

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1 où l'on réduit des matrices pour améliorer leur puissance (10 points)

On considère $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{R})$; et on se propose de calculer M^n de plusieurs façons.

1° On pose $A = \frac{1}{3}(M - I_3)$

a) Calculer A^2 .

b) Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_n$ de réels tels que $\forall n \ M^n = I_3 + u_n \cdot A$. Donner u_n en fonction de n .

c) En déduire l'expression de M^n .

2° On pose $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis E le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$: $E = \{a \cdot I_3 + b \cdot J \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a) Calculer J^2 . J est-elle inversible ?

b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

c) E est-il stable par produit ? Quelle structure algébrique remarquable peut-on en déduire ?

d) Quels sont les éléments inversibles de E ? Donner l'inverse d'un tel élément.

e) Résoudre dans E les équations d'inconnue X : (i) : $X^2 = I_3$ (ii) : $X^2 = X$.

f) Montrer que M est élément de E . En déduire l'expression de M^n .

3° On note φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont M est la matrice relativement à \mathcal{C} , la base canonique de \mathbb{R}^3 .

a) Quelles sont les valeurs propres de φ ?

b) Prouver qu'il existe une base \mathcal{B} dans laquelle φ ait pour matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) Donner la matrice de passage P de \mathcal{C} à \mathcal{B} . Calculer P^{-1} .

EXERCICE 2

où l'on cherche des courbes intégrales

(10 points)

On note (E) l'équation différentielle $x(2-x)y' + (1-x)y - 1 = 0$.

0° Donner l'ensemble de définition et la fonction dérivée de $\psi : [x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]$

1° A tout élément x de l'intervalle $]0, 2[$ et à tout ϵ de $]0, x[$, on associe l'intégrale $F_\epsilon(x) = \int_\epsilon^x \frac{dt}{\sqrt{t(2-t)}}$

a) Calculer $F_\epsilon(x)$ en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{t/2}$. Montrer que pour tout x de $]0, 2[$, $F_\epsilon(x)$ admet une limite réelle lorsque ϵ tend vers 0.

On notera $F(x)$ la limite de $F_\epsilon(x)$ lorsque ϵ tend vers 0, i.e. $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(2-t)}}$

b) Caractériser les solutions sur l'intervalle $]0, 2[$ de l'équation homogène (E') associée à (E) .

c) Déterminer sur cet intervalle $]0, 2[$ une expression générale des solutions de (E) .

d) Démontrer qu'il existe une solution Φ de (E) sur $]0, 2[$ et une seule, admettant une limite réelle en 0 et exprimer cette solution à l'aide de F .

2° A tout élément x de l'intervalle $] - \infty, 0[$ et à tout ϵ de $]x, 0[$, on associe l'intégrale $G_\epsilon(x) = \int_x^\epsilon \frac{dt}{\sqrt{t(t-2)}}$

a) Montrer que pour tout x de $] - \infty, 0[$, $G_\epsilon(x)$ admet une limite réelle lorsque ϵ tend vers 0.

On notera $G(x)$ la limite de $G_\epsilon(x)$ lorsque ϵ tend vers 0, i.e. $G(x) = \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{t(t-2)}}$

b) Donner les solutions de (E) sur l'intervalle $] - \infty, 0[$.

c) Démontrer qu'il existe une solution Ψ de (E) sur $] - \infty, 0[$ et une seule, admettant une limite réelle en 0 et exprimer cette solution à l'aide de G .

3° Déterminer l'expression générale des solutions de (E) sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

4° a) On suppose qu'il existe une unique solution de (E) sur $] - \infty, 2[$ de classe C^1 , que l'on notera f . Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

b) Avec l'hypothèse et la notation précédente, déterminer les restrictions de f à $] - \infty, 0[$ puis à $]0, 2[$.

c) Montrer l'existence et l'unicité d'une fonction f , solution de (E) sur $] - \infty, 2[$. (indication : on pourra déterminer les développements limités de Φ et de Ψ d'ordre 1 en 0).

5° Montrer qu'il existe une solution g et une seule de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$. (à cet effet, on pourra, par exemple, utiliser dans l'équation différentielle (E) , le changement de variable $t = 2 - x$).

6° Etudier l'existence éventuelle de solutions de (E) sur \mathbb{R} .

F I N