

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**qui commute avec U ?**

(4 points)

On fixe une matrice $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}(U)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec U i.e. les M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M \times U = U \times M$.

1° Montrer que $(\mathcal{C}(U), +, \times, .)$ est une \mathbb{R} -algèbre.

2° On suppose ici que $U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque [on dit que U est une matrice scalaire]. Donner $\mathcal{C}(U)$.

3° On suppose ici que U n'est pas une matrice scalaire et on se propose de montrer que $\mathcal{C}(U)$ est un espace vectoriel isomorphe à \mathbb{R}^2 .

a) Dans le cas $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix}$, $(b, c) \neq (0, 0)$, montrer que $\mathcal{C}(U) = \text{Vect} \left(\left\{ I_2, \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$.

b) Donner $\mathcal{C}(U)$ dans le cas particulier $U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $a \neq d$.

c) On suppose $a \neq d$. Montrer qu'il existe encore une matrice B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{C}(U) = \text{Vect}(\{I_2, B\})$.

PROBLÈME**convergences, convergence ...**

(16 points)

Pour un entier naturel non nul n , on définit g_n sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} g_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \leq n \\ g_n(x) = 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

Partie A

1° Représenter graphiquement [rapidement] sur un même dessin les fonctions g_1 , g_2 , et g_3 en justifiant si nécessaire par l'étude des variations.

2° Pour $n \geq 4$ fixé, démontrer la dérivabilité de g_n sur $[0, +\infty[$ et donner $g'_n(x)$ pour $x \geq 0$.

Partie B

étude locale de l'évolution de la suite en un réel donné, $x \geq 0$

1° On définit φ_x sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} \varphi_x(t) = \left(1 - \frac{x}{t}\right)^t & \text{si } t > x \\ \varphi_x(t) = 0 & \text{si } t \leq x \end{cases}, \text{ puis on pose } \psi_x = \ln \circ \varphi_x.$$

a) Donner $\psi'_x(t)$ pour $t > x$ puis étudier les variations de ψ'_x sur $]x, +\infty[$.

b) En déduire que φ_x est croissante sur $[0, +\infty[$.

2° a) Montrer que la suite $(g_n(x))_n$ est monotone.

b) Montrer que cette suite est convergente ; en donner la limite.

Partie C

étude globale de l'évolution de la suite $(g_n)_n$ vers sa limite

On pose $g : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{-x} \end{cases}$

1° On pose $f_n = g - g_n$ pour tout n . Montrer que f_n est positive.

2° a) Justifier que f_n est dérivable, et en donner la fonction dérivée.

b) Montrer que, pour $0 \leq x < n$, $f'_n(x)$ est du signe de $(n-1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$.

3° Donner les variations sur $[0, n[$ de $h_n : \left[x \mapsto (n-1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x \right]$.

4° a) En déduire le tableau des variations de f_n sur $[0, +\infty[$.

b) Etablir que f_n admet un maximum ; il sera noté y_n .

c) Montrer qu'il existe x_n unique dans $[0, +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = y_n$.

5° a) Etablir, pour $0 \leq x < n$, $h_n(x) = \frac{x \cdot (2-x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire $\lim_n x_n = 2$.

6° On note $\alpha_n = x_n - 2$ pour tout n .

a) De $h_n(x_n) = 0$, déduire $\alpha_n \sim \frac{-2}{3n}$, puis $x_n = 2 - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Montrer $y_n \sim \frac{2}{n \cdot e^2}$.

7° La convergence de $(g_n)_n$ vers g est-elle uniforme ?

F I N
