

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(7 points)

(G, \times) est un groupe fini de cardinal 12 ; son neutre est noté e . On suppose que G est cyclique et que a en est un générateur (i.e. tous les éléments de G sont des puissances de a).

Pour un élément x de G , on note $gr(x)$ le sous-groupe engendré par x . (i.e. le plus petit sous-groupe de G contenant x). Ainsi $gr(a) = G$.

1° Montrer que le groupe est abélien.

2° a) Que vaut a^{12} ?

b) Soit $H_8 = gr(a^8)$. Quel est le cardinal de H_8 ? Donner ses éléments.

3° Soit $\varphi_k : \begin{cases} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & x^k \end{cases}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer que φ_k est un endomorphisme du groupe G .

4° Réciproquement, montrer que pour un endomorphisme ψ du groupe G , il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\psi = \varphi_k$.

5° φ_3 et φ_5 sont-ils des automorphismes du groupe G ?

6° a) Déterminer $\text{Im}(\varphi_8)$.

b) Discuter suivant les valeurs de b le nombre de solutions dans G de l'équation d'inconnue $x : x^8 = b$.

EXERCICE 2

(5 points)

1° Soit g l'application de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\ln(1+x)}{x}$

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et expliciter sa fonction dérivée.

b) Dresser le tableau de variation de g sur $]0, +\infty[$.

2° Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

a) Dériver $(g \circ \exp)$.

b) Trouver un réel α tel que $\forall x > 0 \quad \int_0^x f(t) dt = g(e^x) + \alpha$.

c) Donner $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt$.

EXERCICE 3

(8 points)

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans $\mathbb{R} : \left[x \mapsto 1 + x + \frac{2x \ln x}{1 - x} \right]$.

- 1°** Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et en 1. On note désormais F ce prolongement.
- 2°** Donner les limites de F aux bornes de son ensemble de définition.
- 3°** **a)** Etudier la dérivabilité de F sur son ensemble de définition.
b) Sur quels intervalles de \mathbb{R} la fonction F est-elle de classe C^1 ?
- 4°** Etudier les variations de F et donner son tableau de variations.
- 5°** Quelle est la nature de la branche infinie de la courbe \mathcal{C} de F .
- 6°** Représenter avec soin la courbe \mathcal{C} et ses éléments caractéristiques dans un repère orthonormal (unité 5cm).

F I N
