

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

QUESTIONS DE COURS

(2 points)

Énoncer et démontrer le théorème donnant une limite pour une suite croissante non majorée.

EXERCICE 2**bouche à oreille**

(5 points)

Une population contient N individus ($N \geq 3$). À un instant initial, une seule personne détient une certaine information. L'information va circuler au sein de cette population. On considère que si une personne est informée à un moment donné, elle le reste indéfiniment.

C est un coefficient positif. On considère un intervalle de temps positif Δ tel que $\Delta < \frac{1}{C}$, et on considèrera l'état de propagation de l'information tous les instants $n \Delta$, où l'entier n décrit \mathbb{N} . On note ici u_n la **proportion** de la population informée à l'instant $n \Delta$. (ainsi $u_0 = \frac{1}{N}$)

1° Premier modèle de propagation : on fait l'hypothèse que l'augmentation de la proportion de population informée entre les instants $n \Delta$ et $(n+1) \Delta$ est déterminée par la relation

$$\forall n, \quad u_{n+1} - u_n = C \Delta (1 - u_n)$$

a) Trouver un réel α tel que la suite $(u_n - \alpha)_n$ soit géométrique.

b) Donner une expression de u_n en fonction de n , N , C et Δ .

c) Justifier que $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.

d) application numérique : on prend $N = 6000$, $\Delta = 1$ heure et $C = 0,029$. Au bout de combien de temps sera-t-on sûr qu'au moins 50% de la population aura été informé ?

2° Deuxième modèle de propagation : on fait l'hypothèse que l'augmentation de la proportion de population informée entre les instants $n \Delta$ et $(n+1) \Delta$ est déterminée par la relation

$$\forall n, \quad u_{n+1} - u_n = C \Delta u_n (1 - u_n)$$

a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans $\left[\frac{1}{N}, 1 \right]$.

b) Montrer que $(u_n)_n$ converge.

c) Donner la valeur de $\lim_n u_n$.

d) application numérique : on prend $N = 6000$, $\Delta = 1$ heure et $C = 0,029$. Quelle est la proportion de la population informée au bout de 24 heures ?

PROBLÈME

(13 points)

Partie A

$(y_n)_n$ est une suite de réels positifs ou nuls.

1° Pour $\lambda > 0$, établir : $\forall n, |\sqrt{y_n} - \sqrt{\lambda}| = \frac{|y_n - \lambda|}{\sqrt{y_n} + \sqrt{\lambda}} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} |y_n - \lambda|$

2° Justifier alors que si $(y_n)_n$ est convergente de limite ℓ , alors la suite $(\sqrt{y_n})_n$ est convergente de limite $\sqrt{\ell}$.

Partie B

On dit qu'une suite $(X_n)_n$ vérifie la propriété (P) si et seulement si $\forall n, X_{n+2} = \frac{1}{3}(X_{n+1} + X_n)$.

1° a) On considère deux suites, $(r_n)_n$ et $(s_n)_n$, vérifiant la propriété (P) . Montrer que la suite $(r_n + s_n)_n$ vérifie aussi la propriété (P) .

b) On considère une suite $(r_n)_n$ vérifiant la propriété (P) et un réel μ quelconque. Montrer que la suite $(\mu r_n)_n$ vérifie aussi la propriété (P) .

2° a) Trouver les raisons des suites géométriques vérifiant la propriété (P) .

b) En déduire¹ la convergence et les limites des suites géométriques vérifiant (P) .

3° Soit $(x_n)_n$ une suite quelconque vérifiant la propriété (P) .

a) Justifier qu'on peut trouver deux réels α et β tels que $\begin{cases} x_0 = \alpha + \beta \\ x_1 = \alpha q + \beta q' \end{cases}$ avec q et q' deux raisons distinctes de suites géométriques vérifiant (P) .

b) Montrer : $\forall n, \alpha q^n + \beta q'^n = x_n$.

c) En déduire que la suite $(x_n)_n$ converge vers 0.

Partie C

Soient deux réels $a \geq 1$ et $b \geq 1$. On cherche la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et la relation $\forall n, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$.

1° a) Justifier que ces données définissent u_n pour tout n , et $\forall n, u_n \geq 1$.

b) Montrer que la seule limite possible de la suite $(u_n)_n$ est 4.

2° On pose $\forall n, v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$ ce qui définit la suite $(v_n)_n$.

¹on pourra utiliser $\frac{1 + \sqrt{13}}{6} \simeq 0,77$ à 10^{-2} près et $\frac{1 - \sqrt{13}}{6} \simeq -0,44$ à 10^{-2} près

a) Montrer : $\forall n, v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$

b) En déduire $\forall n, |v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|)$.

3° On pose $x_0 = |v_0|, x_1 = |v_1|$ et $\forall n, x_{n+2} = \frac{1}{3}(x_{n+1} + x_n)$ ce qui définit la suite $(x_n)_n$.

a) Montrer : $\forall n, |v_n| \leq x_n$.

b) Justifier que $(x_n)_n$ converge vers 0 et en déduire que $(v_n)_n$ converge.

c) Montrer que $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.

F I N

Pour se consoler, un autre avant vous ...

J'étais alors en proie à la MATHÉMATIQUE.
Temps sombre ! enfant ému du frisson poétique,
Pauvre oiseau qui heurtait du crâne mes barreaux,
On me livrait tout vif aux chiffres, noirs bourreaux ;
On me faisait de force ingurgiter l'algèbre ;
On me liait au fond d'un Boisbertrand funèbre ;
On me tordait, depuis les ailes jusqu'au bec,
Sur l'affreux chevalet des X et des Y ;
Hélas, on me fourrait sous les os maxillaires
Le théorème orné de tous ses corollaires ;
Et je me débattais, lugubre patient
Du diviseur prêtant main-forte au quotient.
De là mes cris.

Victor Hugo