

*remarques :*

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## DEVOIR D'ALGÈBRE

(noté sur 10 points environ)

durée conseillée 1 heure 50 ; en aucun cas n'y passer plus de 2 heures 20

EXERCICE 1

## algèbre générale

( ~ 5 points )

Soit dans  $\mathbb{R}(X)$  la fraction  $F = \frac{1}{1 - X^2}$ .

1° Décomposer  $F$  en éléments simples.

2°  $n$  désigne un entier naturel non nul. Déterminer le réel  $c_n$  tel que  $F^{(n)} = c_n \left( \frac{1}{(X+1)^{n+1}} - \frac{1}{(X-1)^{n+1}} \right)$  (ici  $F^{(n)}$  désigne la fraction dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $F$ ).

3° a) Montrer l'existence d'un polynôme  $P_n$  de  $\mathbb{R}[X]$ , à coefficients entiers, tel que  $F^{(n)} = \frac{P_n}{(1 - X^2)^{n+1}}$

b) Donner  $P_0, P_1, P_2$ .

c) Préciser le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .

d) Déterminer les racines de  $P_n$  dans  $\mathbb{C}$ .

EXERCICE 2

## algèbre linéaire

( ~ 5 points )

Soit  $m$  un nombre réel et soit  $f$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & m & -4 \\ -5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

1° Pour quelles valeurs de  $m$  l'application  $f$  est-elle un automorphisme de  $E$  ?

2° Donner en fonction de  $m$  le rang de  $f$ .

3° On suppose ici  $m = 1$  :  $P$  est le plan de  $E$  d'équation  $4x + 7y + 3z = 0$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Donner une équation dans la base  $\mathcal{B}$  de  $P' = f(P)$ .

4° On suppose ici  $m = -1$  :

a) Trouver une équation de  $\text{Im}(f)$ .

- b)  $P$  est le plan de  $E$  d'équation  $4x + 7y + 3z = 0$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Montrer que  $(f + id_E)(P) = P$ .
- c) Les sous-espaces  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$  sont-ils supplémentaires ?
- d)  $f$  est-il une projection de  $E$  ?

## DEVOIR D'ANALYSE

(noté sur 10 points environ)

durée conseillée 1 heure 40 ; en aucun cas n'y passer plus de 2 heures 10

### PROBLÈME

### études fonctionnelles

( ~ 10 points )

1° Soit  $u : [x \mapsto (1+x)^2 e^{-x}]$ .

Montrer que pour tout  $t \geq 0$  on a  $u(t) \leq \frac{4}{e}$ .

2° Soit  $f : \left[ x \mapsto \int_0^x (1+t^2) e^{-t^2} dt \right]$ .

a) Calculer  $\frac{u(t^2)}{1+t^2}$  pour  $t \geq 0$  et montrer que pour  $x \geq 0$  on a  $f(x) \leq \frac{4}{e} \arctan x$ .

b) Donner  $f'(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et indiquer les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Établir que  $f$  admet une limite réelle (qui sera notée  $\ell$ ) en  $+\infty$ .

d) Montrer que pour tout  $x \geq 0$  on a  $f(x) \geq 1 - e^{-x^2}$ . En déduire un encadrement de  $\ell$ .

3° Soit  $g : \left[ x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2} \right]$ .

a) Donner un développement limité de  $g$  en 0 à l'ordre 5.

b) Donner une équation de la tangente  $(T)$  en  $O$  à la courbe  $\mathcal{C}$  représentant  $g$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Préciser la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $(T)$ .

4° On pose l'équation différentielle  $(e) : (1+x^2)y' + 2xy = (1+x^2)e^{-x^2}$ .

a) Montrer que  $g$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $(e)$ .

b) Exprimer grâce à  $g$  toutes les solutions de  $(e)$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Existe-t-il une solution  $h$  de  $(e)$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $[x \mapsto (1+x^2)h(x)]$  ait pour limite 0 en  $+\infty$  ?

F I N