

1 EXERCICE

CORRIGÉ

Soit $f : \begin{cases}]\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2}{2x-1} \end{cases}$

1° a) Bien sûr f est dérivable et pour $x \geq \frac{1}{2}$, $f'(x) = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$. On a donc les variations :

x	$-1/2$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f		1	

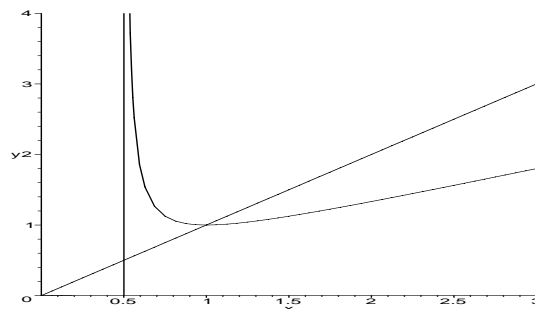
et bien sûr, $f(x) \geq 1$ pour tout x .

b) Pour $x > 1/2$, $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8x-4} = \frac{4x^2}{8x-4} = f(x)$.

2° On pose $(s) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Puisque $u_0 = 2$, une récurrence évidente permet de déduire que (s) définit sur \mathbb{N} une suite $(u_n)_n$ de réels, avec $\forall n, u_n \geq 1$.

b) La construction des termes de la suite $(u_n)_n$ se fait à partir de la courbe représentative de f .



3° a) Pour $x > 1$, $f(x) - x = \frac{-x^2 + x}{2x-1} < 0$.

Ainsi, pour tout n , $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$: la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

b) $(u_n)_n$ est décroissante, elle est minorée par 1, elle est donc convergente. Sa limite ℓ satisfait à $\ell \geq 1$.

4° On pose $\forall n \ v_n = \ln \left(\frac{u_n - 1}{u_n} \right)$

a) Pour n quelconque, $v_{n+1} = \ln \left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} \right) = \ln \left(\frac{(u_n - 1)^2}{u_n^2} \right) = 2 v_n$.

La suite $(v_n)_n$ est suite géométrique de raison 2.

b) $v_0 = -\ln 2$ ainsi $v_n = -2^n \ln 2$ donc $u_n = \frac{1}{1 - e^{v_n}} = \frac{2^{2^n}}{2^{2^n} - 1}$, pour tout n .

c) Puisque $\lim_n v_n = -\infty$ (raison supérieure à 1), on a $\lim_n u_n = 1$.

5° a) $(u_{n+1} - 1) = \frac{1}{2^{2^{n+1}} - 1}$ et $(u_n - 1)^2 = \frac{1}{2^{2^{n+1}} - 2^{2^n} + 1}$ pour n quelconque, donc bien sûr $(u_{n+1} - 1) \leq (u_n - 1)^2$.

b) Une récurrence facile amène ainsi, pour $n \geq 1$, à $(u_n - 1) \leq (u_1 - 1)^{2^{n-1}}$ donc $(u_n - 1) \leq \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}}$.

c) Ainsi $u_n \leq 1 + 10^{-5}$ dès que $(e) : \left(\frac{1}{3} \right)^{2^{n-1}} \leq 10^{-5}$.

Or $(e) \iff 2^{n-1} \geq \frac{5}{\log 3}$ donc $(e) \iff n \geq \log_2 \left(\frac{5}{\log 3} \right) + 1 \approx 4,4$.

En fait $u_4 \approx 1.000015$, $u_5 \approx 1.00000000023$, $u_6 \approx 1.000000000000000000054$ qui illustre bien la rapidité de la convergence.

2 EXERCICE

CORRIGÉ

Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_n$ admet ℓ pour limite. L'exercice se propose d'établir que $(\sqrt[n]{u_n})_n$ admet aussi ℓ pour limite.

1° Soit $a > 0$. Pour $n \geq 1$, $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln a$. Donc $\lim_n \ln(\sqrt[n]{a}) = 0$, puis $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$.

2° Étude du cas $\ell = 0$.

a) Puisque $\lim_n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = 0$, on a pour $\varepsilon > 0$, l'existence d'un entier N tel que, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \varepsilon$ donc $u_{n+1} < \varepsilon u_n$. Une récurrence évidente amène alors $u_n < \varepsilon^{n-N} u_N$ pour $n \geq N$.

b) On en déduit, pour $n \geq N$, $0 < \sqrt[n]{u_n} < \varepsilon \sqrt[n]{\frac{u_N}{\varepsilon}}$. Puisque $\lim_n \sqrt[n]{\frac{u_N}{\varepsilon}} = 1$, on a un entier N' tel que pour $n \geq N'$, $\sqrt[n]{\frac{u_N}{\varepsilon}} < 2$. Alors pour $n \geq \max(N, N')$, $0 < \sqrt[n]{u_n} < 2\varepsilon$.

D'où la convergence de $(\sqrt[n]{u_n})_n$ vers $\ell = 0$.

3° Dans le cas $\ell = +\infty$, on pose $\forall n$, $v_n = \frac{1}{u_n}$. On a $\lim_n \frac{v_{n+1}}{v_n} = 0$ donc $\lim_n \sqrt[n]{v_n} = 0$. Ainsi $\lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{u_n}} = 0$ puis $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = +\infty = \ell$.

4° Étude du cas ℓ réel positif.

a) Soit $0 < \varepsilon < \ell$. Il existe ainsi un entier N tel que pour $n \geq N$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| < \varepsilon$, donc $(\ell - \varepsilon) u_n < u_{n+1} < (\ell + \varepsilon) u_n$. Une petite récurrence donne, pour $n > N$, $(\ell - \varepsilon)^{(n-N)} u_N < u_n < (\ell + \varepsilon)^{(n-N)} u_N$, donc

$$v_n = (\ell - \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{u_N}{\ell - \varepsilon}} < \sqrt[n]{u_n} < (\ell + \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{u_N}{(\ell + \varepsilon)}} = w_n$$

Ainsi on a $(v_n)_n$ convergeant vers $(\ell - \varepsilon)$, $(w_n)_n$ convergeant vers $(\ell + \varepsilon)$ telles que $\forall n > N \ v_n \leq \sqrt[n]{u_n} \leq w_n$.

b) Il existe ainsi un entier N' tel que $\ell - 2\varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + 2\varepsilon$ pour $n > \max(N, N')$. Ce résultat a été obtenu pour un réel ε positif quelconque, et donc $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

5° a) Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = C_{2n}^n$ et $a_n = \sqrt[n]{C_{2n}^n} = \sqrt[n]{u_n}$. Pour n quelconque on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$ donc $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4$. Le résultat précédent donne donc $\lim_n a_n = 4$.

b) Pour tout $n > 0$, on pose $v_n = \frac{n^n}{n!}$ et $b_n = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{v_n}$. Pour n quelconque on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ donc $\lim_n \frac{v_{n+1}}{v_n} = e$. Le résultat précédent donne donc $\lim_n b_n = e$.

3 EXERCICE

CORRIGÉ

$(u_n)_n$ vérifie $u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$ pour tout n .

On pose $\forall n \ v_n = \max(u_n, u_{n-1})$.

a) Bien sûr, $\forall n, \ u_n \leq v_n$ et $u_{n-1} \leq v_n$.

b) On a de plus, pour n quelconque

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \leq \frac{1}{2}(v_n + v_n) = v_n$$

Ainsi $v_{n+1} = \max(u_{n+1}, u_n) \leq v_n$ pour tout n dont on tire $(v_n)_n$ est décroissante.

c) $(u_n)_n$ étant à termes positifs, $(v_n)_n$ est minorée par 0. Étant décroissante, elle est convergente. Soit ℓ sa limite ; on a $\forall n, \ 0 \leq \ell \leq v_n$ par monotonie.

d) Supposons $u_p < 2\ell - v_p$ pour un entier p .

On a alors $u(p) < \ell \leq v(p)$ d'où $u_{p-1} = v_p$ puis $u_{p+1} \leq \frac{1}{2}(u_p + u_{p-1}) = \frac{1}{2}(u_p + v_p) < \ell$. Il vient alors $v_{p+1} < \ell$: contradiction. Ceci établit par l'absurde : $\forall n, \ u_n \geq 2\ell - v_n$.

e) On en déduit $\forall n, \ 2\ell - v_n \leq u_n \leq v_n$. Le théorème des gendarmes donne alors la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ .

F I N