

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**polynômes de Tchebycheff (deuxième espèce)**

(8 points)

On définit une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes par : $U_0 = 1$, $U_1 = 2X$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+2} = 2X U_{n+1} - U_n$.

1° a) Expliciter les polynômes U_2 , U_3 , U_4 et U_5 .

b) Donner pour tout n le degré de U_n .

c) Etudier, pour tout n , la parité de U_n .

2° Pour tout n on pose $I_n = \int_{-1}^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

a) Donner explicitement I_0 et I_1 .

b) Etablir, pour tout n , grâce à une intégration par parties : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} I_n$.

c) En déduire $\int_{-1}^1 U_n(t) \sqrt{1-t^2} dt = 0$ pour tout $n > 0$.

EXERCICE 2**cochléoïde**

(12 points)

Le plan euclidien \mathcal{P} est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Un point M de \mathcal{P} pourra être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y) dans (O, \vec{i}, \vec{j}) ou ses coordonnées polaires (ρ, θ) dans (O, \vec{i}) .

\mathcal{C} est le cercle de centre O et de rayon R , orienté positivement. Le point Ω de \mathcal{C} d'abscisse R est choisi comme origine des abscisses curvilignes.

Partie A

ϕ est l'application de \mathbb{R} dans \mathcal{C} qui au réel s associe le point de \mathcal{C} d'abscisse curviligne s .

1° Pour $M = \phi(s)$ de \mathcal{C} d'abscisse curviligne s , $s \in]0, 2\pi[$, donner les coordonnées cartésiennes du point G défini par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \int_0^S \overrightarrow{O\phi(s)} \|\phi'(s)\| ds$$

(G s'interprète comme le centre de gravité de l'arc $\widehat{\Omega M}$ considéré homogènement massique).

2° Donner une équation polaire de l'ensemble Γ des points G lorsque s décrit $]0, 2\pi[$.

Partie B

Soit Γ la courbe d'équation polaire $\rho = g(\theta)$ où $\begin{cases} g(\theta) &= a \frac{\sin \theta}{\theta} \text{ si } \theta \neq 0 \\ g(0) &= a \end{cases}$

1° a) Etudier le signe de $g(\theta)$ suivant les valeurs de θ .

b) Quelle est la nature du point Ω ; du point O ?

c) Donner la forme générale de Γ (un tracé plus précis sera effectué à la lueur des résultats qui suivent).

2° a) Montrer que les points P de Γ où la tangente est orthogonale à (OP) ont des angles polaires solution d'une équation du type $\theta = f(\theta)$, où f est une fonction que l'on précisera.

b) Montrer que ces points sont situés sur une cercle \mathcal{C}_1 de rayon $\frac{a}{2}$ dont on donnera le centre.

3° On pose $I_0 = [0, \pi/2[$ et pour $n > 0$, $I_n =]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$

a) Démontrer que l'équation $(e) : \left[\tan \theta = \theta \right]$ admet une solution unique dans I_n , notée θ_n .

b) Etablir $n\pi \leq \theta_n < n\pi + \pi/2$. (on pourra prendre 4, 5 comme valeur approchée de θ_1 à 10^{-2} près).

c) Donner une relation entre $\arctan(\theta_n)$ et θ_n puis entre $\arctan\left(\frac{1}{\theta_n}\right)$ et θ_n . En déduire $\theta_n \sim n\pi$ puis le comportement asymptotique : $\frac{1}{\theta_n} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

4° Montrer que les points où la tangente à Γ est parallèle à (O, \vec{v}) sont situés sur le cercle \mathcal{C}_2 de centre Ω , et dont on donnera le rayon.

5° Représenter \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , puis Γ pour θ entre 0 et 2π

F I N
