

1 SOUS-GROUPES DE \mathbb{R}

CORRIGÉ

1° \mathbb{Q} et $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ sont tous les deux non vides (ils contiennent 0). Tous les deux contiennent toutes les sommes de deux de leurs éléments, ainsi que les opposés de tous leurs éléments. Ils sont deux sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

On considère désormais un sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$; on note $G^+ = G \cap]0, +\infty[$.

2° a) G contient un élément non nul, et son opposé. G contient donc un réel positif et donc G^+ est non vide. G^+ est minoré (par 0) et admet donc une borne inférieure : δ . 0 minorant de G^+ donc $\delta \geq 0$.

b) Dans le cas $G = \mathbb{Q}$ on a δ nul, et dans le cas $G = \sqrt{2}\mathbb{Z}$, δ vaut $\sqrt{2}$, il est positif.

3° Étude du cas $\delta > 0$.

a) Supposons qu'il existe a dans $G \cap]\delta, 2\delta[$. Puisque a n'est pas un minorant de G , il existe b de G tel que $\delta \leq b < a$. Alors on a $0 < a - b < \delta$ et $(a - b) \in G$. Ceci est contradictoire avec $\delta = \inf(G^+)$.

Ainsi $G \cap]\delta, 2\delta[= \emptyset$.

b) On a $G \cap]0, \delta[= \emptyset$ et $G \cap]\delta, 2\delta[= \emptyset$. Or il existe un élément de G^+ dans $[\delta, 2\delta[$, donc δ est élément de G .

Puisque G est stable par somme de ses éléments, une récurrence évidente amène à $n\delta \in G$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. G de plus contient 0 et les opposés de ses éléments. Ainsi $\delta\mathbb{Z} \subset G$.

c) Pour $g \in G$ quelconque, on note $p = E(g/\delta)$. Alors $p\delta \leq g < (p+1)\delta$. De plus $(g - p\delta) \in G$ et $0 \leq (g - p\delta) < \delta$, donc $g - p\delta = 0$.

Ainsi $G = \delta\mathbb{Z}$, G est en bijection avec \mathbb{Z} , on dit qu'il est discret.

4° Étude du cas $\delta = 0$.

a) $d > 0$ n'est pas minorant de G^+ donc il existe x de G vérifiant $0 < x < d$.

Pour a et b réels tels que $a < b$, ce qui précède donne l'existence de x dans G tel que $0 < x < (b - a)$. $\lim_n nx = +\infty$ donc $\{n \in \mathbb{N} / nx \geq b\}$ est non vide; cet ensemble est bien sûr minoré; son plus petit élément est p . Alors $(p - 1)x < b \leq px$. On a $0 < x < (b - a)$ donc $a < (p - 1)x < b$. Ayant $(p - 1)x \in G$, on déduit $G \cap]a, b[\neq \emptyset$.

b) Pour $r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $G \cap]r - 10^{-n}, r + 10^{-n}[\neq \emptyset$: on dit dans ce cas que G est dense dans \mathbb{R} .

2 ACCROISSEMENT DE SUITES

CORRIGÉ

Soit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On rappelle que $(\mathcal{S}, +, \times)$ est un anneau commutatif et que $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel. on note $Z = (0)_n$ et $U = (1)_n$.

On définit Δ sur \mathcal{S} par : pour $(u_n)_n$ dans \mathcal{S} , $\Delta(u)$ est la suite $(v_n)_n$ telle que $\forall n, v_n = u_{n+1} - u_n$.

1° Exemples.

a) Dans le cas $\forall n \ a_n = n$ on a $\Delta(a) = (1)_n = U$.

b) Dans le cas $\forall n \ b_n = n^2$ on a $\Delta(b) = (2n+1)_n$.

c) Dans le cas $\forall n \ c_n = 2^n$ on a $\Delta(c) = (2^n)_n = u$.

2° Propriétés.

a) On montre aisément que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel \mathcal{S} : image d'une somme de deux suites et image du produit d'une suite par un réel.

b) $(u_n)_n$ est dans $\text{Ker}(\Delta)$ si et seulement si $\Delta(u) = Z$ i.e. $u_{n+1} = u_n$ pour tout n .

Le noyau de Δ est l'ensemble des suites constantes. Ainsi Δ n'est pas injective.

c) Soit la suite $(v_n)_n$. $\Delta(u) = v$ signifie $u_{n+1} - u_n = v_n$ pour tout n . La récurrence $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n, u_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$ définit de

manière unique une suite $(u_n)_n$ d'image v par Δ : pour tout n , $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k$.

On a ainsi Δ surjective.

d) Dans le cas $\forall n \ v_n = 3n - 1$, les antécédents de $(v_n)_n$ par Δ sont les $(u_n)_n$ telles que $\forall n, u_{n+1} = u_n + v_n$.

[façon 1] $\Delta(u) = v$ donne pour tout n ,

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= u_0 + \frac{3n(n-1)}{2} - n \end{aligned}$$

[façon 2] On a $\Delta(\frac{3}{2}.b - \frac{5}{2}.a) = v$. Donc $\Delta(u) = v$ si et seulement si $\Delta(u) = \Delta(\frac{3}{2}.b - \frac{5}{2}.a)$ si et seulement si $u - (\frac{3}{2}.b - \frac{5}{2}.a) \in \text{Ker}(\Delta)$.

Les antécédents de $(v_n)_n$ sont donc les $(\frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + \lambda)_n$ où λ est un réel quelconque.

e) $\Delta(A) = U$ et $A_0 = 0$ définissent $(A_n)_n$ par $\begin{cases} A_0 = 0 \\ \forall n, A_{n+1} = A_n + 1 \end{cases}$. Ainsi $A = (n)_n$ par récurrence évidente.

f) k réel donné ; $(u_n)_n$ vérifie $\Delta(u) = k.u$ si et seulement si $u_{n+1} = (k+1)u_n$ pour tout n . Les suites qui conviennent sont les suites géométriques de raison $(k+1)$.

3° $E = \{(u_n)_n \in \mathcal{S} / \forall n \ 4u_{n+3} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n\}$.

a) On vérifie que $(Z_n)_n, (U_n)_n$ et $(A_n)_n$ sont éléments de E .

b) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ dans E . Pour tout n , on a

$$\begin{aligned} 4(u_{n+3} + v_{n+3}) &= 4u_{n+3} + 4v_{n+3} \\ &= 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n + 9v_{n+2} - 6v_{n+1} + v_n \\ &= 9(u_{n+2} + v_{n+2}) - 6(u_{n+1} + v_{n+1}) + (u_n + v_n) \end{aligned}$$

et donc $(u+v) \in E$.

Soient $(u_n)_n$ dans E et $k \in \mathbb{R}$. Pour tout n , on a

$$\begin{aligned} 4k.u_{n+3} &= 9k.u_{n+2} - 6k.u_{n+1} + k.u_n \\ &= k.(9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n) \end{aligned}$$

et donc $k.u \in E$.

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de \mathcal{S} .

c) Pour $(u_n)_n$ dans E , on montre $(u_{n+1})_n \in E$ et donc $(u_{n+1} - u_n)_n$ aussi.

D'où $\Delta\langle E \rangle \subset E$.

$$\mathbf{d}) \text{ Soit } \phi : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_n & \mapsto (u_0, u_1, u_2) \end{cases}.$$

Il est immédiat que $\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$ et $\phi(k.u) = k.\phi(u)$ pour toutes suites u et v de E et tout réel k . Ainsi ϕ est une application linéaire (en particulier un homomorphisme de groupes).

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors $\begin{cases} u_0 = a, u_1 = b, u_2 = c \\ \forall n \ 4u_{n+3} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n \end{cases}$ définit par récurrence une unique suite de réels u telle que

$\phi(u) = (a, b, c)$. Celle-ci est bien sûr dans E .

ϕ bijective est donc un isomorphisme. Les espaces vectoriels $(E, +, .)$ et $(\mathbb{R}^3, +, .)$ (et en particulier les groupes $(E, +)$ et $(\mathbb{R}^3, +)$ sont isomorphes).

$\mathbf{e})$ Soit $(u_n)_n \in E$. On pose $v = \Delta(u)$ et $w = \Delta(v)$. Pour n quelconque,

$$\begin{aligned} \text{d'une part } w_n &= v_{n+1} - v_n \\ &= (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'autre part } w_{n+1} &= v_{n+2} - v_{n+1} \\ &= (u_{n+3} - u_{n+2}) - (u_{n+2} - u_{n+1}) \\ &= \frac{9}{4}u_{n+2} - \frac{3}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n - 2u_{n+2} + u_{n+1} \\ &= \frac{1}{4}(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) \\ &= \frac{1}{4}w_n \end{aligned}$$

et donc $w = \Delta(\Delta(u))$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$\mathbf{f})$ Soit $(u_n)_n \in E$. Notons $u_0 = a, u_1 = b, u_2 = c$ puis $v = \Delta(u)$ et $w = \Delta(v)$. On a $w_0 = c - 2b + a$, donc $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n (c - 2b + a)$ pour tout n .

[façon 1] On a pour tout n

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} w_k = (b - a) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k (c - 2b + a) \\ &= (b - a) + \frac{4}{3}(c - 2b + a) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n (c - 2b + a) \end{aligned}$$

donc pour tout n ,

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= a + \sum_{k=0}^{n-1} \left[(b - a) + \frac{4}{3}(c - 2b + a) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k (c - 2b + a) \right] \\ &= a + n(b - a) + \frac{4n}{3}(c - 2b + a) - \frac{16}{9}(c - 2b + a) + \frac{16}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n (c - 2b + a) \end{aligned}$$

[façon 2] Or pour $x = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, on a $\Delta(x) = \left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Ainsi $v = \left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n (c - 2b + a) + \lambda)_n$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

De la même façon, on obtient $u = \left(\frac{16}{9}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n (c - 2b + a) + \lambda n + \mu)_n$ où $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \text{ et } \mu \text{ sont contraints par } \begin{cases} a = \frac{16}{9}(c - 2b + a) + \mu \\ b = \frac{4}{9}(c - 2b + a) + \lambda + \mu \\ c = \frac{1}{9}(c - 2b + a) + 2\lambda + \mu \end{cases} \text{ et vérifient donc } \begin{cases} \lambda = \frac{4}{3}c - \frac{5}{3}b + \frac{1}{3}a \\ \mu = -\frac{7}{9}a - \frac{16}{9}c + \frac{32}{9}b \end{cases}$$

Ainsi $u_n = \frac{16}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n (u_0 - 2u_1 + u_2) + \left(\frac{1}{3}u_0 - \frac{5}{3}u_1 + \frac{4}{3}u_2\right)n - \frac{7}{9}u_0 + \frac{32}{9}u_1 - \frac{16}{9}u_2$ pour tout n .