

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(6 points)

p et q sont deux constantes réelles données dans l'exercice. Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + p y' + q y = 0$. On rappelle qu'une application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est dite solution de (E) si et seulement si ses parties réelles et imaginaires sont toutes deux solutions.

1° a) Montrer que l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (E) est un espace vectoriel sur \mathbb{C} .

b) Pour s une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} solution non nulle de (E) , montrer que la droite vectorielle dirigée par s est incluse dans \mathcal{S} .

c) Caractériser les complexes r pour lesquels la fonction exponentielle $[x \mapsto e^{rx}]$ est solution de (E) .

2° a) Prouver que l'application Λ définie sur \mathcal{S} par : $[f \mapsto f']$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel \mathcal{S} .

b) Déterminer les valeurs de p et q pour lesquelles Λ n'est pas un isomorphisme.

c) Vérifier : $\Lambda \circ \Lambda + p \cdot \Lambda + q \cdot \text{id}_{\mathcal{S}} = O$.

En déduire qu'il existe des nombres r_1 et r_2 tels que $(\Lambda - r_1 \cdot \text{id}_{\mathcal{S}}) \circ (\Lambda - r_2 \cdot \text{id}_{\mathcal{S}}) = O$.

d) Montrer qu'aucune des applications $(\Lambda - r_1 \cdot \text{id}_{\mathcal{S}})$ et $(\Lambda - r_2 \cdot \text{id}_{\mathcal{S}})$ n'est bijective.

EXERCICE 2

(5 points)

Dans tout ce qui suit, p est un entier premier.

1° Soit $0 < k < p$.

a) Justifier $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$.

b) En déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

2° a) Pour a dans \mathbb{Z} quelconque, montrer que $(a+1)^p$ et $a^p + 1$ ont le même reste dans la division par p .

b) Montrer alors que pour tout n de \mathbb{N} , n^p et n ont le même reste dans la division par p .

c) En déduire que pour tout q tel que $1 < q < p$, le reste dans la division de q^{p-1} par p est 1.

3° application numérique : montrer que 1551 divise $2^{230} - 1$. (on peut remarquer que 47 est premier)

EXERCICE 3

(9 points)

Soit $\varphi : \left[x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} \right]^1$.

1° a) Justifier que φ est de classe C^∞ sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

b) Montrer que φ se prolonge sur \mathbb{R} par continuité en une fonction $\tilde{\varphi}$.

c) Montrer que $\tilde{\varphi}$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

d) Donner un $DL_2(0)$ de $\tilde{\varphi}$.

2° Le but est maintenant de montrer que $\tilde{\varphi}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Pour ça on pose $\psi = \frac{1}{\tilde{\varphi}}$.

a) Etablir pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \int_0^1 e^{xu} du$.

b) Etablir $(e^t - 1) \leq t e^t$ pour tout t réel. En déduire $(e^x - 1 - x) \leq \frac{x^2}{2} e^x$ pour tout $x > 0$, puis

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad \forall u \in [0; 1] \quad \left| \frac{e^{hu} - 1}{h} - u \right| \leq |h| \frac{u^2}{2} e^{|h|u}$$

c) Montrer que ψ est dérivable et $\forall x \quad \psi'(x) = \int_0^1 u e^{xu} du$.

d) Généraliser par récurrence et montrer que pour tout n , ψ est n -fois dérivable et $\forall x \quad \psi^{(n)}(x) = \int_0^1 u^n e^{xu} du$.

e) En déduire que $\tilde{\varphi}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

F I N

¹on rappelle au besoin un DL_n de \exp en 0 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$