

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat admis doit être explicitement énoncé avant d'être utilisé.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1**famille d'intégrales**

(6 points)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + x + 1)^n} dx$.

1° a) Établir, pour $x \in [0, 1]$, $1 - x \leq \frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{1 + x}$

b) En déduire : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$ pour $n \geq 2$.

c) Donner un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2° a) Grâce au changement de variable $u = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ trouver le nombre a_n tel que

$$I_n = a_n J_n \quad \text{avec} \quad J_n = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{(u^2 + 1)^n}$$

b) Calculer J_1 puis I_1 .

c) Intégrer par parties l'intégrale $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{(u^2 + 1)^2} du$ et donner sa valeur.

d) En déduire les valeurs de J_2 puis de I_2 .

EXERCICE 2**moyenne spatiale**

(14 points)

E est l'ensemble des fonctions numériques réelles, définies sur \mathbb{R} et continues sur \mathbb{R} .

Pour un réel $a > 0$ et f un élément de E , on définit comme la moyenne spatiale de paramètre a de f l'application $m_a(f)$:

$$\left[x \mapsto \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f \right]. \quad a \text{ est choisi et fixé pour tout le problème.}$$
étude analytique de $m_a(f)$

1° Soit $f \in E$ quelconque.

a) Justifier $m_a(f) \in E$.

b) Justifier que $m_a(f)$ est dérivable sur \mathbb{R} . En expliciter la fonction dérivée.

c) Justifier que $m_a(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

2° Soit $f \in E$ quelconque.

- a) Montrer que si f est $2a$ -périodique, alors $m_a(f)$ est constante.
- b) La réciproque est-elle vraie ?

3° Soit $f \in E$ quelconque.

- a) Montrer que si f est paire, alors $m_a(f)$ est paire.
- b) Que dire de la parité de $m_a(f)$ si f est impaire ?

4° Etudier la monotonie de $m_a(f)$ lorsque $f \in E$ est monotone.

5° $f \in E$ est supposée à support borné i.e. il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tout x tel que $|x| > A$. Un tel A est choisi pour f .

- a) Montrer que $m_a(f)$ est aussi à support borné.

- b) Montrer $\int_{-A-a}^{A+a} m_a(f)(t) dt = \int_{-A}^A f(t) dt$. (on pourra utiliser une intégration par parties).

étude algébrique de m_a

6° On regarde m_a comme une application de E dans E .

- a) Montrer que m_a est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .
- b) Donner explicitement $m_a(f)$ pour $f : \left[x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]$.
- c) Donner $\text{Ker}(m_a)$; m_a est-il injectif ?
- d) m_a est-il surjectif ?

7° Montrer que si f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n , alors $m_a(f)$ est aussi une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n .

$F \mid N$
