

Partie A

On note E le \mathbb{C} -espace vectoriel des suites de complexes. Soient des réels b, c, d des réels fixés. On note S l'ensemble des éléments u de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$$

puis S_d l'ensemble des éléments v de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} + b v_{n+1} + c v_n = d$$

1° Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

2° a) Dans le cas où l'équation $(c) : r^2 + b r + c = 0$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2 , montrer que pour tout élément u de S on trouve α et β tels que $\forall n, u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.

b) Dans le cas où l'équation $(c) : r^2 + b r + c = 0$ admet une racine double r_0 , montrer que pour tout élément u de S on trouve α et β tels que $\forall n, u_n = (\alpha n + \beta) r_0^n$.

3° Justifier que S_d n'est pas vide, puis que c'est une variété linéaire affine de E de direction S .

Partie B

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . & . \\ 0 & -1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 2 & -1 \\ 0 & . & . & . & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrice carrée d'ordre n , et on étudie les systèmes linéaires $A X = B$. On

identifiera les vecteurs de \mathbb{R}^n (l'élément (x_1, \dots, x_n) par exemple) et les matrices colonnes de n lignes (la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ par exemple).

1° Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^n . On pose conventionnellement $y_{n+1} = y_0 = 0$.

a) Donner le coefficient de la ligne i de $A Y$ pour $1 \leq i \leq n$.

b) En déduire ${}^t Y A Y = \sum_{k=0}^n (y_{k+1} - y_k)^2$.

c) Établir que l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} , $[(X, Y) \mapsto {}^t Y A X]$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

On notera désormais $(X | Y)_A = {}^t Y A X$ et $\|X\|_A = \sqrt{{}^t X A X}$.

2° Soit λ dans \mathbb{C} .

a) Montrer que λ est valeur propre de A (considérée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), si et seulement si il existe une suite finie $(u_p)_{0 \leq p \leq n}$ de complexes telle que

$$\begin{cases} u_0 = u_{n+1} = 0 & (1) \\ \exists j \in [1, n], u_j \neq 0 & (2) \\ \forall p \in [1, n], u_{p+1} + (\lambda - 2) u_p + u_{p-1} = 0 & (3) \end{cases}$$

b) On recherche les suites de complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (1), (2) et (3') avec

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_{p+1} + (\lambda - 2) u_p + u_{p-1} = 0 \quad (3')$$

On note r_1 et r_2 les racines de $r^2 + (\lambda - 2)r + 1 = 0$.

(i) Montrer que si $r_1 = r_2$ on arrive à une contradiction.

(ii) On suppose $r_1 \neq r_2$. Montrer alors que $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$ puis qu'il existe $p \in [1, n]$ tel que $r_1 = e^{i \frac{p\pi}{n+1}}$ et $r_2 = e^{-i \frac{p\pi}{n+1}}$.

(iii) En déduire que les valeurs propres de A sont les réels $\lambda_p = 4 \sin^2 \frac{p\pi}{2(n+1)}$, pour $1 \leq p \leq n$, chacun associé au

vecteur propre $v_p = \begin{pmatrix} \sin \frac{p\pi}{n+1} \\ \sin \frac{2p\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{np\pi}{n+1} \end{pmatrix}$

3° Soit $\theta = \frac{2p\pi}{n+1}$.

a) Calculer $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta}$.

b) En déduire $\|v_p\| = \sqrt{\frac{n+1}{2}}$

c) Trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale Δ d'ordre n telles que $P^{-1} A P = \Delta$.

Partie C

On décompose la matrice A sous la forme $A = D - C - {}^t C$ avec $D = 2 I_n$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 1 & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le système linéaire $A X = B$ peut s'écrire $(D - {}^t C) X = C X + B$ ou $D X = (C + {}^t C) X + B$.

On construit deux suites de vecteurs de \mathbb{R}^n , de terme général X_k et Z_k , définies par

$$X_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall k, (D - {}^t C) X_{k+1} = C X_k + B \quad (4)$$

$$Z_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall k, D Z_{k+1} = (C + {}^t C) Z_k + B \quad (5)$$

On prend le cas particulier $n = 3$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_0 = Z_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et pour tout k on note $X_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}$ et $Z_k = \begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ z_2^{(k)} \\ z_3^{(k)} \end{pmatrix}$

1° Reproduire et compléter les tableaux :

Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
4				
4				
4				

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
4				
4				
4				

2° Pour $k \geq 2$, calculer X_k en fonction de $\frac{1}{2^k}$ puis calculer $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k$.

3° Montrer que $z_1^{(k+2)} - \frac{1}{2} z_1^{(k)} = \frac{3}{2}$. En déduire $z_1^{(k)}$ en fonction de k , puis Z_k .

Calculer $\lim_{k \rightarrow \infty} Z_k$.

4° Que peut-on dire des limites obtenues aux questions précédentes vis à vis du système $AX = B$?

5° Soit $u = A^{-1}B$. Déterminer des entiers p et q tels que $\|X_p - u\|_\infty < 10^{-3}$ et $\|Z_q - u\|_\infty < 10^{-3}$
(avec $\|(a, b, c)\|_\infty = \max(|a|, |b|, |c|)$).

Quelle conclusion tirez-vous de cette comparaison ?

F I N
