

I.S.E.P.

Cycle préparatoire

Math.Sup. 2

Devoir 10

Mathématiques

29 mai 1998

durée 3 heures 30

sans calculatrice

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

EXERCICE

un peu d'analyse

(4 points)

Soit une fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

On définit alors la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{si } x = y \end{cases} \end{cases}$

1° a) Pour x et y fixés distincts, montrer l'existence d'un réel c entre x et y tel que $f(x, y) = \varphi'(c)$.

b) En déduire la continuité de f en $(0, 0)$.

2° Soit $u : [t \mapsto f(t, 0)]$

a) Montrer que u admet un développement limité d'ordre 1 en 0. En donner une expression.

b) En déduire une dérivée partielle de f en $(0, 0)$.

PROBLÈME beaucoup d'algèbre, mais l'analyse n'est jamais très loin

(20 points)

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on note $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. f est un endomorphisme de E admettant la matrice A dans la base \mathcal{B} . On pose P tel que $\forall x, P(x) = \det(A - x \cdot \mathbf{I})$.

préliminaire

1° Pour une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on note Q le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z, Q(z) = \det(M - z.I)$.

a) Justifier que Q est scindé et de degré 3.

b) Etablir que lorsque M est à coefficients réels, Q admet au moins une racine réelle.

Partie A

Soit λ un nombre réel

1° u un vecteur propre de f associé à la valeur propre μ .

a) Montrer que u est un vecteur propre de f^3 , et donner la valeur propre correspondante. (f^3 est $f \circ f \circ f$)

b) Montrer que u est un vecteur propre de $(f - \lambda.id_E)^3$, et donner la valeur propre correspondante.

2° On considère $(A - \lambda.I)^3 = O$.

a) Etablir que λ est valeur propre unique de f .

b) Montrer que λ est racine triple du polynôme P .

3° Enoncer la réciproque de l'implication obtenue à la question précédente. (on admettra ce résultat vrai).

Partie B

Soient a, b et k trois réels non nuls. On pose désormais $A = \begin{pmatrix} k-a & -a & -a \\ b & k & b \\ a & a & k+a \end{pmatrix}$.

1° a) Expliciter le polynôme P tel que $\forall x, P(x) = \det(A - x.I)$.

b) Montrer que A^3 peut s'écrire comme combinaison linéaire de I, A et A^2 . Expliciter cette combinaison linéaire.

c) Justifier que A est inversible et donner A^{-1} .

2° a) Donner les valeurs propres de f .

b) Déterminer une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ dans laquelle f admette pour matrice $B = \begin{pmatrix} k & a & 0 \\ 0 & k & b \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ et telle que les vecteurs $(v_1 - e_1), v_2$ et v_3 appartiennent à $\text{Vect}(e_2, e_3)$.

3° a) Donner la matrice L de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} et calculer L^{-1} .

b) Exprimer B en fonction de L, L^{-1} et A .

Partie C

1° On pose $A' = A - k.I$ et $B' = B - k.I$.

a) Montrer $B' = L^{-1} \times A' \times L$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner B'^n .

c) En déduire une expression de B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2° Pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $C_n(t) = I + \sum_{p=1}^n \frac{t^p}{p!} B^p$

a) Justifier que chaque matrice $C_n(t)$ est triangulaire et que ses coefficients diagonaux sont égaux. On les note $\alpha_n(t)$. Justifier sans démonstration : $\lim_n \alpha_n(t) = e^{kt}$.

b) Donner les limites des autres coefficients de $C_n(t)$.

On peut ainsi définir une matrice $\lim_n C_n(t)$. On la note $e^{t.B}$.

c) Donner $e^{t.A}$ en justifiant le bien-fondé de votre démarche.

Partie D

On considère les systèmes d'équations différentielles de variable t et d'inconnues x, y et z :

$$(s) : \begin{cases} x' &= (k-a)x - ay - az - at \\ y' &= bx + ky + bz + 1 \\ z' &= ax + ay + (k+a)z + at \end{cases} \quad (h) : \begin{cases} x' &= (k-a)x - ay - az \\ y' &= bx + ky + bz \\ z' &= ax + ay + (k+a)z \end{cases}$$

qu'on peut écrire sous formes matricielles à l'aide des matrices $A, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ par

$$(s) : \frac{dU}{dt}(t) = A \times U(t) + C + t.D \quad (h) : \frac{dU}{dt}(t) = A \times U(t)$$

1° Pour trois réels quelconques k_1, k_2, k_3 , on pose $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$. Justifier que $U(t) = e^{t.A} \times K$ est solution de (h) .

2° a) Vérifier que $U_0(t) = -(A^{-1} \times C + (A^{-1})^2 \times D + t.A^{-1} \times D)$ est solution particulière de (s) .

b) Par analogie avec la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre, en déduire la solution générale de (s) .

F I N