

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

(5 points)

On note $F(n, p)$ le nombre de p -uplets d'entiers naturels (x_1, \dots, x_p) , dont la somme des termes est n .

a) Justifier le nombre $F(2, 3) = 6$ en donnant explicitement les triplets dont la somme des termes est 2.

b) Justifier le nombre $F(6, 2) = 7$ en donnant explicitement les couples dont la somme des termes est 6.

c) Montrer : $F(n, p+1) = \sum_{k=0}^n F(k, p)$ pour tous n et p .

d) Etablir par récurrence sur n : $C_{n+p}^p = \sum_{k=0}^n C_{k+p-1}^{p-1}$ où $p \geq 1$.

e) En déduire l'expression générale de $F(n, p)$.

EXERCICE 2

(3 points)

La suite $(u_n)_n$ est bornée. On définit la suite $(u'_n)_n$ par : $\forall n \ u'_n = \max_{i \leq n} u_i$. (c'est à dire, pour tout n , u'_n est le plus grand élément de $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$)

1° Préciser les valeurs prises par cette suite dans le cas particulier $\forall n \ u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.

2° Que dire de $(u_n)_n$ lorsqu'elle coïncide avec $(u'_n)_n$?

3° Dans le cas général,

a) Montrer que la suite $(u'_n)_n$ est bornée.

b) Est-elle nécessairement convergente ?

EXERCICE 3

(12 points)

1° Soit $f : \left[x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]$.

a) Etudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 1$.

c) Etablir, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \geq x$.

d) Montrer $f(x) = 1 + \int_0^x f'(t) dt$; en déduire $f(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$.

e) D'une façon analogue, à partir de $f(x) \leq 24$ pour tout $0 \leq x \leq 1$, obtenir $f(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} + x^4$

2° On définit la suite $(u_n)_n$ par la relation de récurrence :
$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{f(u_n)} \end{cases} \text{ pour tout } n$$

a) Montrer que $(u_n)_n$ est strictement décroissante.

b) Etablir que $(u_n)_n$ est convergente.

c) Quelle doit être la limite de $(u_n)_n$?

3° On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

a) Etablir que la suite $(v_n)_n$ est à valeurs négatives.

b) Démontrer que $(v_n)_n$ converge.

c) Simplifier l'écriture de $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$ puis donner $\lim_n U_n$.

4° On cherche à estimer v_n plus finement à partir de u_n .

a) Etablir : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{-u_n^2 - 2u_n^4}{2f(u_n)} \leq v_n \leq \frac{-u_n^2}{2f(u_n)}$

b) Donner la limite de $(v_n)_n$.

c) Donner $\lim_n \frac{v_n}{u_n^2}$

F I N
