

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

(4 points)

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. a est un réel non nul.

Soit $\psi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

- 1° Montrer que ψ admet deux valeurs propres distinctes, indépendantes de a . On note λ la plus petite et μ la plus grande.
- 2° Montrer qu'il existe un vecteur propre f_1 , associé à la valeur propre μ de la forme $f_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + e_3$. Préciser les réels α et β .
- 3° Montrer que pour la valeur propre λ , il existe deux vecteurs propres, $f_2 = \alpha' e_1 + e_2$ et $f_3 = \alpha'' e_1 + e_3$. Préciser les réels α' et α'' .
- 4° a) Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
b) Quelle est la matrice D de ψ dans la base \mathcal{C} ?
- 5° Pour $n \in \mathbb{N}$, donner D^n . En déduire A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

PROBLÈME**transformation de Laplace**

(16 points)

Dans tout ce qui suit, \mathcal{H} désigne la fonction d'Heaviside : $\left[t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \right]$

Partie A

Soit E l'ensemble des fonctions f :
 de \mathbb{R} dans \mathbb{R}
 nulles sur $] -\infty, 0[$
 continues sur $[0, +\infty[$
 telles que $\left[t \mapsto e^{-pt} f(t) \right]$ est intégrable sur \mathbb{R} pour tout $p > 0$.

- 1° a) Montrer que \mathcal{H} est dans E .
b) Etablir que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- 2° a) Montrer que E contient les fonctions bornées sur \mathbb{R} , nulles sur $] -\infty, 0[$, continues sur $[0, +\infty[$.

b) En déduire que les fonctions intégrables sur \mathbb{R} , nulles sur $] - \infty, 0[$, continues sur $[0, +\infty[$, sont éléments de E , ainsi que leur primitive nulle sur $] - \infty, 0[$.

3° a) Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $P \times \mathcal{H}$ est dans E .

b) Montrer que pour f dans E , la fonction $[t \mapsto t^n f(t)]$ est aussi dans E .

Partie B

Pour f de E on définit la fonction $\mathcal{L}(f) : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ p & \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \end{cases}$. Se trouve ainsi construite \mathcal{L} dite la transformation de Laplace monolatérale¹.

1° Etablir que \mathcal{L} est linéaire.

2° Donner les fonctions $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{L}(\frac{\mathcal{H}}{\exp})$, $\mathcal{L}(\mathcal{H} \times \sin)$, $\mathcal{L}(\mathcal{H} \times \cos)$.

3° Soit $f \in E$. On pose, pour a réel positif, $e_a : [t \mapsto f(at)]$.

a) Montrer que l'on a $\mathcal{L}(e_a)(p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right)$ pour tout $p > 0$.²

b) Donner explicitement les fonctions $\mathcal{L}(\mathcal{H} \times f)$ successivement pour les fonctions $f : [t \mapsto \sin \omega t]$, $[t \mapsto e^{-\lambda t}]$.

4° Soit $f \in E$. On pose, pour τ réel positif, $r_\tau : [t \mapsto f(t - \tau)]$. Trouver la relation existant, pour tout $p > 0$, entre $\mathcal{L}(r_\tau)(p)$ et $\mathcal{L}(f)(p)$.³

5° Soit $f \in E$. On pose, pour λ réel positif, $a_\lambda : [t \mapsto e^{-\lambda t} f(t)]$.

a) Trouver la relation existant, pour tout $p > 0$, entre $\mathcal{L}(a_\lambda)(p)$ et $\mathcal{L}(f)(p)$.⁴

b) Donner explicitement la fonction $\mathcal{L}(\mathcal{H} \times f)$ pour la fonction $f : [t \mapsto e^{-\lambda t} \sin \omega t]$.

6° a) Soit $f \in E$; sa restriction à $[0, +\infty[$ est de classe C^1 . On note f' la prolongée de la dérivée de f à \mathbb{R} , nulle sur $] - \infty, 0[$. Montrer que f' est dans E et $\mathcal{L}(f')(p) = p \cdot \mathcal{L}(f)(p) - f(0)$ pour tout $p > 0$.

b) Pour tout entier n , g_n est la fonction puissance n -ième : $[t \mapsto \mathcal{H}(t) t^n]$. Déduire de ce qui précède une relation de récurrence entre $\mathcal{L}(g_{n+1})$ et $\mathcal{L}(g_n)$.

c) Donner explicitement, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(g_n)$ puis $\mathcal{L}(h_n)$ avec $h_n : [t \mapsto \mathcal{H}(t) \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}]$.

Partie C

On désigne par f la fonction nulle sur $] - \infty, 0[$ dont la restriction à $[0, +\infty[$ est solution de l'équation différentielle $(e) : y'' + 7y' + 6y = 370 \sin x$ sur $[0, +\infty[$ et qui satisfait la condition initiale $(0, 0, 0)$ (i.e. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$).

a) Que vaut $\mathcal{L}(f)$?

b) Déterminer alors f en décomposant $\mathcal{L}(f)$ en éléments simples.

c) Retrouver f par une résolution directe de l'équation (e) .

F I N

¹il est traditionnel chez les utilisateurs de cette transformation de noter p la variable de la fonction image ; cette notation est reprise ici bien que p ne désigne pas un entier dans ce contexte.

²ce résultat est connu sous le nom de "facteur d'échelle".

³ce résultat est connu sous le nom de "facteur de retard".

⁴ce résultat est connu sous le nom de "facteur d'amortissement".