

1 NOMBRES PARFAITS

CORRIGÉ

Pour $N \in \mathbb{N}$, $\sigma(N)$ note la somme des diviseurs de N .

1° Soit $n \in \mathbb{N}$. $n = pq$ donne $2^n - 1 = (2^p)^q - 1^q = (2^p - 1) \sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^k$. Donc si n est non premier, avec $p > 1$ et $q > 1$ on obtient $(2^n - 1)$ non premier. Ainsi, par contraposée, si $(2^n - 1)$ est premier, alors n est premier.

2° $E_n = 2^{n-1}(2^n - 1)$ où $(2^n - 1)$ est premier. Les diviseurs de E_n sont les 2^k et les $2^k(2^n - 1)$ avec $0 \leq k \leq n - 1$. Donc $\sigma(E_n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k(2^n - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k(1 + 2^n - 1) = (2^n - 1)2^n = 2E_n$. E_n est un nombre parfait.

3° a) Soit p un nombre parfait pair ; il s'écrit $p = 2^k b$ avec b impair et k positif.

Pour $q \mid p$, on pose $q = 2^m d$, c impair. Le lemme de Gauss donne $d \mid b$ et $m \leq k$. Alors $\sigma(p) = \sigma(b)(1 + 2 + \dots + 2^k) = (2^{k+1} - 1)\sigma(b)$. Or p est parfait donc $\sigma(p) = 2p = 2^{k+1}b$. Ainsi $\sigma(b)(2^{k+1} - 1) = 2^{k+1}b$.

b) $(2^{k+1} - 1)$ est impair, la lemme de Gauss donne $2^{k+1} \mid \sigma(b) : \sigma(b) = 2^{k+1}c$. Alors $b = c(2^{k+1} - 1)$. c et b sont des diviseurs de b ; $\sigma(b) = b + c$ impose alors $c = 1$ et b premier.

c) On déduit de ce qui précède $p = 2^k(2^{k+1} - 1)$ avec $b = (2^{k+1} - 1)$ premier donc $p = E_{k+1}$.

4° On a établi que les nombres parfaits pairs sont les nombres d'Euclide. Ainsi le nombre parfait le plus petit qui soit au delà de $E_2 = 6$ est $E_3 = 28$.

2 FORMULE DE STIRLING

CORRIGÉ

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

a) Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \sin x \leq 1$. Ainsi, pour n quelconque $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x (\sin x - 1) \, dx \leq 0$. $(I_n)_n$ est donc décroissante. Par ailleurs $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

b) $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^{n+1} x \, dx = [-\cos x \sin^{n+1} x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x (n+1) \cos x \sin^n x \, dx$. Alors $I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^n x \, dx = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. Ainsi $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

c) $p \in \mathbb{N}$. On prouve $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \dots \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2p)! \pi}{2^{2p+1} (p!)^2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \dots \frac{2}{3} I_1 = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$ par récurrence simple.

d) La formule de Stirling ($[n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}]$) permet d'écrire $I_{2p} \sim \frac{(2p)^{2p} e^{-2p} \sqrt{2\pi 2p} \pi}{2^{2p+1} (p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p})^2}$ donc $I_{2p} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$. Ainsi $(I_{2p})_p$ converge vers 0 et puisque $(I_n)_n$ est décroissante, elle converge vers 0.

f est une application de classe C^1 définie sur $[0, 1]$.

a) Pour $0 \leq k < n$, le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right]$ donne l'existence d'un nombre $b_k \in \left]\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right[$ tel que $f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n} f'(b_k)$. On a de plus $b_k \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$.

b) n est fixé. On pose $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} f'(b_k) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(b_k)$. Ainsi $2u_n$ se lit comme une somme de Riemann de f' sur $[0, 1]$ associée à la subdivision de pas constant $\frac{1}{n}$ pointée sur les (b_0, \dots, b_{n-1}) .

Puisque f' est continue sur $[0, 1]$, le théorème de convergence des sommes de Riemann, appliqué à f' sur $[0, 1]$, donne la convergence de $(u_n)_n$ vers $\frac{1}{2} \int_0^1 f' = \frac{f(1) - f(0)}{2}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5) \dots (4n-1)}{2n(2n+2)(2n+4) \dots (4n-2)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2n+2k+1}{2n+2k}$.

$$\text{Alors } \ln v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(\frac{2n+2k+1}{2n+2k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln \left(1 + \frac{2k+1}{2n} \right) - \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right).$$

Puisque $g : [x \mapsto \ln(1+x)]$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, le résultat précédent donne la convergence de $(\ln v_n)_n$ vers $\frac{1}{2}(g(1) - g(0)) = \frac{\ln 2}{2}$. Puisque \exp est continue, on a $\lim_n v_n = \lim_n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2n+2k+1}{2n+2k} = \sqrt{2}$.

4 SÉRIE DES CARRÉS D'INVERSES

CORRIGÉ

$$1^\circ \quad \theta \in]0, \pi] \text{ et } n \in \mathbb{N}^*. \quad \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} (e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{2i \sin \frac{n+1}{2}\theta}{2i \sin \frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Pour les mêmes raisons, avec $-\theta$, on a $\sum_{k=0}^n e^{-ik\theta} = e^{-i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$.

$$\text{Alors } 2 \sum_{k=0}^n \cos k\theta = \sum_{k=0}^n (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} + \sum_{k=0}^n e^{-ik\theta} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = (e^{i\frac{n\theta}{2}} + e^{-i\frac{n\theta}{2}}) \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n \cos k\theta = \cos \frac{n\theta}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}. \text{ Par ailleurs, } \sin \frac{n+1}{2}\theta = \sin \frac{n}{2}\theta \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{n}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \sin n\theta = 2 \sin \frac{n\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}.$$

$$\text{D'où } \sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\sin n\theta}{2} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + \cos^2 \frac{n\theta}{2} = 1 + \sum_{k=1}^n \cos k\theta.$$

2° f de classe C^1 sur $[a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $\int_a^b f(t) \cos nt \, dt = \left[f(t) \frac{1}{n} \sin nt \right]_a^b - \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \sin nt \, dt$. Puisque f et f' sont bornées sur $[a, b]$ ($|f| \leq M$ et $|f'| \leq M'$), on a $\left| \int_a^b f(t) \cos nt \, dt \right| \leq \frac{1}{n} (2M + M'(b-a))$. On a donc $\lim_n \int_a^b f(t) \cos nt \, dt =$

0. Bien sûr d'une manière analogue $\lim_n \int_a^b f(t) \sin nt \, dt = 0$.

$$3^\circ \text{ a) Pour } n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi t \cos nt \, dt = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \text{ et } \int_0^\pi t^2 \cos nt \, dt = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.$$

b) α et β sont tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}$ si et seulement si $1 = (2\alpha\pi + \beta)(-1)^n - \beta$ pour tout n , donc si et seulement si $\beta = -1$ et $\alpha = 1/(2\pi)$. Ce que nous posons désormais.

4° Des question précédentes on tire, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos kt \, dt \\ &= \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \left(\sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt \\ &= \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \left(\frac{\sin nt}{2} \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} + \cos^2 \frac{nt}{2} - 1 \right) dt \\ &= \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \left(\frac{\sin nt}{2} \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} + \frac{\cos nt}{2} - \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \int_0^\pi \frac{(\alpha t^2 + \beta t) \cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin nt \, dt + \int_0^\pi \frac{(\alpha t^2 + \beta t)}{2} \cos nt \, dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) dt \end{aligned}$$

Or $\lim_n \int_0^\pi \frac{(\alpha t^2 + \beta t)}{2} \cos nt \, dt = 0$ puisque la fonction $[t \mapsto (\alpha t^2 + \beta t)]$ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$. De même $\lim_n \int_0^\pi \frac{(\alpha t^2 + \beta t) \cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin nt \, dt = 0$, la fonction $\left[t \mapsto \frac{(\alpha t^2 + \beta t) \cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \right]$ se prolongeant par continuité en 0 en une fonction C^1 sur $[0, \pi]$.

$$\text{D'où } \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

F I N
