

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**quelque logique**

(1 points)

Ecrire la négation de l'assertion : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (|a - b| < \alpha \Rightarrow |\sin a - \sin b| < \epsilon)$.

EXERCICE 2**bonne résolution**

(3 points)

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation d'inconnue a : $1 + 2a < \sqrt{3 + a - a^2}$.

EXERCICE 3**entiers et parties**

(3 points)

Pour m et n quelconques dans \mathbb{Z} , montrer : $E\left(\frac{n+m}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$.

EXERCICE 4**avec un peu de relation**

(2 points)

Dans l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} on définit la relation binaire \mathfrak{R} :

$$f \mathfrak{R} g \iff \exists A > 0 \quad \forall x (|x| > A \implies f(x) = g(x))$$

Est-elle une relation d'équivalence ?

EXERCICE 5**supériorités**

(4 points)

X et Y sont deux parties non vides bornées de \mathbb{R} .

1° Justifier que $X \cup Y$ admet une borne supérieure.

2° Démontrer que $\sup(X \cup Y)$ est le plus grand élément de $\{\sup(X), \sup(Y)\}$.

EXERCICE 6

connection française ?

(3 points)

Soit E un ensemble. Sur l'ensemble des parties de E on définit la connection de Sheffer par : $X | Y = \bar{X} \cup \bar{Y}$ (où \bar{X} et \bar{Y} notent les complémentaires de X et Y)

- 1° Pour A une partie quelconque de E , écrire plus simplement les ensembles $A | \emptyset$, $E | A$ et $A | A$.
- 2° Pour A et B des parties quelconques de E , démontrer $((A | A) | (B | B)) = A \cup B$.
- 3° Donner une formule n'utilisant que le connecteur $|$ égale à $A \cap B$.

EXERCICE 7

Vrai/Faux

(4 points)

Répondre Vrai ou Faux à chacune de ces propositions, dans un tableau à tracer sur sa copie dans le genre de celui qui est donné. Aucune justification n'est demandée.

| | a) | b) | c) | d) |
|----|----|----|----|----|
| 1° | | | | |
| 2° | | | | |
| 3° | | | | |

- 1° L'assertion \mathcal{A} est définie pour x dans \mathbb{R} par : " $\sqrt{1-x} \geq 1-x^2$ "
 - a) Pour \mathcal{A} , " $x \leq 1$ " est nécessaire
 - b) Pour \mathcal{A} , " $x < -1$ " est suffisant
 - c) Pour \mathcal{A} , " $x \in [-1, 1]$ et $x \geq 0$ " est suffisant
 - d) Pour \mathcal{A} , " $1-x \geq (1-x^2)^2$ " est suffisant
- 2° Ordre dans \mathbb{R} et inégalités remarquables
 - a) Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si les deux réels sont positifs ou nuls.
 - b) L'inégalité triangulaire donne : " $|a-b| \geq |a| - |b|$ pour tous réels a et b "
 - c) L'inégalité de Schwarz s'écrit : $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$
 - d) L'inégalité de Minkowski s'écrit : $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\right) + \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}\right)$
- 3° Soit la fonction f de E dans F
 - a) F est l'ensemble image de f
 - b) si A et B sont des parties de E , alors $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 - c) $\mathcal{D}_f = E$
 - d) si $E = \emptyset$, alors f est injective.

F I N