

Exercice 1

n désignant un entier naturel, on considère l'intégrale $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx$

1) Montrer que, pour tout n , l'intégrale I_n est convergente

2) a) Etablir la relation de récurrence: $I_{n+2} = (n+1) I_n$

b) Donner une expression de I_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.

c) En admettant, sans démonstration, $I_0 = \sqrt{2\pi}$ calculer I_{2p} pour $p \in \mathbb{N}$.

3) a) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx$ converge pour tout polynôme P .

b) Calculer la valeur de cette intégrale pour les polynômes particuliers $X^4 - 1$ et $3X^3 - X^2 + X - 3$

Exercice 2

Soit la fonction réelle f définie par $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

1) *Courbe représentative*

a) Etudier la dérivabilité de f et le signe de $e^x f'(x)$. En déduire l'étude des variations de f .

b) Tracer la courbe représentative f dans un repère orthonormé, en ayant soin de décrire ses branches infinies.

2) *Comportement en 0*

a) Montrer que f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (e): $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$

Résoudre l'équation (e).

b) En déduire les valeurs de $f''(0)$ et $f'''(0)$ puis un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

3) *Fonction primitive*

Soit F la primitive de f sur \mathbb{R} nulle en 0.

a) Calculer explicitement $F(x)$ pour x réel quelconque.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) - x$

Exercice 3

n désigne un entier naturel, $n \geq 2$. P_n est l'algèbre des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . On définit f sur P_n par $f : P \mapsto (X-1)P' + 2P(0)$.

1) Matrice d'un endomorphisme

- Montrer que f est un endomorphisme de P_n .
- En donner la matrice, notée B_n , dans la base canonique $B_n = (1, X, \dots, X^n)$ de P_n .
- Démontrer que f est bijectif.
- Déterminer la matrice B_n^{-1} inverse de B_n .

2) Vecteurs propres

Pour $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, on pose $Q_k = \frac{k}{2} - 1 + (1-X)^k + 1$

- Vérifier que Q_k est un vecteur propre de f , associé à la valeur propre k .
- Montrer que si k est pair, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad Q_k(x) > 0$
- Montrer que si k est impair; $k = 2j+1$, alors Q_k admet une unique racine réelle, notée s_j .
Déterminer $\lim_{j \rightarrow +\infty} s_j$

3) Trigonalisation

Soit F_n la famille $(X^2, Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$

- Montrer que F_n est une base de P_n . On notera P_n la matrice de passage de B_n à F_n .
- Donner la matrice F_n de f dans la base F_n .

4) Cas $n=2$, description de $(F_2)^p$

- Démontrer qu'il existe deux suites $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ d'entiers relatifs, telles que: $(F_2)^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ a_p & 1 & 0 \\ b_p & 0 & 2^p \end{pmatrix}$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Donner les formules de récurrence liant a_{p+1} et a_p d'une part et b_{p+1} et b_p d'autre part.

- En déduire les expressions exactes de a_p et b_p (on pourra utiliser $\frac{b_p}{2^p}$)