

• On pose $f_0 : [x \mapsto e^{-x}]$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : [x \mapsto x^k e^{-x}]$. On note $\mathcal{B}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ et $E_n = \text{Vect}(\mathcal{B}_n)$, où n est un entier positif choisi pour l'exercice.

1° \mathcal{B}_n est bien sûr une famille génératrice de E_n .

$\sum_{k=0}^n \alpha_k f_k = 0$ donne, pour tout x réel $\sum_{k=0}^n \alpha_k x^k e^{-x} = 0$ donc $\sum_{k=0}^n \alpha_k x^k = 0$. Or $(1, \dots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Ainsi \mathcal{B}_n est libre, c'est une base de E_n .

• On définit d sur E_n par $\forall f, d(f) = f'$ l'opérateur de dérivation.

2° a) $d(f_0) = -f_0$. Pour $k \geq 1$, $d(f_k) = k \cdot f_{k-1} - f_k$, de manière directe.

b) Les règles de dérivation des fonctions C^∞ donnent d est un endomorphisme de E_n .

3° a) Dans la base \mathcal{B}_n , d admet une matrice triangulaire de coefficients diagonaux égaux à -1. Ainsi $\det(d) = (-1)^{n+1}$.

b) $\det(d) \neq 0$ donc d est un automorphisme de E_n .

$$\mathbf{c) (s) : \begin{cases} g_0 = -f_0 \\ g_1 = -f_1 + f_0 \\ g_2 = -f_2 + 2 \cdot f_1 \\ \dots \\ g_n = -f_n + n \cdot f_{n-1} \end{cases} \iff \begin{cases} f_0 = -g_0 \\ f_1 = -g_1 - g_0 \\ f_2 = -g_2 - 2 \cdot g_1 - 2 \cdot g_0 \\ \dots \\ f_n = -g_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_n^{n-k} \cdot g_k \end{cases} \quad \text{établi par récurrence donne la matrice}$$

$\text{mat}_{\mathcal{B}_n}(d^{-1})$.

4° a) Soit $j \in \mathbb{N}$. La fonction $[x \mapsto x^j e^{-x}]$ est continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs positives ou nulles. Se plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^j e^{-x} x^2 = 0$ donc $x^j e^{-x} = o(x^2)$ au voisinage de $+\infty$. Le théorème de Riemann permet de conclure quant à l'intégrabilité de $[x \mapsto x^j e^{-x}]$ sur $[0, +\infty[$.

b) La question précédente donne $-\sum_{k=0}^j \mathbf{A}_j^{j-k} f_k$ primitive sur \mathbb{R} de f_j . Or $f_0(0) = 1$ et $f_k(0) = 0$ pour $k \geq 1$. Enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k = 0$ pour tout k . Donc $I_j = \int_0^{+\infty} x^j e^{-x} dx = -\mathbf{A}_j^j = -j!$.

c) Puisque toute combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $[0, +\infty[$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, on a donc que toute fonction de E_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\int_0^{+\infty} P(x) e^{-x} dx = \sum_{k=0}^n a_k I_k = -\sum_{k=0}^n k! a_k$ avec P défini par $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

• Pour φ et ψ dans E_n , on note $(\varphi | \psi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) \psi(x) e^x dx$.

5° a) $[(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi | \psi)]$ est bien sûr une application de E_n dans \mathbb{R} puisque toute fonction de E_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. Sa bilinéarité est immédiate.

b) La symétrie est immédiate aussi.

c) On peut remarquer que pour $f \in E_n$, f^2 est à valeurs positives ou nulles sur $[0, +\infty[$ et donc $(f | f) \geq 0$. Pour $\varphi \in E_n$, $(\varphi | \varphi) = 0$ impose, avec la remarque précédente, la nullité de l'intégrale de φ^2 sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$. Or φ^2 est continue à valeurs positives ou nulles sur $[0, +\infty[$ donc nulle.

On peut alors énoncer que $[(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi | \psi)]$ est un produit scalaire sur E_n et qu'il lui confère une structure d'espace vectoriel euclidien.

• Pour φ dans E_n , on note $\|\varphi\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \varphi(x)^2 e^x dx}$. Ceci est la norme associée au produit scalaire de la structure euclidienne.

6° a) L'inégalité triangulaire résulte de la démarche générale d'une norme euclidienne : Pour φ et ψ dans E_n , $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$.

b) Le théorème de Pythagore : $(\varphi | \psi) = 0$, on a $\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2$ aussi.

• On note $E_{n-1} = \text{Vect}(f_0, \dots, f_{n-1})$

$F_1 = \{g \in E_n / (g | h) = 0 \text{ pour tout } h \in E_{n-1}\}$.

7° a) (i) Soient $g \in F_1$, $g' \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a, pour tout $h \in E_{n-1}$, $(g | h) = 0$ et $(g' | h) = 0$.

Or $(g | h) + (g' | h) = ((g + g') | h)$, donc $((g + g') | h) = 0$; ainsi $(g + g') \in F_1$.

On a, pour tout $h \in E_{n-1}$, $(g | h) = 0$. Or $\lambda.(g | h) = (\lambda.g | h)$, donc $(\lambda.g | h) = 0$; ainsi $\lambda.g \in F_1$.

Ainsi F_1 est un sous-espace vectoriel de E_n .

(ii) Soit $g \in E_n$, $g = \sum_{k=0}^n a_k \cdot f_k$.

$$\begin{aligned} (s) : g \in F_1 &\iff [\forall j, 0 \leq j \leq (n-1), (g | f_j) = 0] \\ &\iff \begin{cases} \sum_{k=0}^n a_k (f_k | f_1) = 0 \\ \dots \\ \sum_{k=0}^n a_k (f_k | f_{n-1}) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système (s) est donc un système homogène de n équations et $(n+1)$ inconnues : a_0, \dots, a_n . Son ensemble des solutions, bien sûr en bijection avec F_1 est donc un espace vectoriel, de dimension au moins 1, puisque le rang est inférieur ou égal à $(n-1)$.

b) Soit $h \in E_{n-1}$. $h \in F_1$ rend nécessaire $(h | h) = 0$ donc $h = 0_E$. Ainsi $E_{n-1} \cap F_1 = \{0_E\}$ et E_{n-1} et F_1 sont en somme directe. Ayant $\dim(E_{n-1}) = n$ et $\dim(F_1) \geq 1$, on a E_{n-1} et F_1 supplémentaires dans E_n (et $\dim(F_1) = 1$).

• On note h_n le projeté de f_n sur E_{n-1} dans la direction F_1 .

On note $h_n = - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot f_j$.

8° a) $\|f_n - h_n\| = \inf_{g \in E_{n-1}} \|f_n - g\|$ vient de l'usage du théorème de Pythagore déjà établi.

b) Pour $0 \leq k \leq n-1$, on a $f_n - h_n \in F_1$ donc $(f_n - h_n | f_k) = 0$. Puisque $(f_\alpha | f_\beta) = I_{\alpha+\beta} = -(\alpha + \beta)!$, on a $\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)! = 0$.

9° $P = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (X+1) \dots (X+j) + (X+1)(X+2) \dots (X+n)$.

a) Pour $0 \leq k \leq n-1$, $P(k) = \frac{1}{k!} \left[a_0 k! + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (k+1)! + (k+n)! \right] = 0$ d'après la question précédente.

b) On a $d^\circ(P) = n$ et admet pour racines $0, \dots, (n-1)$. Son coefficient dominant est 1 donc $P = X(X-1) \dots (X-n+1)$. Alors $P(n) = n!$.

10° a) On a $f_n - h_n \in F_1$ et $h_n \in E_{n-1}$ donc $(f_n - h_n | h_n) = 0$ et donc $\|f_n - h_n\|^2 = (f_n - h_n | f_n - h_n) = (f_n - h_n | f_n)$.

$$\mathbf{b)} \inf_{Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} \int_0^{+\infty} (x^n - Q(x))^2 e^{-x} dx = \inf_{g \in E_{n-1}} \|f_n - g\|^2 = \|f_n - h_n\|^2$$

$$\text{Donc } \inf_{Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} \int_0^{+\infty} (x^n - Q(x))^2 e^{-x} dx = (f_n - h_n | f_n) = P(n) = n!.$$

F I N
