

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(6 points)

\mathcal{S} désigne l'ensemble des solutions sur $I =]0; \frac{\pi}{2}[$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 :

$$(e) : \quad y'' - y' \tan x + 2y = 0$$

1° a) Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{X^2(1-X^2)}$.

b) En déduire les primitives sur I de la fonction $\left[x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x \cos x} \right]$.

2° a) Remarquer que \sin appartient à \mathcal{S} , puis les $k \cdot \sin$ où $k \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que toute fonction f de classe C^2 sur I peut s'écrire $f = g \times \sin$ où g est de classe C^2 sur I .

c) Ecrire l'équation différentielle (E) dont g doit être solution pour que f soit solution de (e) .

3° Résoudre (E) puis (e) : donner \mathcal{S} .

EXERCICE 2

(7 points)

1° On considère les suites $(u_n)_n, (u'_n)_n, (u''_n)_n$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad u'_n = u_{2n}, \quad u''_n = u_{2n-1}.$$

a) Déterminer $u'_1, u'_2, u'_3, u''_1, u''_2$ et u''_3 .

b) Montrer que $(u'_n)_n$ et $(u''_n)_n$ sont adjacentes.

c) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

2° Etudier la suite $(v_n)_n$ définie pour $n \geq 1$ par : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ et déduire sa convergence.

3° On considère, pour tout $p \geq 0$ les intégrales $I_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2} dx$.

a) Calculer I_0 et I_1 .

b) Calculer $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p . En déduire I_2 et I_3 .

- c) Déterminer $\lim_p I_p$.
- 4° a) Montrer que, pour $q \geq 1$ on a : $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2$ et $v_q + (-1)^q I_{2q} = \frac{\pi}{4}$.
 b) Préciser les limites des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.
- 5° Au moyen d'une intégration par parties, déterminer $\lim_p (p I_p)$.
- 6° Soit $J_{p,q} = \int_0^1 \frac{x^p}{(1+x^2)^q} dx$.
 a) Calculer $J_{1,q}$ en fonction de q .
 b) Donner les valeurs de $J_{0,q}$ pour $0 \leq q \leq 3$.
 c) On dit que $J_{m,n}$ précède $J_{p,q}$ si et seulement si $(m \leq p \text{ et } n < q)$ ou $(m < p \text{ et } n \leq q)$.
 Pour $p \geq 2$ et $q \geq 1$, donner $J_{p,q}$ en fonction de deux intégrales qui la précèdent.
 d) Donner toutes les valeurs des $J_{p,q}$ pour $0 \leq p \leq 3$ et $0 \leq q \leq 3$.

EXERCICE 3

(8 points)

On se propose d'étudier quelques vecteurs propres de l'application $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'' - 2X P' \end{cases}$. id désigne l'application identique de $\mathbb{R}[X]$.

- 1° a) Etablir que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
 b) En donner le noyau.
 c) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous espace stable par ϕ (i.e. $\phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$). On notera désormais, pour tout n , ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$.
 d) Donner la matrice, A_n , de ϕ_n relativement à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2° a) Justifier, pour $n \neq 0$ et P de degré n , $(\phi + 2n.id)(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
 b) En déduire que pour p quelconque, $-2p$ est valeur propre de ϕ et qu'il existe H_p , polynôme unitaire de degré p , vérifiant $\phi(H_p) = -2p H_p$.
 c) Donner H_0, H_1, H_2 et H_3 .
- 3° a) Etablir, pour tout n , $H_{n+1} = X H_n - \frac{1}{2} H'_n$.
 b) En déduire, pour tout $n \neq 0$, $H'_n = n H_{n-1}$.
 c) Etablir, pour tout $n \neq 0$, $2 H_{n+1} - 2X H_n + n H_{n-1} = 0$.
 d) Montrer, pour tout k , H_{2k} est pair, H_{2k+1} est impair.
- 4° On pose $S_0 = 1$, et pour tout $n \neq 0$, le polynôme S_n est tel que $S_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$.
 a) Etablir que S_n est de degré n . En donner le coefficient dominant.
 b) En déduire, pour tout n , $H_n = \frac{(-1)^n}{2^n} S_n$.