

1 ALGÈBRE LINÉAIRE

CORRIGÉ

a) On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^n = 0$ pour $n \geq 3$.

b) $T = N - 2.I_3$ et bien sûr $2.I_3$ et N commutent. La formule du binôme donne $T^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (-2.I_3)^{n-k} = (-2)^n . I_3 + n(-2)^{n-1} . N + \frac{n(n-1)}{2} (-2)^{n-2} . N^2$ pour $n \geq 2$.

Ainsi $T^0 = I_3, T^1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et, pour $n \geq 2, T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 2n(-2)^{n-1} & (n^2 + 7n)(-2)^{n-2} \\ 0 & (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

1° a) Pour k quelconque, $k.I_3 - M = \begin{pmatrix} k+3 & 3 & -2 \\ -1 & k-1 & 2 \\ -2 & -4 & k+4 \end{pmatrix}$ et $\det(k.I_3 - M) = (k+2)^3$.

Ce déterminant est nul pour la seule valeur -2 de k .

b) Le rang de u est 3 puisque $\det(u) = -8 \neq 0$ (cas $k = 0$ précédent).

c) $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u + 2.id_E) = M + 2.I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$;

le noyau de $(u + 2.id_E)$ est formé des vecteurs v de composantes (x, y, z) telles que $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$.

Ainsi $\text{Ker}(u + 2.id_E) = \text{Vect}(e_1 - e_2 - e_3)$. Il est de dimension 1, le théorème du rang donne $\text{rg}(u + 2.id_E) = 2$.

2° a) La famille $(\varepsilon_1, e_1, e_2)$ est libre puisque son déterminant dans la base \mathcal{B} est $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Elle forme donc

une base de E . Ainsi $\Pi = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et Δ sont supplémentaires. $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$, famille libre de Π de dimension 2, en est une base.

b) On a e_1 et e_2 dans Π donc invariants par p . De plus $e_3 = -\varepsilon_1 + e_1 - e_2$ donc $p(e_3) = e_1 - e_2$. Ainsi $\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$ et $\varepsilon_3 = e_2$ sont manifestement non-colinéaires et tous deux vecteurs de Π , qui est de dimension 2. Donc $\mathcal{C}' = (\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de Π .

3° a) u' est composée de deux endomorphismes de E , donc u' est linéaire. Son ensemble image est inclus dans celui de p donc dans Π . En le confondant avec sa restriction à Π on peut le considérer comme un endomorphisme de Π .

b) $\text{mat}_{\mathcal{B}}(p \circ u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

4° a) Δ' est un sous-espace vectoriel de Π puisque contenant le vecteur nul, stable par somme de vecteurs et stable par produit d'un vecteur par un scalaire.

$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u' + 2.\text{id}_{\Pi}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est manifestement de rang 1 donc Δ' , noyau de $(u' + 2.\text{id}_{\Pi})$, est de dimension 1 grâce au théorème du rang.

b) $u'(\varepsilon_2) = u'(e_1) - u'(e_2) = -2.e_1 + 2.e_2 = -2.\varepsilon_2$; $u'(\varepsilon_3) = u'(e_2) = e_1 - 3.e_2 = \varepsilon_2 - 2.\varepsilon_3$

d'où on écrit $\text{mat}_{\mathcal{C}'}(u') = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5° a) ε_1 est non nul dans Δ ; $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de Π ; Δ et Π sont supplémentaires dans E . Donc $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E .

b) La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{mat}_{\mathcal{C}}(u) = P^{-1} M P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = T$.

d) On a donc pour tout n , $M^n = P T^n P^{-1}$; ainsi $M^n = (-2)^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} n^2 + n + 4 & n^2 + 5n & -4n \\ -n^2 - n & -n^2 - 5n + 4 & 4n \\ -n^2 - 3n & -n^2 - 7n & 4n + 4 \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 2$.

ANALYSE

2 CALCUL INTÉGRAL

CORRIGÉ

Par le changement de variable $x = \frac{1}{\text{sh } u}$ (et donc $dx = -\frac{\text{ch } u}{\text{sh}^2 u} du$) on a $I = \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}} = \int_{\text{argsh } 1}^{\text{argsh } 1/2} -du$.

D'où $I = \text{argsh } 1 - \text{argsh } 1/2$.

3 DESCRIPTION LOCALE

CORRIGÉ

$f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin(x/2)}$ si $x \in]0; \pi]$.

a) Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{2 \sin(x/2) - x}{2x \sin(x/2)} = \frac{2(x/2 - (x/2)^3/6 + o(x^3)) - x}{2x(x/2 + o(x))} = \frac{-x/24 + o(x)}{1 + o(1)}$.

Ainsi $f(x) = (-x/24 + o(x))(1 - o(1))$ et ceci reste valable en 0, d'où le DL_1 : $f(x) = -\frac{x}{24} + o(x)$.

b) f est donc continue en 0 (existence DL_0), f est dérivable en 0 (existence DL_1) et $f'(0) = -\frac{1}{24}$.

c) f est bien sûr \mathcal{C}^1 sur $]0; \pi]$, de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x/2)}{4 \sin^2(x/2)} = \frac{x^2 \cos(x/2) - 4 \sin^2(x/2)}{4x^2 \sin^2(x/2)}$.

Le dénominateur est équivalent à x^4 .

Le numérateur se développe en $x^2 (1 - \frac{1}{2} (\frac{x}{2})^2 + o(x^2)) - 4 (\frac{x}{2} - \frac{1}{6} (\frac{x}{2})^3 + o(x^3))^2 = -\frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$. f' a donc pour limite partielle $f'(0)$ en 0 à droite.

Ceci établit la continuité de f' en 0 donc que f est C^1 sur $[0; \pi]$.

4 COURBE PARAMÉTRÉE

CORRIGÉ

1° a) $(e') : z' + z \operatorname{th} t = 0$ est linéaire homogène du premier ordre. Une primitive de $-\operatorname{th}$ est $-\ln(\operatorname{ch})$. Donc les solutions de (e') sur \mathbb{R} sont les $\frac{k}{\operatorname{ch}}$ pour $k \in \mathbb{R}$. La solution prenant la valeur 1 en 0 est alors $g_1 = \left[t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} t} \right]$.

b) $(e) : z' + z \operatorname{th} t = t \operatorname{th} t$ est linéaire du premier ordre, son équation homogène associée est (e') .

La méthode de la variation de constante amène à chercher les solutions sous la forme $\frac{u}{\operatorname{ch}}$ avec $\forall t, \frac{u'(t)}{\operatorname{ch} t} = t \operatorname{th} t$ i.e. $\forall t, u'(t) = t \operatorname{sh} t$.

Une intégration par parties donne $\int t \operatorname{sh} t \, dt = \left[t \operatorname{ch} t \right] - \int \operatorname{ch} t \, dt = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (e) sur \mathbb{R} sont donc les $\left[t \mapsto t - \operatorname{th} t + \frac{k}{\operatorname{ch} t} \right], k \in \mathbb{R}$. La solution prenant la valeur 0 en 0 est alors $g_2 = \left[t \mapsto t - \operatorname{th} t \right]$.

2° On pose $(\Gamma) : \begin{cases} x = g_1(t) \\ y = g_2(t) \end{cases}$

a) g_1 est paire et g_2 est impaire. Ainsi (Γ) admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

b) Les variations de g_1 et g_2 sur $[0; +\infty[$ ne posent pas de problème et on a

| | | |
|-----------|---|-----------|
| t | 0 | $+\infty$ |
| $g_1'(t)$ | 0 | - |
| g_1 | 1 | 0 |
| $g_2'(t)$ | 0 | + |
| g_2 | 0 | $+\infty$ |

c) Le point $A(1, 0)$, de paramètre 0, est l'unique point stationnaire de ce paramétrage (Γ) . En 0, on a $g_1(t) = \frac{1}{1 + x^2/2 + o(x^2)} = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ et $g_2(t) = t - (t - t^3/3 + o(t^3)) = o(t^2)$. Ainsi (Γ) admet en A une tangente horizontale : l'axe des abscisses.

d) Au point A , la tangente à Γ a pour équation $y = 0$; elle recoupe l'axe des ordonnées en O , situé à la distance 1 de A .

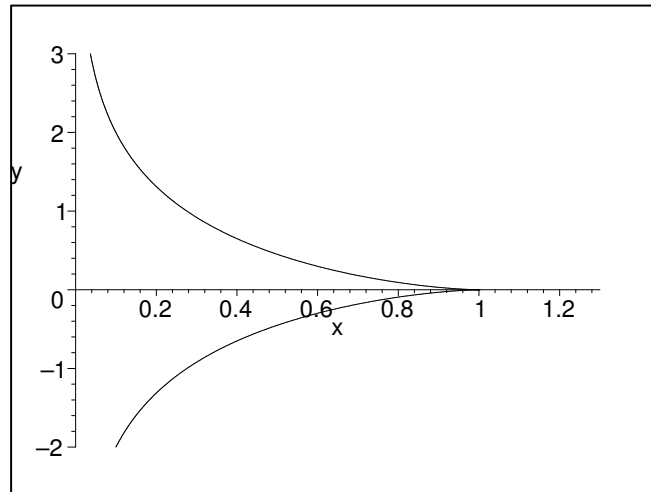
Le point M de paramètre $t \neq 0$ a pour coordonnées $(g_1(t), g_2(t))$. La tangente à Γ est dirigée en ce point par le vecteur de composantes $(g_1'(t), g_2'(t))$. Elle admet donc pour équation $g_2'(t)(x - g_1(t)) - g_1'(t)(y - g_2(t)) = 0$ donc $(\operatorname{sh} t)x + y = t$.

Elle recoupe l'axe des ordonnées en $N(0, t)$. La distance MN vaut 1, indépendamment de t .

e) Avec $c = \ln(1 + \sqrt{2})$ on a $\operatorname{sh} c = 1, \operatorname{ch} c = \sqrt{2}$ et $\operatorname{th} c = 1/\sqrt{2}$.

La tangente à (Γ) en M a pour coefficient directeur $\frac{g'_2(t)}{g'_1(t)} = -\operatorname{sh} t$. Elle a pour coefficient directeur -1 en le seul point $B(1/\sqrt{2}, \ln(1 + \sqrt{2}) - 1/\sqrt{2})$ de paramètre c puisque sh est bijective.

f) La branche infinie de (Γ) dégagée dans le tableau de variations admet immédiatement l'axe des ordonnées comme asymptote verticale. On a ainsi la courbe (Γ) :



F I N
