

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(6 points)

Soit l'équation (e) : $x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0$ où a et b sont des coefficients réels. (on appelle solution de (e) dans \mathbb{C} tout élément α de \mathbb{C} tel que $f(\alpha) = 0$ où $f : [x \mapsto x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1]$).

1° (e) admet dans \mathbb{C} la solution non réelle x_0 de module différent de 1.

a) Démontrer que l'équation (e) a aussi pour solutions dans \mathbb{C} les nombres $\overline{x_0}$ (le conjugué de x_0) et $\frac{1}{x_0}$ (l'inverse de x_0).

b) Quel est alors l'ensemble des solutions de (e) ?

2° a) Déterminer a et b sachant que l'équation (e) admet pour solution le nombre $\rho e^{i\theta}$ où ρ et θ sont deux réels tels que $0 < \rho < 1$ et $0 < \theta < \pi$.

b) Résoudre dans ce cas (e) dans \mathbb{C}

c) Mettre $f(x)$, si c'est possible, sous la forme d'un produit de deux fonctions polynomiales à coefficients réels.

EXERCICE 2

(8 points)

préliminaire

On rappelle que la constante γ d'Euler est définie comme $\lim_n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma$.

1° Donner un équivalent simple de la suite de terme général $G_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.

$$(x_n)_n \text{ définie par } x_0 > 0 \text{ et } \forall n, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$

1° x_0 est fixé, étude du comportement limite de x_n .

a) Etablir la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.

c) Etablir que pour $n \geq 1$, on a $x_n^2 = x_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$.

d) En déduire $\forall n, x_n^2 \geq 2n$.

e) Déterminer le réel K tel que $x_n \sim K\sqrt{n}$.

2° Chaque n est fixé, on cherche les effets du choix de x_0 variable sur les valeurs prises par la suite. On note désormais $x_0 = t$ la variable.

a) Etablir : $\forall n, x_n \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t$

b) En déduire : $\forall n, x_n = t + \frac{n}{t} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)$

c) Prouver l'existence d'une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n, x_n = t + \frac{n}{t} + \frac{b_n}{t^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^3}\right)$.

Exprimer b_n en fonction de n .

EXERCICE 3

(6 points)

La suite réelle $(u_n)_n$ est définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.

1° Montrer que, pour tout réel $a \geq 0$, on a $\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(1 + a)$.

2° Prouver : $\forall n \geq 1, \sqrt{n-1} \leq u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

3° Démontrer : $u_n \sim \sqrt{n}$

4° Soit posé $\forall n, w_n = u_n - \sqrt{n}$.

Etablir que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et en donner la limite.

5° Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

F I N