

1 APPROXIMATION RATIONNELLE

CORRIGÉ

f est une fonction définie et de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0. Pour n et k des entiers naturels donnés, on cherche la possibilité de trouver une fraction rationnelle u s'écrivant $u = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{R}_n[X]$, $q \in \mathbb{R}_k[X]$, $q(0) = 1$, telle que (e) : $f - u = o_0(h)$ où h est la fonction $[x \mapsto x^{n+k}]$.

On note $p = \sum_{j=0}^n a_j X^j$ qu'on étend à $a_j = 0$ pour $j > n$. De même on note $q = \sum_{i=0}^k b_i X^i$ qu'on étend à $b_i = 0$ pour $i > k$. On

note enfin $f(x) = \sum_{j=0}^{n+k} c_j x^j + o_0(x^{n+k})$ le $DL_{n+k}(0)$ de la fonction f .

1° a) u , comme fraction rationnelle, est de classe C^∞ sur tout intervalle où elle est définie et le théorème de Taylor-Young indique qu'elle admet en chacun des points de son ensemble de définition un DL de tout ordre. Or $q(0) = 1$ donc $0 \in \mathcal{D}_u$ et u

admet le $DL_{n+k}(0)$: $u(x) = \sum_{j=0}^{n+k} \frac{u^{(j)}(0)}{j!} x^j + o_0(x^{n+k})$. f de même, étant C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0, admet le

$$DL_{n+k}(0) : f(x) = \sum_{j=0}^{n+k} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + o_0(x^{n+k}).$$

Alors (e) $\iff f(x) - u(x) = o_0(x^{n+k})$ donc (e) $\iff \forall i \in \{0, 1, \dots, n+k\} \quad f^{(i)}(0) = u^{(i)}(0)$.

b) On a $f - u = \frac{fq - p}{q}$ et $q(0) = 1$ donc $(f - u) \sim (fq - p)$. Ainsi (e) $\iff fq - p = o_0(h)$.

2° Ayant $(fq)(x) = \sum_{j=0}^{n+k} \sum_{i=0}^j b_i c_{j-i} x^j + o_0(x^{n+k})$, on déduit (e) $\iff (s) : \forall j \in \{0, 1, \dots, n+k\} \quad \sum_{i=0}^j b_i c_{j-i} = a_j$.

rem : on peut faire aussi en identifiant pour tout j les coefficients des DL i.e. $p^{(j)}(0)$ et $(fq)^{(j)}(0)$, avec la formule de Leibniz

$$\text{pour le produit : } p^{(j)}(0) = j! a_j = (fq)^{(j)}(0) = \sum_{i=0}^j C_j^i q^{(i)}(0) f^{(j-i)}(0) = \sum_{i=0}^j \frac{j!}{i! (j-i)!} i! b_i (j-i)! c_{j-i}.$$

3° On pose ici $f : [x \mapsto \ln(1+x)]$.

a) On a $c_0 = 0$ et pour $j > 0$, $c_j = \frac{(-1)^{j+1}}{j}$.

$$\text{b) Pour } n = k = 2, \text{ on a (s) : } \begin{cases} 0 = a_0 \\ 1 = a_1 \\ -1/2 + b_1 = a_2 \\ 1/3 - b_1/2 + b_2 = 0 \\ -1/4 + b_1/3 - b_2/2 = 0 \end{cases}$$

c) On trouve $p = X + \frac{1}{2}X^2$ et $q = 1 + X + \frac{1}{6}X^2$ et donc $\ln(1+x) = \frac{x + \frac{1}{2}x^2}{1 + x + \frac{1}{6}x^2} + o_0(x^4)$.

4° On pose ici $f : [x \mapsto e^{-x}]$.

a) On a $c_j = \frac{(-1)^j}{j!}$ pour tout j .

$$\text{b) Pour } n = 3, k = 2, \text{ on a } (s) : \begin{cases} 1 = a_0 \\ -1 + b_1 = a_1 \\ 1/2 - b_1 + b_2 = a_2 \\ -1/6 + b_2/2 - b_2 = a_3 \\ 1/24 - b_1/6 + b_2/2 = 0 \\ -1/120 + b_1/24 - b_2/6 = 0 \end{cases}$$

c) On trouve $p = 1 - \frac{3}{5}X + \frac{3}{20}X^2 - \frac{1}{60}X^3$ et $q = 1 + \frac{2}{5}X + \frac{1}{20}X^2$ et donc $e^{-x} = \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2} + o_0(x^5)$.

2 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

CORRIGÉ

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

1° On sait $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)$.

a) $g(0) = 1$ et pour $x \neq 0$, $g(x) = 1 + o_0(x)$. Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

b) g est bien sûr de classe C^∞ sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

De plus g' est définie sur \mathbb{R} par $g'(0) = 0$ et $g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ pour $x \neq 0$. On a donc $g'(x) = -\frac{1}{3}x + o_0(x)$ pour tout x . Ainsi g' est continue en 0 et g est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

c) Le $DL_1(0)$ précédent donne g' dérivable en 0 donc g est deux fois dérivable en 0 avec $g''(0) = -\frac{1}{3}$.

2° Soit $(E) : xy'' + 2y' + xy = 0$. g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . Pour $x \neq 0$, on a $g''(x) = \frac{-2x \cos x - (x^2 - 2) \sin x}{x^3}$. Donc pour $x \neq 0$, on a $xg''(x) + 2g'(x) + xg(x) = 0$. Ayant de plus $g'(0) = 0$, on a bien g solution de (E) sur \mathbb{R} .

3° a) g est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc $1/g$ est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$. En posant $f = k \times g$ sur $]0, \pi[$, on a f est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$ si et seulement si k est deux fois dérivable sur $]0, \pi[$.

$$\text{b) Pour } f, \text{ ou } k \text{ deux fois dérivable sur }]0, \pi[, \text{ pour tout } x \in]0, \pi[, \begin{cases} f(x) &= k(x)g(x) \\ f'(x) &= k'(x)g(x) + k(x)g'(x) \\ f''(x) &= k''(x)g(x) + 2k'(x)g'(x) + k(x)g''(x) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est solution sur }]0, \pi[\text{ de } (E) &\iff \forall x \in]0, \pi[\quad x f''(x) + 2 f'(x) + x f(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in]0, \pi[\quad x k''(x) g(x) + 2 k'(x) (x g'(x) + g(x)) = 0 \\ &\iff \forall x \in]0, \pi[\quad k''(x) \sin x + 2 k'(x) \cos x = 0 \\ &\iff k \text{ est solution sur }]0, \pi[\text{ de } (e) \end{aligned}$$

avec $(e) : \sin x y'' + 2 \cos x y' = 0$.

4° a) Soit $(\epsilon) : y' \sin x + 2 y \cos x = 0$. Cette équation est homogène, $]0, \pi[$ est sans point singulier, donc les solutions de (ϵ) sur $]0, \pi[$ sont les $\left[x \mapsto \frac{c}{\sin^2 x} \right]$ avec c réel quelconque.

b) k solution de (e) sur $]0, \pi[$ si et seulement si k' est solution de (ϵ) sur $]0, \pi[$. Donc les solutions de (e) sur $]0, \pi[$ sont les $\left[x \mapsto \frac{\alpha \cos x + \beta \sin x}{\sin x} \right]$.

5° a) Les solutions de (E) sur $]0, \pi[$ sont donc d'après ce qui précède, les kg où k est solution de (e) sur $]0, \pi[$. Ce sont donc les fonctions $\left[x \mapsto \frac{\alpha \cos x + \beta \sin x}{x} \right]$ avec α et β des réels quelconques.

b) L'ensemble des solutions de (E) sur $]0, \pi[$ est un espace vectoriel de dimension 2 dont les éléments peuvent être prolongés sur $]0, +\infty[$ en solutions de (E) sur $]0, +\infty[$. Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $\left[x \mapsto \frac{\alpha \cos x + \beta \sin x}{x} \right]$ avec α et β des réels quelconques.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\frac{\cos x}{x}$ n'a pas de limite en 0. Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont donc les fonctions βg où β est un réel quelconque.

6° Soit $(h) : y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x \cos^3 x}$. On pose $I =]0, \pi/2[$.

L'équation homogène associée à (h) est $(h') : y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ dont on connaît les solutions sur I : les $\left[x \mapsto \frac{\alpha \cos x + \beta \sin x}{x} \right]$.

(L'équation (h) est linéaire, il suffirait donc d'avoir une solution particulière). La recherche des solutions va se faire par variation de constantes.

Soit sur I , $f(x) = \frac{\alpha(x) \cos x + \beta(x) \sin x}{x}$: on se propose de faire varier les deux constantes. C'est l'idée analogue à la méthode de Cardan pour les équations de degré 3 : en choisissant deux paramètres là où un aurait suffi, on garde la possibilité d'une liberté.

On a alors $f'(x) = \frac{\alpha'(x) \cos x + \beta'(x) \sin x}{x} + \frac{-x \alpha(x) \sin x + x \beta(x) \cos x - \alpha(x) \cos x - \beta(x) \sin x}{x^2}$. Même idée alors que dans la méthode de Cardan, la liberté supplémentaire est utilisée pour simplifier la suite de la résolution : on impose $\forall x, \alpha'(x) \cos x + \beta'(x) \sin x = 0$.

$f''(x) = \frac{-\alpha'(x) \sin x + \beta'(x) \cos x}{x} + \frac{\alpha(x) (-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x) + \beta(x) (-x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x)}{x^3}$ et

alors $f''(x) + \frac{2}{x} f'(x) + f(x) = \frac{-\alpha'(x) \sin x + \beta'(x) \cos x}{x}$ puisque α et β constantes auraient donné 0.

On cherche donc les fonctions α et β telles que $\forall x \quad \begin{cases} \alpha'(x) \cos x + \beta'(x) \sin x = 0 \\ -\alpha'(x) \sin x + \beta'(x) \cos x = \frac{1}{\cos^3 x} \end{cases}$ On en déduit $\forall x \quad \begin{cases} \alpha'(x) = \frac{-\sin x}{\cos^3 x} \\ \beta'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$

et les solutions en découlent :

les solutions sur I de l'équation (h) sont les $\left[x \mapsto \frac{2 \sin^2 x - 1}{2x \cos x} + \frac{\alpha \cos x + \beta \sin x}{x} \right]$ où α et β sont des réels quelconques.

F I N
