

1

CORRIGÉ

On remarque $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Soit dans \mathbb{Z}^2 le système $(s) : \begin{cases} x + y = 84 \\ \text{ppcm}(x, y) = (\text{pgcd}(x, y))^2 \end{cases}$ Recherche de conditions nécessaires sur (x, y) solution de (s) :

• Un diviseur p , premier, de x divise $\text{ppcm}(x, y)$ donc $(\text{pgcd}(x, y))^2$ et puisque p est premier, il divise $\text{pgcd}(x, y)$ donc y . Il est diviseur commun de x et y et divise donc $x + y = 84$. Il est donc 2, 3 ou 7.

p diviseur premier de x et y . On a $x = p^n \cdot x'$ et $y = p^\nu \cdot y'$, avec x' et y' premiers avec p .

La relation $\text{ppcm}(x, y) = (\text{pgcd}(x, y))^2$ impose alors $\max(n, \nu) = 2 \min(n, \nu)$, et donc $\{n, \nu\} = \{1, 2\}$ dans le cas $p = 3$ ou $p = 7$, ou, dans le cas $p = 2$, $\{n, \nu\} = \{2, 4\}$.

Les solutions sont donc parmi les couples (x, y) vérifiant $x = (-1)^d \cdot 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ et $y = (-1)^\delta \cdot 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$, avec $d \in \{0, 1\}$, $\delta \in \{0, 1\}$, $\{a, \alpha\} = \{2, 4\}$ ou $\{0, 0\}$, $\{b, \beta\} = \{1, 2\}$ ou $\{0, 0\}$, $\{c, \gamma\} = \{1, 2\}$ ou $\{0, 0\}$.

Une recherche systématique donne alors les solutions (et leurs symétriques) :

$$(-2^4 7^1, 2^2, 7^2) = (-112, 196), \quad (-3^2 7^1, 3^1 7^2) = (-63, 147), \quad (2^2 3^2, 2^4 3^1) = (36, 48)$$

• En notant δ le pgcd et μ le ppcm de x et y , on écrit $x = \delta a$ et $y = \delta b$. Alors $\mu = \delta a b$ donc $a b (a + b) = 84$. Or les couples (a, b) de diviseurs de 84 sont connus, il reste à choisir ceux dont la somme fait le quotient de 84 par ab . Ce sont $(3, 4)$, $(4, -7)$, $(3, -7)$ et leurs symétriques. Les (x, y) solutions sont alors trouvés grâce à $\delta = a b$.

2

CORRIGÉ

1° p est un nombre premier.

a) Pour $0 < k < p$, on a $p \mathbf{C}_{p-1}^{k-1} = k \mathbf{C}_p^k$. Puisque p et k sont premiers entre eux, le lemme de Gauss donne que p divise \mathbf{C}_p^k .

b) Soit $a \in \mathbb{Z}$. La formule de Newton donne $(a+1)^p = a^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \mathbf{C}_p^k a^k$. Puisque p divise les \mathbf{C}_p^k pour $1 \leq k \leq (p-1)$, il divise $(a+1)^p - (a^p + 1)$. Ainsi $(a+1)^p$ et $(a^p + 1)$ ont le même reste dans la division par p .

c) $1^p = 1$ donc 1^p et 1 ont même reste 1 dans la division par p .

Supposons que, ayant $n \geq 1$, n^p et n aient même reste dans la division par p . On a $(n+1)^p - (n+1) = [(n+1)^p - (n^p + 1)] + [n^p - n]$. Or ce qui précède donne que p divise $(n+1)^p - (n^p + 1)$ et l'hypothèse de récurrence que p divise $n^p - n$. Ainsi $(n+1)^p$ et $(n+1)$ ont le même reste dans la division par p .

Le théorème de récurrence alors que pour tout n de \mathbb{N} , n^p et n ont même reste dans la division par p , ce qui s'étend trivialement aux n de \mathbb{Z} .

2° application : 307, 3 et 7 sont premiers.

Le théorème précédent donne que 307 divise $(2^{307} - 2) = 2(2^{306} - 1)$. Puisque qu'il est premier avec 2, le lemme de Gauss donne qu'il divise $(2^{306} - 1)$.

De même 7 divise $((2^{51})^7 - 2^{51})$, il est premier avec 2^{51} , il divise donc, par le lemme de Gauss, $((2^{51})^6 - 1) = (2^{306} - 1)$.

De même 3 divise $((2^{153})^3 - 2^{153})$, il est premier avec 2^{153} , il divise donc, par le lemme de Gauss, $((2^{153})^2 - 1) = (2^{306} - 1)$.

Alors, puisque 3, 7 et 307 sont premiers, $3.7.307 = 6447$ divise $(2^{306} - 1)$. En fait,

$$\begin{aligned} 2^{306} - 1 &= 130370302485407109521180524058200202307293977194619920040712988758680403184853549195737432063 \\ &= 20221855511929131304665817288382224648254068123874657986771054561607011506879719124513329 \times 6447 \end{aligned}$$

3

CORRIGÉ

On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f par : $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

1° Étude de f .

a) $\lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{e^{-1/x}}{x} = 0$. Ainsi f est dérivable, donc continue, en 0 et $f'(0) = 0$.

b) f est bien sûr C^∞ sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{1}{x^2} f(x)$. Puisque $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 e^{-u} = 0$ on a $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = 0$ et donc f' est continue en 0. f est donc de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

c) f' est positive sur $]0, +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle admet 1 pour limite en $+\infty$.

2° On note \mathcal{C} la courbe de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Le tracé de \mathcal{C} ne pose pas de problème, avec une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

b) Soit le point A d'abscisse $a \neq 0$.

La tangente à \mathcal{C} en A admet pour équation $(y - f(a)) = f'(a) \cdot (x - a)$. Elle passe par O si et seulement si $f(a) = a \cdot f'(a)$ i.e. $f(a) = a \cdot \frac{f(a)}{a^2}$.

Ainsi il existe dans \mathcal{C} un point A unique, distinct de O , en lequel la tangente à \mathcal{C} passe par O , c'est le point $A(1, 1/e)$.

c) Soit le point B d'abscisse $b \neq 1$.

La tangente à \mathcal{C} en B a pour pente $f'(b)$. Elle est parallèle à la tangente en A si et seulement si $f'(b) = f'(1) = \frac{1}{e}$.

f' , continue sur $[0, +\infty[$, est de plus dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f''(x) = \frac{1 - 2x}{x^4} f(x)$. Elle est strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ et ne prend donc, dans cet intervalle, qu'en 1 la valeur $\frac{1}{e}$.

Ayant $0 < \frac{1}{e} < f'(\frac{1}{2})$, le théorème des valeurs intermédiaires donne au moins une solution sur $]0, \frac{1}{2}[$ à l'équation $f'(b) = \frac{1}{e}$. La stricte croissance de f' sur $[0, \frac{1}{2}]$ donne l'unicité de la solution sur cet intervalle.

Ainsi il existe dans \mathcal{C} un point B unique, distinct de A , en lequel la tangente est parallèle à (OA) .

3° Soit $\gamma : \left[x \mapsto \frac{1}{1 - 2 \ln x} \right]$, définie sur $]0, +\infty[\setminus \{\sqrt{e}\}$.

a) γ admet 0 pour limite en 0. Ainsi la fonction g définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = \gamma(x)$ pour $x > 0$ est la prolongée de γ par continuité en 0.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} [x - 2x \ln x] = 0$, donc g n'est pas dérivable en 0.

c) g est bien sûr C^∞ sur $]0, \sqrt{e}[$ et $]\sqrt{e}, +\infty[$; pour $x > 0$, on a $g'(x) = \frac{2}{x} (g(x))^2$. Ainsi g est strictement croissante sur $[0, \sqrt{e}[$ et $]\sqrt{e}, +\infty[$. Les calculs de limites ne posent pas de problèmes.

d) $g(0) = 0$. Pour $0 < x \leq 1$, $g(x) = x$ si et seulement si $f'(x) = \frac{1}{e}$; déjà résolu, solutions 1 et b.

e) L'intervalle $]0, b[$ est stable par g , de même que $]b, 1[$.

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n . g étant continue, une telle suite ne peut que converger vers un point fixe de g , 0, 1 ou b .

Si $u_0 = b$, la suite est constante.

Si $0 < u_0 < b$, on a pour tout n $0 < u_n < b$ et la suite est croissante. Elle converge donc, sa limite ne peut être que b .

Si $b < u_0 < 1$, on a pour tout n $b < u_n < 1$ et la suite est décroissante. $(u_n)_n$ converge, sa limite ne peut être que b .

4° a) On sait déjà $f^{(0)}(x) = \frac{1}{x^0} f(x)$, $f^{(1)}(x) = \frac{1}{x^2} f(x)$ et $f^{(2)}(x) = \frac{1-2x}{x^4} f(x)$ pour $x > 0$.

On peut conjecturer qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de fonctions polynomiales telles que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} f(x)$ pour $n > 0$.

Ayant admis cette existence au rang p , on a $f^{(p)}(x) = \frac{P_p(x)}{x^{2p}} f(x)$ pour $x > 0$. Alors, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f^{(p+1)}(x) &= \frac{P'_p(x)}{x^{2p}} f(x) - \frac{2p P_p(x)}{x^{2p+1}} f(x) + \frac{P_p(x)}{x^{2p}} f'(x) \\ &= \frac{P'_p(x)}{x^{2p}} f(x) - \frac{2p P_p(x)}{x^{2p+1}} f(x) + \frac{P_p(x)}{x^{2p+2}} f(x) \\ &= \frac{x^2 P'_p(x) + (1-2px) P_p(x)}{x^{2(p+1)}} f(x) \end{aligned}$$

Le théorème de récurrence prouve alors la conjecture, et établit :

$$(1) \quad \forall n, \forall x > 0, P_{n+1}(x) = x^2 P'_n(x) + (1-2nx) P_n(x)$$

b) Pour $x > 0$, $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 1-2x$ et $P_3(x) = 1-6x+6x^2$.

c) La relation (1) permet d'obtenir par récurrence que, pour $n > 0$, P_n a le degré $(n-1)$, pour coefficient dominant $(-1)^{n-1}n!$ et 1 pour valeur en 0.

d) Bien sûr $\forall x > 0$, $x^2 f'(x) = f(x)$. La formule de Leibniz appliquée à l'ordre n sur l'égalité précédente donne

$$x^2 f^{(n+1)}(x) + \mathbf{C}_n^1 2x f^{(n)}(x) + \mathbf{C}_n^2 2 f^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x)$$

puisque la fonction carrée a ses dérivées nulles au delà de la seconde. En multipliant par $\frac{x^{2n}}{f(x)}$ on obtient

$$(2) \quad \forall x > 0, P_{n+1}(x) + (2nx-1) P_n(x) + n(n-1)x^2 P_{n-1}(x) = 0$$

pour $n > 1$. On étend facilement cette relation à $n = 1$.

e) L'identification des deux relations (1) et (2) donne $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x > 0 \quad P'_n(x) = -n(n-1) P_{n-1}(x)$.

f) On a $P'_{n+1}(x) = x^2 P''_n(x) + (1-2(n-1)x) P'_n(x) - 2n P_n(x)$. Ayant $P'_{n+1}(x) = -n(n+1) P_n(x)$, on obtient

$$\forall x \quad x^2 P''_n(x) + (1-2(n-1)x) P'_n(x) + n(n-1) P_n(x) = 0$$

On dit que P_n est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène

$$x^2 y'' + (1-2(n-1)x) y' + n(n-1) y = 0$$