

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

$E = \mathbb{R}[X]$ . Pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $E_p$  désigne le sous-espace de  $E$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$ .  $\Delta$  est l'application qui à tout polynôme  $P$  de  $E$  associe le polynôme  $\Delta(P) = P(X+1) - P$ . (par exemple  $\Delta(X^2 - X) = 2X$ ).

**Partie A**

1° a ) Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $E$ .

b ) Donner les images par  $\Delta$  des polynômes 1,  $X$ ,  $X^2$  et  $X^3$ .

2° a ) Pour  $P$  de  $E$  de degré  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), donner le degré de  $\Delta(P)$ .

b ) Montrer  $\Delta \langle E_n \rangle = E_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .

3° Justifier  $\text{Ker}(\Delta) = E_0$

4° En déduire que pour tout polynôme  $Q$  de  $E_{n-1}$  il existe un polynôme  $P$  de  $E_n$  unique tel que 
$$\begin{cases} \Delta(P) = Q \\ \int_0^1 P(x) dx = 0 \end{cases}$$

**Partie B**

On définit la suite de polynômes  $(B_n)_n$  par  $B_0 = 1$  et pour  $n \geq 1$ ,  $B_n$  unique polynôme tel que 
$$\begin{cases} \Delta(B_n) = n X^{n-1} \\ \int_0^1 B_n(x) dx = 0 \end{cases}$$

1° Calculer  $B_1$  et  $B_2$ .

2° Déterminer le degré de  $B_n$  et son coefficient dominant.

3° a ) Etablir  $B_n(0) = B_n(1)$  pour  $n \geq 2$ .

b ) Montrer pour  $n \neq 0$   $B'_n = n B_{n-1}$  (en calculant par exemple  $\Delta(B'_n - n B_{n-1})$ ).

c ) En déduire  $B_3$ .

4° a ) Montrer  $\Delta(S_n) = \Delta(B_n)$  où  $S_n = (-1)^n B_n(1 - X)$ .

b ) En déduire  $B_n = (-1)^n B_n(1 - X)$  pour tout  $n$ .

c ) Justifier que pour tout entier  $k$  non nul,  $B_{2k+1}$  admet 0,  $1/2$  et 1 pour racines.

5° a ) Montrer  $\Delta(T_n) = \Delta(B_n)$  où  $T_n = 2^{n-1} \left( B_n \left( \frac{X}{2} \right) + B_n \left( \frac{X+1}{2} \right) \right)$ .

**b )** En déduire  $B_n = 2^{n-1} \left( B_n \left( \frac{X}{2} \right) + B_n \left( \frac{X+1}{2} \right) \right)$  pour tout  $n$ .

**c )** Justifier que pour tout entier  $k$  non nul  $B_{2k} \left( \frac{1}{2} \right) = (-1 + 2^{1-2k}) B_{2k}(0)$ .

**6° a )** Montrer que  $B_3$  est scindé de racines 0,  $1/2$  et 1. Montrer ensuite, sans calculer  $B_4$  ni  $B_5$  et à partir des tableaux de variations de  $B_2$  et  $B_3$  que  $B_4$  admet une unique racine entre 0 et  $1/2$  et que  $B_5$  n'en a pas.

**b )** Montrer par récurrence que pour tout entier  $k$  non nul,  $B_{2k}$  admet une unique racine dans  $]0, 1/2[$  et que  $B_{2k+1}$  n'en a pas.

**c )** En déduire que pour  $k$  non nul  $|B_{2k}|$  atteint en 0 son maximum sur  $[0, 1]$ .

## Partie C

$f$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**1°** Grâce à des intégrations par parties, justifier :

$$\int_0^1 f''(x) B_2(x) dx = B_2(0) (f'(1) - f'(0)) - (f(0) + f(1)) + 2 \int_0^1 f(x) dx$$

**2°** Pour tout  $n$  non nul, on pose  $R_n = \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 f^{(2n)}(x) B_{2n}(x) dx$ .

Montrer par récurrence :  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] + R_n$ .

**3°** Justifier, pour  $n$  non nul,  $|R_n| \leq \sup_{[0,1]} |f^{(2n)}| \frac{|B_{2n}(0)|}{(2n)!}$

---

F I N

---