

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Polynômes de Tchébycheff de deuxième espèce.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à n (dans tout ce problème, on prend $n \geq 3$). On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

Dans ce problème on confondra un polynôme P et sa fonction polynomiale réelle associée chaque fois que nécessaire.

Partie linéaire

On définit φ sur E par $\varphi : \left[P \mapsto (1 - X^2) P'' - 3X P' \right]$.

1° a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .

b) Écrire la matrice M de φ dans la base \mathcal{B} .

2° a) Donner $\det(M - \lambda \cdot I_n)$ pour λ un réel quelconque.

b) En déduire les valeurs propres de φ . Expliquer pourquoi on est sûr qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

c) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (U_0, U_1, U_2, \dots, U_n)$ formée de vecteurs propres de φ , tels que pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, U_k soit un polynôme unitaire de degré k .

d) Donner explicitement les polynômes U_0, U_1, U_2 et U_3 .

e) Montrer que le coefficient de X^{n-1} dans la décomposition de U_n dans la base \mathcal{B} est nul et que celui de X^{n-2} vaut $\frac{1-n}{4}$.

Partie euclidienne

Pour P et Q dans E on pose :

$$(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) \sqrt{1-t^2} dt$$

1° Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire dans E .

2° Pour tout entier p on pose $I_p = \int_{-1}^1 t^p \sqrt{1-t^2} dt$.

a) Montrer que pour p impair on a $I_p = 0$.

b) Etablir grâce à une intégration par parties une relation de récurrence entre I_{p+2} et I_p pour p quelconque.

c) En déduire $(X^i | X^j)$ pour i et j dans \mathbb{N} .

3° a) En notant $r : \left[t \mapsto \sqrt{1-t^2} \right]$, établir $(r^3 P')' = r \varphi(P)$ pour tout P de E .

b) En déduire que si P et Q sont dans E alors $(\varphi(P) | Q) = (P | \varphi(Q))$.

c) Montrer que pour les polynômes U_k définis dans la première partie on a : $(U_i | U_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Que dire de la base \mathcal{C} ?

4° a) Montrer que $(U_n - X U_{n-1})$ est de degré au plus $n - 1$ et qu'il est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 3$.

b) En déduire que $U_n - X U_{n-1}$ est combinaison linéaire de U_{n-1} et de U_{n-2} .

c) En utilisant la première partie, montrer $4U_n - 4X U_{n-1} + U_{n-2} = 0$ pour tout n .

d) Calculer $U_n(1)$.

5° a) Montrer que $(U_n | U_n) = (U_n | X^n)$. En déduire la valeur explicite de $(U_n | U_n)$ pour $n \leq 2$.

b) Pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, montrer : $(U_k | X^{k+2}) = \frac{k+1}{4}(U_k | U_k)$.

c) En déduire une relation de récurrence entre $(U_n | U_n)$, $(U_{n-1} | U_{n-1})$ et $(U_{n-2} | U_{n-2})$.

d) Montrer que $(U_n | U_n) = \frac{\pi}{2^{2n+1}}$.

e) Donner une base orthonormale de E .