

# nombre d'or et suite de Fibonacci

Dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $x^2 = x + 1$  admet deux solutions, l'une positive,  $\varphi$ , appelée "nombre d'or", l'autre, négative,  $\varphi'$ .

## nombre d'or et géométrie

1°  $[AB]$  est un segment. On choisit  $C$  de sorte que  $ABC$  soit isocèle rectangle en  $B$ . Le cercle de diamètre  $[BC]$  a pour centre  $O$ . La droite  $(OA)$  coupe ce cercle en  $M'$  (entre  $O$  et  $A$ ), et  $N'$ . On construit  $M$  et  $N$  sur  $[AB]$  tels que  $AM = AM'$  et  $AN = AN'$ . Etablir que  $MB, AM, AB$  et  $AN$  sont en progression géométrique. Quelle en est la raison ?

2° Soient  $\Gamma$  un cercle de diamètre  $[IJ]$ , de centre  $O$ .  $ABCD$  est un carré tel que  $A$  et  $B$  sont sur  $\Gamma$ ,  $C$  et  $D$  sur  $[IJ]$ , et  $O$  milieu de  $[CD]$ . (on prendra  $D$  sur  $[IO]$ ).

Etablir  $\frac{IC}{DC} = \frac{DC}{ID} = \varphi$ .

3° Soit  $\Theta$  un cercle de centre  $O$  et  $ABCDE$  un pentagone régulier inscrit dans  $\Theta$ .  $[AA']$  est un diamètre de  $\Theta$ , et  $(A'B)$  coupe  $(OC)$  en  $F$ .

a) Justifier que les triangles  $A'FO$  et  $FA'C$  sont isocèles.

b) Prouver  $\frac{FO}{FC} = \frac{A'O}{A'C}$ . En déduire  $\frac{OC}{OF} = \frac{OF}{CF}$  puis  $\frac{OC}{OF} = \frac{OA'}{OF} = \varphi$ .

c) Conclure  $\frac{AC}{AB} = \varphi$ .

4° Construction du pentagone régulier. : Soit  $\Theta$  un cercle de centre  $O$ , de diamètre  $[AA']$ . On place  $O'$  sur l'orthogonale à  $(AA')$  passant par  $O$  tel que  $OA = 2 \times OO'$ . La droite  $(A'O')$  coupe le cercle de centre  $O'$  passant par  $O$  en  $B'$  et  $C'$  ( $C'$  entre  $O'$  et  $A'$ ). Le cercle de centre  $A'$  passant par  $B'$  coupe  $\Theta$  en  $E$  et  $B$ . Le cercle de centre  $A'$  passant par  $C'$  coupe  $\Theta$  en  $D$  et  $C$ .

a) Etablir  $\frac{A'O}{A'C} = \frac{A'B}{A'O} = \varphi$ .

b) Justifier que  $ABCDE$  sont les sommets d'un pentagone régulier de centre  $O$ .

## Fibonacci et les lapins

Pour modéliser l'évolution d'une population de lapins, on introduit la suite (dite de Fibonacci)  $(F_n)_n$  par :

$$\begin{cases} \forall n \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

1° quelques généralités.

a) Donner les valeurs  $F_2$  à  $F_{10}$ .

b) Montrer que  $(F_n)_n$  est croissante.

c) Justifier  $\lim_n F_n = +\infty$ .

d) Montrer  $\forall n \ \varphi^{n+2} = F_{n+1} \cdot \varphi + F_n$

e) Établir, par récurrence,  $\forall n \geq 1 \ F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ .

2° terme général ; Pour tout  $n$ , on pose  $\begin{cases} f_n &= F_{n+1} - \varphi' F_n \\ g_n &= F_{n+1} - \varphi F_n \end{cases}$

a ) Montrer que les suites  $(f_n)_n$  et  $(g_n)_n$  sont géométriques.

b ) En déduire une expression du terme général  $F_n$  en fonction de  $n$ . (formule dite de Binet).

3° approximations rationnelles

Pour tout  $n$ , on pose  $u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$

a ) Démontrer par récurrence :  $\forall n (F_{n+1})^2 - F_n \cdot F_{n+2} = (-1)^n$ .

b ) En déduire  $\lim_n \left( \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} \right) = 0$

c ) Montrer que les suites extraites  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  sont adjacentes.

d ) En déduire que  $(u_n)_n$  converge et donner sa limite.

e ) En montrant que la suite de terme général  $\frac{u_n - \varphi}{u_n - \varphi'}$  est géométrique, retrouver la convergence et la limite de  $(u_n)_n$ .

4° expressions remarquables

a ) Montrer que  $(u_n)_n$  est une suite récurrente et préciser la fonction de récurrence convenable. En déduire l'expression remarquable  $\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$  (décomposition de  $\varphi$  en fraction continue).

b ) Justifier cette autre écriture remarquable :  $\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$