

## 1 GÉOMÉTRIE COMPLEXE

CORRIGÉ

Dans le plan  $\mathcal{P}$ , un repère orthonormal  $\mathcal{R}$  étant choisi, les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ont pour affixes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  qui vérifient

$$\begin{cases} a + ib = c + id \\ a + c = b + d. \end{cases}$$

a) On a  $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$  donc  $[AC]$  et  $[BD]$  ont même milieu :  $ABCD$  est un parallélogramme.

De plus  $(c-a) = i(b-d)$  dont les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{DB}$  sont orthogonaux de même longueur :  $ABCD$  est un carré.

b) Soit  $Z$ , d'affixe  $z = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$  le centre de ce carré. On a  $(z-d) = \frac{b-d}{2}$ ,  $(z-a) = \frac{c-a}{2} = i(z-d)$ ,  $(z-c) = \frac{a-c}{2} = -i(z-d)$  et  $(z-b) = \frac{d-b}{2} = -(z-d)$ . Donc  $(z-a)^4 = (z-b)^4 = (z-c)^4 = (z-d)^4$ .

## 2 GÉOMÉTRIE BARYCENTRIQUE

CORRIGÉ

$ABC$  triangle isocèle avec  $AB = AC = 4$  et  $BC = 2$ ;  $I$  est le milieu de  $[BC]$ .

a)  $k \neq -2$ . Le barycentre  $G_k$  de  $\{(A, k), (B, 1), (C, 1)\}$  est le barycentre de  $\{(A, k), (I, 2)\}$  donc  $\overrightarrow{AG_k} = \frac{1}{k+2} \cdot \overrightarrow{AI}$ . L'ensemble des  $G_k$   $k$  décrivant  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  est la droite  $(AI)$  privée de  $A$ .

b)  $\mathcal{C}_1 = \{M / MA^2 = MB^2 + MC^2\}$ .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_1 &\iff (\overrightarrow{MG_{-1}} + \overrightarrow{G_{-1}A})^2 - (\overrightarrow{MG_{-1}} + \overrightarrow{G_{-1}B})^2 - (\overrightarrow{MG_{-1}} + \overrightarrow{G_{-1}C})^2 = 0 \\ &\iff MG_{-1}^2 = G_{-1}A^2 - G_{-1}B^2 - G_{-1}C^2 \end{aligned}$$

Or  $I$  milieu de  $[AG_{-1}]$  donc  $G_{-1}B^2 = G_{-1}C^2 = 16$  et  $G_{-1}A^2 = (2 \cdot IG_{-1})^2 = 60$ . Donc  $\mathcal{C}_1$  est le cercle de centre  $G_{-1}$  et de rayon  $2\sqrt{7}$ .

c)  $\mathcal{C}_2 = \{M / MA^2 + MB^2 + MC^2 = 14\}$ .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_2 &\iff (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A})^2 + (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1B})^2 + (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1C})^2 = 14 \\ &\iff 3MG_1^2 = 14 - G_1A^2 - G_1B^2 - G_1C^2 \end{aligned}$$

Or  $A$ ,  $G_1$  et  $I$  alignés avec  $3 \cdot AG_1 = 2 \cdot AI$ ; donc  $G_1B^2 = G_1C^2 = \frac{8}{3}$  et  $G_1A^2 = \frac{20}{3}$ . Donc  $\mathcal{C}_2$  est le cercle de centre  $G_1$  et de rayon  $\sqrt{2/3}$ .

d)  $\mathcal{C}_3 = \{M / -2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 32\}$ .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_3 &\iff -2MA^2 + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})^2 = 32 \\ &\iff \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 32 - AB^2 - AC^2 \\ &\iff \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{AI} \end{aligned}$$

puisque  $AB = AC = 4$ . Donc  $\mathcal{C}_3$  est la droite orthogonale à  $\overrightarrow{AI}$  passant par  $A$ , c'est la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A$ .

$$A = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

1° ( $e_1$ ) :  $y'' + y = 0$  est linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est  $r^2 + 1 = 0$ . Elle a pour solutions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  les  $\left[ x \mapsto a \cdot \cos x + b \cdot \sin x \right]$  où  $a$  et  $b$  sont réels quelconques.

2°  $I$  un intervalle ne contenant pas 0 et ( $e_2$ ) :  $x^4 y'' + y = 0$ .

a) Pour une fonction numérique  $g$  deux fois dérivable sur  $I$  on peut définir la fonction  $f$  par  $f(x) = x \cdot g\left(\frac{1}{x}\right)$  sur l'intervalle  $J$  formé des inverses des éléments de  $I$ .

On a alors  $f$  deux fois dérivable sur  $J$  et, pour  $x \in J$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} g'\left(\frac{1}{x}\right) \\ f''(x) &= \frac{1}{x^3} g''\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

b) Compte tenu des dérivabilités de  $f$  et de  $g$ ,

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (e_2) \text{ sur } I &\iff \forall x \in I \quad x^4 g''(x) + g(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in I \quad x^4 \frac{1}{x^3} f''\left(\frac{1}{x}\right) + x f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ &\iff \forall x \in J \quad \frac{1}{x} (f''(x) + f(x)) = 0 \\ &\iff f \text{ solution de } (e_1) \text{ sur } J. \end{aligned}$$

c) Les solutions de ( $e_2$ ) sur l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$ , et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  sont donc les  $\left[ x \mapsto x f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$  où  $f$  est solution de ( $e_1$ ) sur  $J = ]0, +\infty[$ , donc les  $\left[ x \mapsto x \left( a \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + b \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right]$  où  $a$  et  $b$  sont des réels quelconques.

3° Soit  $g$  une solution de l'équation ( $e_2$ ), définie sur  $I = ]0, +\infty[$ .

a) Puisque pour tout  $x$  de  $I$  on a  $-g''(x) = \frac{1}{x^4} g(x)$ , on déduit que  $(-g')$  est une primitive sur  $I = ]0, +\infty[$  de la fonction  $\left[ x \mapsto \frac{1}{x^4} g(x) \right]$ .

b) En utilisant la solution  $g : \left[ x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right]$ , on tire

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^4} g(x) dx \\ &= \left[ -g'(x) \right]_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} = \left[ -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right]_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} = \pi - 1 \end{aligned}$$

---

F I N

---