

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être explicitement déclaré admis.

PROBLÈME**Algèbre***($\simeq 8$ points)*

E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 3. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E .

a est un réel non nul et ψ désigne l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

- 1° Montrer que A admet deux valeurs propres distinctes, indépendantes de a . On note λ la plus petite et μ la plus grande.
- 2° Montrer qu'il existe un vecteur propre f_1 , associé à la valeur propre μ , de la forme $f_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + e_3$. Préciser les réels α et β .
- 3° Montrer que pour la valeur propre λ , il existe deux vecteurs propres, $f_2 = \alpha' e_1 + e_2$ et $f_3 = \alpha'' e_2 + e_3$. Préciser les réels α' et α'' .
- 4° a) Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
b) Quelle est la matrice D de ψ dans la base \mathcal{C} ?
- 5° a) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner D^n .
b) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{Z}$. (on aura soin d'écrire très lisiblement et sans rature les neuf coefficients de cette matrice).

EXERCICE**Analyse***($\simeq 3$ points)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + x + 1)^n} dx$.

- 1° a) Etablir, pour $x \in [0, 1]$, $1 - x \leq \frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{1 + x}$

b) En déduire : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$ pour $n \geq 2$.

c) Donner un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2° a) Grâce au changement de variable $u = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ montrer qu'il existe un nombre a_n tel que $I_n = a_n J_n$ où

$$J_n = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{(u^2 + 1)^n}$$

b) Calculer J_1 puis I_1 .

c) Intégrer par parties l'intégrale $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{(u^2 + 1)^2} du$ et donner sa valeur.

d) En déduire les valeurs de J_2 puis de I_2 .

e) Calculer I_3 .

PROBLÈME

Analyse

($\simeq 10$ points)

1° Pour α un réel, on note $f(\alpha) = \int_0^\alpha (\alpha - t) e^t dt$

a) Montrer que pour tout réel α , $e^\alpha = 1 + \alpha + \int_0^\alpha (\alpha - t) e^t dt$

b) Pour $\alpha \in [-2, 2]$, montrer $0 \leq f(\alpha) \leq \frac{1}{2}\alpha^2 e^2$

2° Pour x réel, on définit $u(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$

a) Former, sans calculer les intégrales, $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$. Avec $|h| < 1$, $t \in [0, 1]$ et $\alpha = -h(1+t^2)$ utiliser la question 1° pour prouver la dérivabilité de u .

b) Etablir $\forall x \quad u'(x) = - \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$

3° On pose, pour x réel, $v(x) = u(x^2)$, et $w(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$

a) Montrer que v et w sont dérivables sur \mathbb{R} .

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) = -w'(x)$

c) Calculer $v(0) + w(0)$.

4° a) Que vaut $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha e^{-\alpha}$? En déduire qu'il existe un réel A (qu'on ne cherchera pas à déterminer) tel que

$$\alpha > A \implies 0 < e^{-\alpha} < \frac{1}{\alpha}$$

b) On suppose $x > A$; montrer $0 \leq u(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)$.

5° Déduire de ce qui précède que la fonction $\left[t \mapsto e^{-t^2} \right]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et la valeur de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

F I N
