dire  $2H_{n+1} - 2X H_n + n H_{n-1} = 0$ .

d) A partir de la formule précédente et des valeurs de  $H_0$  et  $H_1$ , une récurrence facile donne, pour tout  $k$ ,  $H_{2k}$  est pair,  $H_{2k+1}$  est impair.

4° On pose  $S_0 = 1$ , et pour tout  $n \neq 0$ , le polynôme  $S_n$  est tel que  $S_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ .

a)  $S_0$  manifestement de degré 0 et de coefficient dominant 1.

Supposons pour  $p$  quelconque  $S_p$  polynôme de degré  $p$  et de coefficient dominant  $(-2)^p$ . Alors, pour tout  $x$ ,

$$S_{p+1}(x) = e^{x^2} \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(e^{-x^2}) = e^{x^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^p}{dx^p}(e^{-x^2}) \right) = e^{x^2} \frac{d}{dx} (S_p(x) e^{-x^2}) = S'_p(x) - 2x S_p(x)$$

On a donc  $S_{p+1}$  polynôme de degré  $(p+1)$  et de coefficient dominant  $(-2)^{p+1}$ .

Le théorème de récurrence donne alors pour tout  $n$   $S_n$  de degré  $n$  et de coefficient dominant  $(-2)^n$ .

b) Pour tout  $n$ ,  $S_{n+1} = S'_n - 2X S_n$  donc  $\left[ \frac{S_{n+1}}{(-2)^{n+1}} \right] = X \left[ \frac{S_n}{(-2)^n} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{S_n}{(-2)^n} \right]'$ .

La suite  $\left( \frac{S_n}{(-2)^n} \right)_n$  a même premier terme que  $(H_n)_n$  et vérifie la même relation de récurrence : elle lui est identique.

Ainsi, pour tout  $n$ ,  $H_n = \frac{(-1)^n}{2^n} S_n$ .

---

F I N

---