

Problème d'algèbre (8 points)

Soit $E = \mathbf{R}_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 5. E_1 et E_2 désignent les sous-espaces supplémentaires respectivement engendrés par $(1, X^2, X^4)$ et (X, X^3, X^5) .

- 1] Soit l'application φ qui à tout P de E_1 associe $\varphi(P) = (X^2-1) P'' + X P'$
 - a) Montrer que φ est un endomorphisme de E_1 .
 - b) Donner la matrice de φ relativement à la base canonique de E_1 (la base $(1, X^2, X^4)$).
 - c) Déterminer le noyau de φ . Donner ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.
 - d) φ est-il diagonalisable ?

- 2] Soit l'application ψ qui à tout P de E_1 associe $\psi(P) = 2X P - P'$
 - a) Montrer que ψ est une application linéaire de E_1 dans E_2 .
 - b) Donner la matrice de ψ relativement aux bases canoniques de E_1 et E_2 .
 - c) Etablir que ψ est un isomorphisme.

- 3] a) Pour Q élément de E_2 montrer qu'il existe un polynôme et un seul de E , noté Q^* , tel que $Q = X Q^*(X^2)$.
 b) désignant l'application qui à Q de E_2 associe $\varphi(Q) = \frac{1}{2} [Q^*(X^2) + Q^{*'}(X^2) + Q^{*''}(X^2)]$, déterminer $\ker \varphi$. Que peut-on en conclure ?

- 4] a) Soit $P \in E$. P s'écrit de manière unique $P = P_1 + P_2$ avec $P_1 \in E_1$ et $P_2 \in E_2$. Ecrire P_1 et P_2 en utilisant $P(X)$ et $P(-X)$.
 b) L'application φ fait correspondre à tout P de E , $P = P_1 + P_2$ où $P_1 \in E_1$ et $P_2 \in E_2$, le polynôme $\varphi(P) = \varphi(P_1) + \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$. Montrer que φ est un endomorphisme de E .

Problème d'analyse (12 points)

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on désigne par f_n l'application définie sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \sin (2n \operatorname{Arcsin} x)$.

Première partie

- 1] Etudier la parité de f_n . Calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.
- 2] Résoudre dans $[0,1]$ l'équation $f_n(x) = 0$.
- 3] Démontrer que f_n est continue sur $[-1,1]$
- 4] a) Etablir que f_n est dérivable sur $] -1,1[$; Calculer $f_n'(x)$ pour $-1 < x < 1$.

- b) Calculer la limite de $\frac{f_n(x)}{x-1}$ lorsque x tend vers 1. f_n est-elle dérivable à gauche en 1; à droite en -1 ?
- 5] Déterminer le développement limité de f_n en 0 à l'ordre 3.
- 6] Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ (on pourra utiliser deux intégrations par parties)
- 7] Donner le tableau de variation de f_1 et tracer rapidement sa courbe représentative C_1 dans un repère orthonormal, en précisant la tangente à l'origine.

Deuxième partie

- 1] Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on définit l'application J_p sur $[0,1[$ par: $J_p(x) = \int_0^x \frac{f_p^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$
- a) Calculer $J_p(x)$ et l'exprimer en fonction de $f_{2p}(x)$.
- b) Déterminer, si elle existe, la limite de $J_p(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.
- 2] Pour $p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*, p > q$, et pour $x \in [0,1[$, on considère $K_{p,q}(x) = \int_0^x \frac{f_p(t) f_q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$
- a) Calculer $K_{p,q}(x)$ en fonction de $f_{p+q}(x)$ et $f_{p-q}(x)$.
- b) Déterminer si elle existe la limite de $K_{p,q}(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Troisième partie

- 1] a) En utilisant la formule de Moivre, démontrer que pour tout n de \mathbb{N}^* il existe un polynôme P_n à coefficients entiers tel que: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(2n x) = \sin x \cos x P_n(\sin x)$
- b) Donner explicitement P_1, P_2, P_3 .
- c) En déduire: $\forall x \in [-1,1] \quad f_n(x) = x \sqrt{1-x^2} P_n(x)$
- 2] a) Montrer que l'on peut écrire $P_n = a_0 + a_1 X^2 + \dots + a_p X^{2p}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $a_p \neq 0$.
- b) Déterminer les valeurs de $a_p, P_n(0), P_n(1)$ en fonction de n .
- 3] a) Résoudre dans $[0,1]$, puis dans $[-1,1]$ et enfin dans \mathbb{R} l'équation $P_n(x) = 0$.
- b) Pour $n \geq 2$, calculer $U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k}{2n}$.