

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**EXERCICE 1****apéritif**

( 2 points)

Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  le système 
$$\begin{cases} x + y = 42 \\ \text{ppcm}(x, y) = (\text{pgcd}(x, y))^2 \end{cases}$$

**EXERCICE 2****entrée**

( 5 points)

**1°**  $p$  est un nombre premier.**a )** Justifier que  $p$  divise  $C_p^k$  pour  $0 < k < p$ .**b )** En déduire que pour tout  $a$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $(a + 1)^p$  et  $a^p + 1$  ont le même reste dans la division par  $p$ .**c )** Prouver alors que pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ ,  $n^p$  et  $n$  ont même reste dans la division par  $p$ .<sup>1</sup>**2°** application : sachant que 307 est premier, justifier que 6447 divise  $(2^{306} - 1)$ **PROBLÈME****plat principal**

( 13 points)

On définit sur  $[0, +\infty[$  la fonction  $f$  par :  $f(0) = 0$  et pour  $x \neq 0$ ,  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ .

**1°** Étude de  $f$ .**a )** Faire l'étude locale de  $f$  en 0 :  $f$  est-elle continue en 0, est-elle dérivable en 0 ?**b )** Donner le plus grand intervalle sur lequel la fonction est de classe  $C^1$ .**c )** Faire l'étude des variations de  $f$  sur son ensemble de définition.

<sup>1</sup>ce résultat est connu sous le nom de "petit théorème de Fermat".

**2°** On note  $\mathcal{C}$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**a )** Tracer  $\mathcal{C}$  (sans perdre trop de temps).

**b )** Montrer qu'il existe dans  $\mathcal{C}$  un point  $A$  unique, distinct de  $O$ , en lequel la tangente à  $\mathcal{C}$  passe par  $O$ .

**c )** Montrer qu'il existe dans  $\mathcal{C}$  un point  $B$  unique, distinct de  $A$ , en lequel la tangente est parallèle à  $(OA)$ . On notera  $b$  l'abscisse de  $B$ .

**3°** Soit  $\gamma : \left[ x \mapsto \frac{1}{1 - 2 \ln x} \right]$ .

**a )** Montrer que  $\gamma$  est prolongeable par continuité en 0. On notera  $g$  ce prolongement.

**b )** La fonction  $g$  est-elle dérivable en 0 ?

**c )** Étudier les variations de  $g$ .

**d )** Montrer que les solutions de l'équation  $g(x) = x$  sont 0, 1 et  $b$ . Étudier le signe de  $g(x) - x$  sur  $[0, 1]$ .

**e )** Justifier que la suite  $(u_n)_n$ , définie par  $u_0 \in ]0, 1[$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$  pour tout  $n$ , converge vers  $b$ .

**4°** On rappelle que lorsqu'une fonction polynomiale  $S$  est telle que

$$\forall x \quad S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p$$

avec  $a_p \neq 0$ , on dit que  $S$  est de degré  $p$ , et que son coefficient dominant est  $a_p$ .

**a )** Montrer qu'il existe une suite  $(P_n)_n$  de fonctions polynomiales telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} f(x)$$

Préciser avec exactitude la relation de récurrence qui exprime, pour tout  $x$ ,  $P_{n+1}(x)$  en fonction de  $x$ ,  $P_n(x)$  et  $P'_n(x)$ .

**b )** Donner explicitement les fonctions  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .

**c )** Déterminer le degré de  $P_n$ , son coefficient dominant et sa valeur en 0.

**d )** Vérifier :  $\forall x > 0, x^2 f'(x) = f(x)$ , puis démontrer (penser éventuellement à la formule de Leibniz)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x > 0 \quad P_{n+1}(x) + (2nx - 1) P_n(x) + n(n - 1)x^2 P_{n-1}(x) = 0$$

**e )** Dédurre de ce qui précède la relation  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x > 0 \quad P'_n(x) = -n(n - 1) P_{n-1}(x)$ .

**f )** Donner une équation différentielle linéaire homogène de second ordre dont  $P_n$  est solution, i.e. trouver trois fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$  telles que :

$$\forall x \quad a(x) P''_n(x) + b(x) P'_n(x) + c(x) P_n(x) = 0$$

---

F I N

---

... après ces nourritures de l'esprit, vous en méritez d'autres... bon appétit