

$E = \mathbb{R}[X]$. Pour $p \in \mathbb{N}$, E_p désigne le sous-espace de E des polynômes de degré inférieur ou égal à p . Δ est l'application qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $\Delta(P) = P(X+1) - P$.

Partie A

1° a) Δ est une application de E .

$$\begin{aligned} \text{Pour } P \text{ et } Q \text{ dans } E, \quad \Delta(P+Q) &= (P+Q)(X+1) - (P+Q) \\ &= P(X+1) - P + Q(X+1) - Q \\ &= \Delta(P) + \Delta(Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } P \text{ dans } E \text{ et } \lambda \text{ réel, } \Delta(\lambda.P) &= (\lambda.P)(X+1) - (\lambda.P) \\ &= \lambda.(P(X+1) - P) \\ &= \lambda.\Delta(P) \end{aligned}$$

Ainsi Δ est un endomorphisme de E .

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad \Delta(1) &= 0 \\ \Delta(X) &= 1 \\ \Delta(X^2) &= 2X + 1 \\ \Delta(X^3) &= 3X^2 + 3X + 1 \end{aligned}$$

2° a) $\Delta(c) = 0$ pour c réel et pour P de E de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\Delta(P)$ est de degré $(n-1)$.

En effet P puisque Δ est linéaire, il suffit de caractériser les images des X^p . Or $\Delta(X^p) = (X+1)^p - X^p = \sum_{k=0}^{p-1} \mathbf{C}_p^k X^k$ donc de degré $(p-1)$.

b) On a ainsi, pour $n \geq 1$, $\Delta(E_n) \subset E_{n-1}$.

Réciproquement, la description des $\Delta(X^p)$ permet d'obtenir par récurrence l'inclusion réciproque. De $\Delta(1) = 0$ et $\Delta(X) = 1$ on tire $\Delta(E_1) = E_0$. En admettant $\Delta(E_n) = E_{n-1}$ pour un n donné, avec $\Delta(X^{n+1}) = (n+1)X^n + S$ et $S \in E_{n-1}$, on a $S \in \Delta(E_n)$ et donc $(n+1)X^n \in \Delta(E_{n+1})$. Ainsi le résultat pour tout n .

3° $P \in \text{Ker}(\Delta)$ impose $\Delta(P) = 0$ donc P de degré négatif ou nul. La réciproque est connue, et donc $\text{Ker}(\Delta) = E_0$.

4° Soit $Q \in E_{n-1}$. On a $Q \in \Delta(E_n)$, et on a donc $M \in E_n$ tel que $\Delta(M) = Q$. En posant $P = M - \int_0^1 M$, on a $\begin{cases} \Delta(P) = Q \\ \int_0^1 P(x) dx = 0 \end{cases}$. De plus $\Delta(\Pi) = Q$ impose $P - \Pi \in E_0$; or $\int_0^1 k = k$. Ainsi P unique de E_n tel que $\begin{cases} \Delta(P) = Q \\ \int_0^1 P(x) dx = 0 \end{cases}$

Partie B

$$B_0 = 1 \text{ et pour } n \geq 1, B_n \text{ unique polynôme tel que } \begin{cases} \Delta(B_n) = n X^{n-1} \\ \int_0^1 B_n(x) dx = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{1°} \quad B_1 = X - \frac{1}{2} \text{ et } B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}.$$

2° B_n est de degré n puisque $\Delta(B_n)$ est de degré $(n-1)$. Son coefficient dominant d_n est tel que $d_n \Delta(X^n)$ a pour terme de plus haut degré $n X^{n-1}$. Donc $d_n = 1$, B_n est unitaire.

3° a) $\Delta(B_n) = n X^{n-1}$ donc $\Delta(B_n)(0) = 0$ et donc $B_n(1) = B_n(0)$ pour $n \geq 2$.

b) Remarquons $(\Delta(P))' = (P(X+1) - P)' = P'(X+1) - P' = \Delta(P')$, pour P quelconque.

$$\begin{aligned} n \neq 0. \text{ On a alors } \Delta(B'_n - n B_{n-1}) &= \Delta(B'_n) - n \Delta(B_{n-1}) \\ &= (\Delta(B_n))' - n(n-1) X^{n-2} \\ &= (n X^{n-1})' - n(n-1) X^{n-2} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $B'_n - n B_{n-1} \in E_0$, polynôme constant. Il est nul et $B'_n = n B_{n-1}$ puisque $\int_0^1 (B'_n - n B_{n-1}) = B_n(1) - B_n(0) - n \int_0^1 B_{n-1} = 0$.

c) De $B'_3 = 3 B_2$ on déduit $B_3 = X^3 - \frac{3}{2} X^2 + \frac{1}{6} X$.

4° a) $S_n = (-1)^n B_n(1-X)$. $\Delta(S_n) = S_n(X+1) - S_n$

$$\begin{aligned} &= (-1)^n (B_n(-X) - B_n(1-X)) \\ &= (-1)^n (-\Delta(B_n)(-X)) \\ &= (-1)^n (-n(-X)^{n-1}) \\ &= \Delta(B_n) \end{aligned}$$

b) On a alors $S_n - B_n$ constant. Or $S_n(0) = B_n(1) = B_n(0)$ donc $S_n = B_n$ i.e. $B_n = (-1)^n B_n(1-X)$.

c) k non nul, $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1)$ et $B_{2k+1}(0) = (-1)^{2k+1} B_{2k+1}(1)$ donc $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = 0$. De plus $B_{2k+1}(1/2) = (-1)^{2k+1} B_{2k+1}(1/2)$ donc $B_{2k+1}(1/2) = 0$.

Ainsi B_{2k+1} admet 0, 1/2 et 1 pour racines.

5° a) $T_n = 2^{n-1} \left(B_n \left(\frac{X}{2} \right) + B_n \left(\frac{X+1}{2} \right) \right)$

$$\begin{aligned} \Delta(T_n) &= T_n(X+1) - T_n \\ &= 2^{n-1} \left(B_n \left(\frac{X+1}{2} \right) + B_n \left(\frac{X+2}{2} \right) - B_n \left(\frac{X}{2} \right) - B_n \left(\frac{X+1}{2} \right) \right) \\ &= 2^{n-1} \Delta(B_n) \left(\frac{X}{2} \right) \\ &= 2^{n-1} n \left(\frac{X}{2} \right)^{n-1} \\ &= \Delta(B_n) \end{aligned}$$

b) On a alors $T_n - B_n$ constant.

Or $\int_0^1 T_n = 2^{n-1} \left(\int_0^1 B_n \left(\frac{x}{2} \right) dx + \int_0^1 B_n \left(\frac{x+1}{2} \right) dx \right)$

$$\begin{aligned} &= 2^{n-1} \left(2 \int_0^{1/2} B_n(x) dx + 2 \int_{1/2}^1 B_n(x) dx \right) \\ &= 2^n \int_0^1 B_n = 0 \end{aligned}$$

D'où $B_n = 2^{n-1} \left(B_n \left(\frac{X}{2} \right) + B_n \left(\frac{X+1}{2} \right) \right)$ pour tout n .

c) Alors, k non nul, $B_{2k}(0) = B_{2k}(1) = 2^{2k-1} (B_{2k}(1/2) + B_{2k}(1))$ et donc $B_{2k} \left(\frac{1}{2} \right) = (-1 + 2^{1-2k}) B_{2k}(0)$.

6° a) $B_3 = X^3 - \frac{3}{2} X^2 + \frac{1}{6} X$ donc B_3 est scindé de racines 0, 1/2 et 1.

Ainsi B_3 positif sur $]0, 1/2[$. B_4 strictement croissant sur $]0, 1/2[$ admet au plus une racine sur cet intervalle. Or $B_4 \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{7}{8} B_4(0)$ donne par le théorème des valeurs intermédiaires sur B_4 continu l'existence d'une racine à B_4 sur $]0, 1/2[: a_4$. Alors B_4 négatif ou nul sur $[0, a_4]$ et positif ou nul sur $[a_4, 1/2]$. Ainsi B_4 décroissant sur $[0, a_4]$ et croissant sur $[a_4, 1/2]$. De $B_5(0) = B_5(1/2) = 0$ on déduit que B_5 ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$.

b) On montre par récurrence sur le principe précédent que pour tout entier k non nul, B_{2k} admet une unique racine dans $]0, 1/2[$ et que B_{2k+1} n'en a pas.

c) On a alors B_{2k} monotone sur $[0, 1/2]$ et sur $[1/2, 1]$. Or $B_{2k}(0) = B_{2k}(1)$ et $|B_{2k}(0)| > |B_{2k}(1/2)|$. Donc $|B_{2k}|$ atteint son maximum sur $[0, 1]$ en 0.

Partie C

f est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}
 1^\circ \quad \int_0^1 f''(x) B_2(x) dx &= [f'(x) B_2(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x) 2B_1(x) dx \\
 &= B_2(0) (f'(1) - f'(0)) - 2 [f(x) B_1(x)]_0^1 \\
 &\quad + 2 \int_0^1 f(x) B_0(x) dx \\
 &= B_2(0) (f'(1) - f'(0)) - (f(0) + f(1)) \\
 &\quad + 2 \int_0^1 f(x) dx
 \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad n \text{ non nul et } R_n = \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 f^{(2n)}(x) B_{2n}(x) dx.$$

On note \mathcal{P}_n l'énoncé :

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] + R_n$$

La question précédente donne \mathcal{P}_1 .

$$\begin{aligned}
 \text{De } (2n+2)! R_{n+1} &= \int_0^1 f^{(2n+2)}(x) B_{2n+2}(x) dx \\
 &= [f^{(2n+1)}(x) B_{2n+2}(x)]_0^1 \\
 &\quad - \int_0^1 f^{(2n+1)}(x) (2n+2) B_{2n+1}(x) dx \\
 &= B_{2n+2}(0) (f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) \\
 &\quad - (2n+2) [f^{(2n)}(x) B_{2n+1}(x)]_0^1 \\
 &\quad + (2n+2) \int_0^1 f^{(2n)}(x) (2n+1) B_{2n}(x) dx \\
 &= B_{2n+2}(0) (f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) + (2n+2)! R_n
 \end{aligned}$$

on déduit \mathcal{P}_{n+1} lorsque \mathcal{P}_n est vérifié. Le théorème de récurrence permet de conclure.

$$3^\circ \quad \text{Le théorème de la moyenne donne } |R_n| \leq \frac{\sup_{[0,1]} |f^{(2n)}|}{(2n)!} \int_0^1 |B_{2n}(t)| dt \text{ donc } |R_n| \leq \sup_{[0,1]} |f^{(2n)}| \frac{|B_{2n}(0)|}{(2n)!}$$

F I N
