

1 POLYNÔMES DE TCHEBYCHEFF (DEUXIÈME ESPÈCE)

CORRIGÉ

$$1^\circ \text{ a) } U_2 = 4X^2 - 1, \quad U_3 = 8X^3 - 4X, \quad U_4 = 16X^4 - 12X^2 + 1, \quad U_5 = 32X^5 - 32X^3 + 6X.$$

b) Une récurrence simple donne, pour tout n , $\deg U_n = n$.

c) U_0 est pair, U_1 est impair. Supposons U_{2p} pair et U_{2p+1} impair. On a $U_{2p+2} = 2X U_{2p+1} - U_{2p}$ donc U_{2p+2} pair. De même $U_{2p+3} = 2X U_{2p+2} - U_{2p+1}$ donc U_{2p+3} impair. Le théorème de récurrence donne pour tout n , U_n de la même parité que n .

$$2^\circ \text{ Pour tout } n \text{ on pose } I_n = \int_{-1}^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt.$$

$$\text{a) On a } I_0 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{\pi}^0 \sin u (-\sin u du) = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_1 = \int_{-1}^1 t \sqrt{1-t^2} dt = 0.$$

b) Une intégration par parties donne

$$I_{n+2} = \int_{-1}^1 t^{n+1} t \sqrt{1-t^2} dt = \left[t^{n+1} \frac{\sqrt{1-t^2}^3}{-3} \right]_{-1}^1 + \frac{n+1}{3} \int_{-1}^1 t^n (1-t^2) \sqrt{1-t^2} dt = \frac{n+1}{3} (I_n - I_{n+2})$$

$$\text{d'où } I_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} I_n.$$

c) $J_n = \int_{-1}^1 U_n(t) \sqrt{1-t^2} dt$ et $K_n = \int_{-1}^1 U_n(t) t \sqrt{1-t^2} dt$ pour tout n . Puisque $U_0 = 1$, on a $J_0 = I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $K_0 = I_1 = 0$. Puisque $U_1 = 2X$, on a $J_1 = 2I_1 = 0$ et $K_1 = 2I_2 = \frac{\pi}{2}$. La relation $U_{n+2} = 2X U_{n+1} - U_n$ permet de déduire $J_2 = K_2 = 0$, $J_3 = K_3 = 0$ puis de propager $J_n = K_n = 0$ pour tout $n > 1$.

Ainsi $\int_{-1}^1 U_n(t) \sqrt{1-t^2} dt = 0$ pour tout $n > 0$.

$$\text{d) On montre de plus } \int_{-1}^1 U_n(t) U_p(t) \sqrt{1-t^2} dt = 0 \text{ pour tous } n \neq p \text{ et } \int_{-1}^1 U_n(t)^2 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2} \text{ pour tout } n.$$

2 COCHLÉOÏDE

CORRIGÉ

Partie A

\mathcal{C} est le cercle de centre O et de rayon R , orienté positivement.

1° Le point Ω de \mathcal{C} d'abscisse R est choisi comme origine des abscisses curvilignes. Soit $s \in]0, 2\pi[$. $M = \phi(s)$ est le point de \mathcal{C} d'abscisse curviligne s , il a pour coordonnées $(R \cos(s/R), R \sin(s/R))$.

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\phi(s)} = (R \cos(s/R)) \cdot \vec{i} + (R \sin(s/R)) \cdot \vec{j}$ et $\overrightarrow{\phi'(s)} = -\sin(s/R) \cdot \vec{i} + \cos(s/R) \cdot \vec{j}$. Pour $S \in]0, 2\pi[$ on définit G par $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{s} \int_0^s \overrightarrow{O\phi(s)} \|\overrightarrow{\phi'(s)}\| ds$. Donc G a pour coordonnées $\left(\frac{R^2}{S} \sin(S/R), \frac{R^2}{S} (1 - \cos(S/R)) \right)$.

$$2^\circ \text{ Pour } S \in]0, 2\pi[, G \text{ a donc pour coordonnées } \left(\frac{R^2}{S} 2 \sin(S/2R) \cos(S/2R), \frac{R^2}{S} 2 \sin^2(S/2R) \right).$$

Donc Γ , l'ensemble des points G lorsque S décrit $]0, 2\pi[$, a pour description polaire dans (O, \vec{i}) :
$$\begin{cases} \theta = S/2R \\ \rho = \frac{R^2}{S} 2 \sin(S/2R) \end{cases} \quad \text{d'où}$$
 l'équation polaire de Γ : $\rho = \frac{R}{\theta} \sin \theta$.

Partie B

Soit Γ la courbe d'équation polaire $\rho = g(\theta)$ où $\left[g(\theta) = a \frac{\sin \theta}{\theta} \text{ si } \theta \neq 0 \text{ et } g(0) = a \right]$. Γ est tout naturellement le support d'un arc (\mathbb{R}, ψ) .

1° a) Le signe de $g(\theta)$ suivant les valeurs de θ est évident. g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(0) = 0$, $g'(\theta) = \frac{a}{\theta^2} (\theta \cos \theta - \sin \theta)$ pour $\theta \neq 0$.

b) O est dans Γ , multiple, pour tous les $\theta \in \{k\pi / k \in \mathbb{Z}^*\}$. g est dérivable en tous ces points de nombre dérivé non nul. Chaque occurrence de O est un point ordinaire de Γ .

Ω est un point de Γ , pour $\theta = 0$. g est dérivable en 0. Ω est un point ordinaire de Γ .

2° a) Soit $P = \psi(\theta)$ de Γ différent de O . La tangente à Γ en P est orthogonale à (OP) si et seulement si $\overrightarrow{\psi'(\theta)}$ est orthogonal à $O\psi(\theta)$, donc si et seulement si $g'(\theta) = 0$, donc si et seulement si $\theta \cos \theta - \sin \theta = 0$. Aucun multiple de $\pi/2$ n'est solution de cette équation donc la tangente à Γ en P est orthogonale à (OP) si et seulement si $\theta = \tan \theta$.

b) Soit P un de ces points : $P = \psi(\theta)$. Les coordonnées cartésiennes de P sont $\left(a \frac{\sin \theta}{\theta} \cos \theta, a \frac{\sin \theta}{\theta} \sin \theta \right)$ donc $(a \cos^2 \theta, a \sin \theta \cos \theta)$ donc $\left(\frac{a}{2} (\cos 2\theta + 1), \frac{a}{2} \sin 2\theta \right)$. En notant K le point de (O, \vec{i}) d'abscisse $a/2$, on a donc $KP = \frac{a}{2}$. Le cercle \mathcal{C}_1 de rayon $\frac{a}{2}$ et de centre K est ainsi l'ensemble des points P de Γ en lesquels la tangente est orthogonale à (OP) .

3° On pose $I_0 = [0, \pi/2[$ et pour $n > 0$, $I_n =]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$

a) Soit $(e) : [z(\theta) = 0]$ avec $z : \left[\theta \mapsto \tan \theta - \theta \right]$. La fonction z est définie et dérivable sur chaque intervalle I_n , de fonction dérivée $\left[\theta \mapsto \tan^2 \theta \right]$. z vaut $-\pi$ en $n\pi$ et a pour limite $+\infty$ en $\pi/2 + n\pi$ à gauche pour tout n . Le théorème des valeurs intermédiaire donne que z s'annule au moins une fois sur chaque intervalle I_n . La stricte croissance de z sur chacun de ces intervalles assure l'unicité de la solution θ_n dans chaque intervalle I_n .

b) La question précédente donne directement $n\pi \leq \theta_n < n\pi + \pi/2$.

c) Soit $n > 0$. $\theta_n = \tan \theta_n$ et $n\pi \leq \theta_n < n\pi + \pi/2$, donc $\arctan(\theta_n) = \theta_n - n\pi$. Puisque $\theta_n > 0$, on a $\arctan(\theta_n) + \arctan\left(\frac{1}{\theta_n}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc $\arctan\left(\frac{1}{\theta_n}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \theta_n$.

De $n\pi \leq \theta_n$ on déduit $\lim_n \theta_n = +\infty$ donc $\lim_n \arctan\left(\frac{1}{\theta_n}\right) = 0$ donc $\lim_n \theta_n - (n\pi + \pi/2) = 0$ et $\theta_n \sim n\pi$.

De $\arctan\left(\frac{1}{\theta_n}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \theta_n$ on tire

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta_n} + o\left(\frac{1}{\theta_n^2}\right) &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \theta_n \\ \frac{1}{\theta_n} + \theta_n &= n\pi + \frac{\pi}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{\theta_n}{\theta_n^2 + 1} &= \frac{1}{n\pi + \pi/2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ \frac{1}{\theta_n} \frac{1}{1 + \frac{1}{\theta_n^2}} &= \frac{1}{n\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)} \\ \frac{1}{\theta_n} \left(1 + o\left(\frac{1}{\theta_n}\right)\right) &= \frac{1}{n\pi} \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ \frac{1}{\theta_n} &= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

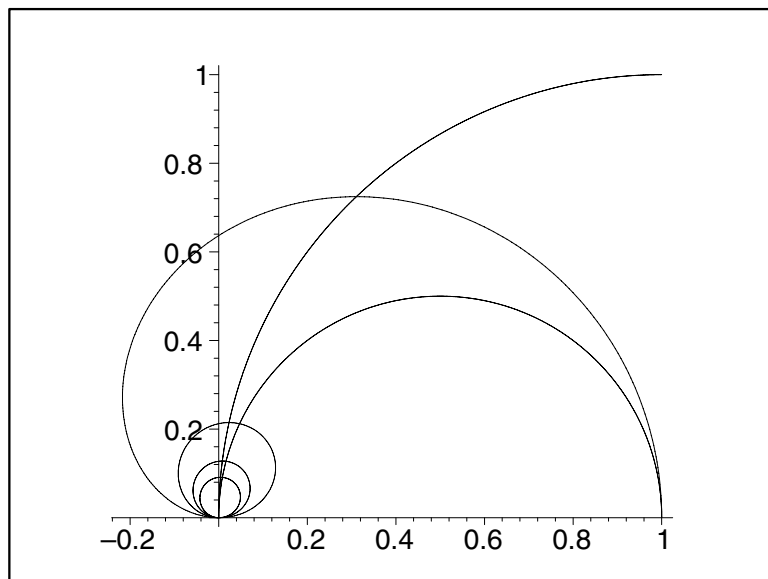
puisque pour tout k , $o\left(\frac{1}{\theta_n^k}\right) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

4° Les points Q où la tangente à Γ est parallèle à (O, \vec{i}) sont les $\psi(\theta)$ pour lesquels $\psi'(\theta)$ est colinéaire à \vec{i} . Or $\psi'(\theta)$ a pour ordonnée $\frac{a}{\theta^2} (\theta \sin 2\theta - \sin^2 \theta)$.

Soit alors un point $Q = \psi(\theta)$ avec $\theta = \frac{\sin^2 \theta}{\sin 2\theta}$. Q a pour coordonnées $(a(\cos 2\theta + 1), a \sin 2\theta)$. Ainsi $\Omega Q = a$.

Ainsi les points où la tangente à Γ est parallèle à (O, \vec{i}) sont situés sur le cercle \mathcal{C}_2 de centre Ω de rayon a .

5° $a = 1$; pour θ entre 0 et 4π on a Γ (avec \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2) :



F I N