

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(6 points)

On dit qu'un entier P de \mathbb{N}^* est parfait si et seulement si $2P$ est la somme de ses diviseurs positifs (y compris lui-même). (ex : 6 est parfait, 8 ne l'est pas)

1° Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $(2^n - 1)$ est premier, alors n est premier.

2° Etablir que les nombres d'Euclide, i.e. les $E_n = 2^{n-1}(2^n - 1)$ où $(2^n - 1)$ est premier, sont des nombres parfaits.

3° Recherchons les nombres parfaits pairs¹.

a) Soit p un nombre parfait pair ; il s'écrit $p = 2^k b$ avec b impair et k positif. En notant la $\sigma(b)$ la somme des diviseurs de b , montrer $\sigma(b)(2^{k+1} - 1) = 2^{k+1} b$.

b) En déduire que $\sigma(b) = 2^{k+1} c$ et que c a pour seul diviseur 1.

c) Montrer alors que p est le nombre d'Euclide E_{k+1} .

4° Quel est le nombre parfait le plus petit qui soit au delà de 6 ?

EXERCICE 2

(5 points)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. On définit alors la suite $(I_n)_n$.

a) Montrer que $(I_n)_n$ est décroissante. Calculer I_0 et I_1 .

b) En intégrant par parties, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n vérifiée pour tout n .

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de I_{2n} et de I_{2n+1} en fonction de n , faisant intervenir des puissances de 2, des factorielles et éventuellement π .

d) Utiliser la formule de Stirling $\left[n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \right]$ pour trouver la limite de la suite $(I_n)_n$.

¹et on ne sait pas à l'heure actuelle s'il existe des nombres parfaits impairs ; si leur recherche vous tente, la gloire est au bout !

EXERCICE 3

(5 points)

Soit f une application de classe C^1 définie sur $[0, 1]$.

- a) Pour $0 \leq k < n$, montrer qu'il existe $b_k \in \left] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[$ tel que $f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n} f'(b_k)$.
- b) Montrer alors que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$ converge et en donner la limite.
- c) Appliquer ce résultat à la détermination de $\lim_n \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\dots(4n-1)}{2n(2n+2)(2n+4)\dots(4n-2)} = \lim_n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2n+2k+1}{2n+2k}$.
-

EXERCICE 4

(5 points)

1° Pour $\theta \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, établir $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$. En déduire $\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\sin n\theta}{2} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + \cos^2 \frac{n\theta}{2}$.

2° Pour f de classe C^1 sur $[a, b]$, montrer $\lim_n \int_a^b f(t) \cos nt \, dt = \lim_n \int_a^b f(t) \sin nt \, dt = 0$ (on pourra penser à une intégration par parties).

3° a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi t \cos nt \, dt$ et $\int_0^\pi t^2 \cos nt \, dt$.

b) Trouver les réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}$.

4° Déduire des trois questions précédentes $\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

F I N
