

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

QUESTIONS DE COURS

(3 points)

1° Pour f une fonction de l'ensemble X dans l'ensemble Y , définir et caractériser la propriété : « f est injective».

2° Soient A et B deux parties d'un ensemble E . On définit f :
$$\begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

a) Montrer que la condition " $A \cap B = \emptyset$ " est nécessaire pour que f soit surjective.

b) Est-elle suffisante ?

EXERCICE 2

(2 points)

On sait que «l'image réciproque d'une union est l'union des images réciproques», et que «l'image réciproque d'une intersection est l'intersection des images réciproques».

A-t-on «l'image réciproque du complémentaire est le complémentaire de l'image réciproque» ?

EXERCICE 3

(3 points)

E et F sont deux ensembles. u désigne une application de E dans F , et v désigne une application de F dans E .

De la condition « $u \circ v = id_F$ et $v \circ u = id_E$ » peut-on déduire que u et v sont des bijections, réciproques l'une de l'autre ?

EXERCICE 4

(2 points)

Soit X l'ensemble $\{5, 7, 9, 11, 17, 20, 77, 545\}$

a) Quelle est la valeur de vérité du prédicat défini sur X :

Si $x + 3$ est un multiple de 4 alors $x + 4$ est un multiple de 3 ?

b) Donner la plus grande partie de X (au sens de l'inclusion) sur laquelle le prédicat précédent est vrai.

EXERCICE 5

(3 points)

Soit, énoncée sur \mathbb{N} , la conjecture \mathcal{C} :

« Pour tout entier n , si n est impair alors il existe un entier p tel que $n^2 = 8p + 1$ »

1° Énoncer la négation de l'assertion \mathcal{C} .

2° Démontrer que \mathcal{C} est vraie.

EXERCICE 6

(4 points)

Soit f une application de E dans F .

On définit Ψ de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$ par : $\forall B \ \Psi(B) = f^{-1}(B)$.

a) Montrer que « f surjective » est une condition nécessaire pour que Ψ soit injective.

b) Cette condition est-elle suffisante ?

EXERCICE 7

(3 points)

On définit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \end{cases}$

a) Étudier les variations de f et en dresser un tableau.

b) f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

c) Donner $f(]-1, 2])$, $f([0, 3])$, $f^{-1}(]-1, 2])$, $f^{-1}([2, 4])$.

F I N