

# I.S.E.P.

## Mathématiques

1° Quatre descriptions de la même courbe<sup>1</sup>.

a) La fonction  $\rho : [\theta \mapsto a \cdot (1 + \cos \theta)]$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et paire. Sa courbe  $\mathcal{C}_1$  est symétrique par rapport à l'axe polaire. Sa dérivée est  $[\theta \mapsto -a \cdot \sin \theta]$ . On a

$\theta$	0	$\pi$
$\rho$	2a	0

Et la courbe  $\mathcal{C}_1$  en résulte immédiatement.

b) La fonction  $\rho : [\theta \mapsto 2a \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}]$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et paire. Sa courbe  $\mathcal{C}_2$  est symétrique par rapport à l'axe polaire. Sa dérivée est  $[\theta \mapsto -a \cdot \sin \theta]$ . On a

$\theta$	0	$\pi$
$\rho$	2a	0

Et la courbe  $\mathcal{C}_2$  en résulte immédiatement.

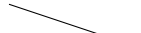
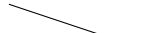




c) Les fonctions  $x : [t \mapsto \frac{a}{2} \cdot (\cos(2t) - 2 \cos(t) + 1)]$  et  $y : [t \mapsto \frac{a}{2} \cdot (\sin(2t) - 2 \sin(t))]$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodiques et respectivement paire et impaire. La courbe  $\mathcal{C}_3$  ainsi paramétrée est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Les dérivées sont  $[t \mapsto a \cdot \sin t \cdot (1 - 2 \cos t)]$  et  $[t \mapsto a \cdot (2 \cos t + 1) \cdot (\cos t - 1)]$ . On a donc

$t$	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi$		
$x'(t)$	0	−	0	+	+	0
$x$	0	$-a/4$	$2a$			
$y'(t)$	0	−	−	0	+	
$y$	0	$3a\sqrt{3}/4$	0			

Il existe un point stationnaire,  $O$ , pour le paramètre 0. Or  $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\sin(2t) - 2 \sin(t)}{\cos(2t) - 2 \cos(t) + 1} = \frac{2 \cdot \sin t (\cos t - 1)}{2 \cdot \cos t (\cos t - 1)} = \tan t$ . Ayant  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ ,  $\mathcal{C}_3$  admet en  $O$  une tangente horizontale ; le reste résulte immédiatement.

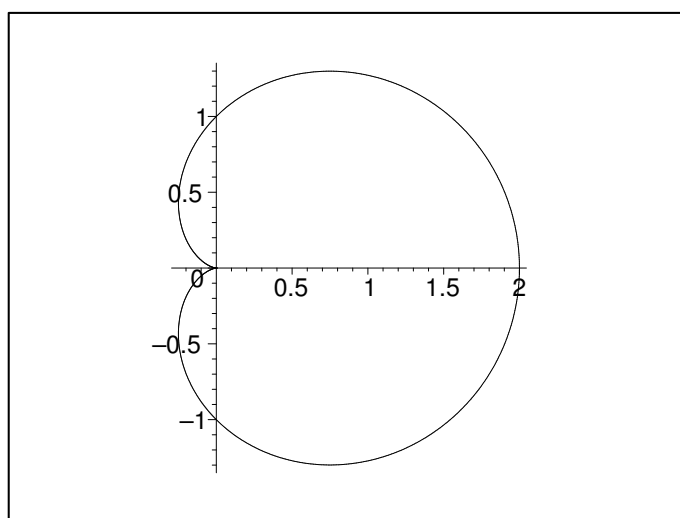
d) Les fonctions  $x : [t \mapsto 2a \cdot \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}]$  et  $y : [t \mapsto 2a \cdot \frac{2t}{(1 + t^2)^2}]$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  et respectivement paire et impaire. La courbe  $\mathcal{C}_4$  ainsi paramétrée est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Les dérivées sont  $[t \mapsto 4a \cdot \frac{t(-3 + t^2)}{(1 + t^2)^3}]$  et  $[t \mapsto -4a \cdot \frac{-1 + 3t^2}{(1 + t^2)^3}]$ . On a donc

<sup>1</sup>toutes les représentations graphiques sont faites avec  $a = 1$

$t$	0	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$		
$x'(t)$	0	—	—	0	+	
$x$	$2a$			$-a/4$		0
$y'(t)$		+	0	—	—	
$y$	0		$3a\sqrt{3}/4$			0

Le point  $O$  apparaît comme un point asymptote de  $\mathcal{C}_4$ . La tangente en ce point rajouté serait horizontale puisque  $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2t}{1-t^2}$  a pour limite 0 en  $+\infty$  ; le reste résulte immédiatement.

2° Les quatre courbes apparaissent identiques (au point  $O$  près pour  $\mathcal{C}_4$ ) : la courbe  $\mathcal{C}$



a)  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$  puisque pour tout  $\theta$ ,  $(1 + \cos \theta) = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ .

b)  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_3$  car en ayant posé  $x = \frac{a}{2} \cdot (\cos(2t) - 2 \cos(t) + 1)$  et  $y = \frac{a}{2} \cdot (\sin(2t) - 2 \sin(t))$  on obtient  $x^2 + y^2 = a^2 \cdot (1 + \cos^2 t - 2 \cos t) = [a(1 - \cos t)]^2$  puis  $\begin{cases} x = a \cdot (1 - \cos t)(-\cos t) \\ y = a \cdot (1 - \cos t)(-\sin t) \end{cases}$

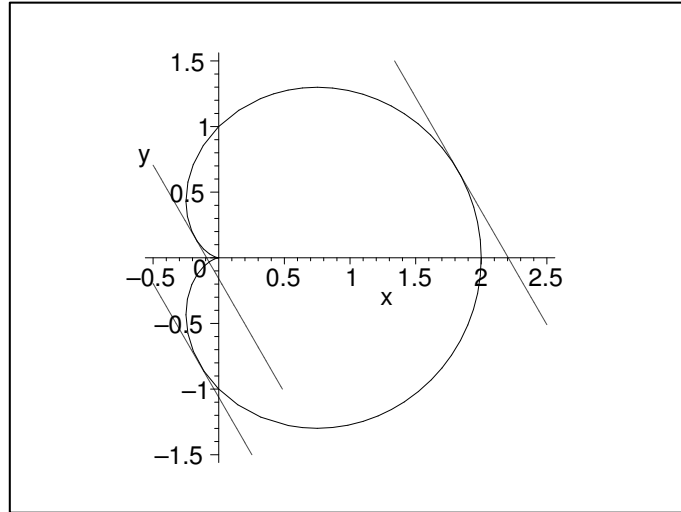
Ainsi le point de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  a pour coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  où  $\theta = t + \pi$  et  $\rho = a \cdot (1 + \cos \theta)$ .

c)  $\mathcal{C}_4$  est  $\mathcal{C}_1$  privée de  $O$  car en posant  $x = 2a \cdot \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$  et  $y = 2a \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^2}$  puis  $t = \tan \frac{\theta}{2}$  on obtient  $\begin{cases} x = a \cdot (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = a \cdot (1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$ .

3° Les points dont les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  vérifient (e) :  $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$  sont ceux dont les coordonnées polaires vérifient (e') :  $(\rho^2 - a\rho \cos \theta)^2 = a^2\rho^2$ . Ce sont donc les points tels que  $\rho = a(1 + \cos \theta)$  : leur ensemble est  $\mathcal{C}$ .

4° a) Prenons la description  $\mathcal{C}_1$  de  $\mathcal{C}$ . Soit  $M$  de coordonnées  $(\rho(\theta), \theta)$ . La tangente en ce point fait un angle de mesure  $V$  avec  $(OM)$  tel que  $\tan V = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{1 + \cos \theta}{-\sin \theta}$ . Cette tangente fait alors un angle de mesure  $\alpha$  avec  $(O, \vec{i})$  tel que  $\alpha = V + \theta$ .  
Donc  $\tan \alpha = \frac{\tan V + \tan \theta}{1 - \tan V \tan \theta} = \frac{-\cos \theta - \cos 2\theta}{\sin \theta + \sin 2\theta} = \frac{-2 \cos(3\theta/2) \cos(\theta/2)}{2 \sin(3\theta/2) \cos(\theta/2)} = \tan \left( \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$ . On en déduit qu'à  $\pi$  près, on a  $\alpha = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ .

Pour  $M_1 \in \mathcal{C}$ , d'angle polaire  $\theta_1$ , il existe donc deux autres points de  $\mathcal{C}$  en lesquels les tangentes à  $\mathcal{C}$  sont parallèles à celle en  $M_1$  : ce sont  $M_2$  et  $M_3$  respectivement d'angles polaires  $\theta_2 = \theta_1 + 2\frac{\pi}{3}$  et  $\theta_3 = \theta_1 - 2\frac{\pi}{3}$ .



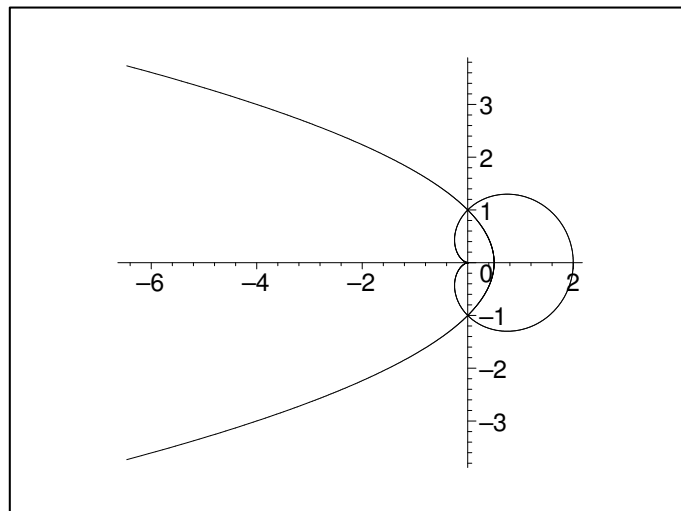
b) Les points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  ont respectivement pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x_1 = a(1 + \cos \theta_1) \cos \theta_1 \\ y_1 = a(1 + \cos \theta_1) \sin \theta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = a(1 + \cos \theta_2) \cos \theta_2 \\ y_2 = a(1 + \cos \theta_2) \sin \theta_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = a(1 + \cos \theta_3) \cos \theta_3 \\ y_3 = a(1 + \cos \theta_3) \sin \theta_3 \end{cases}$$

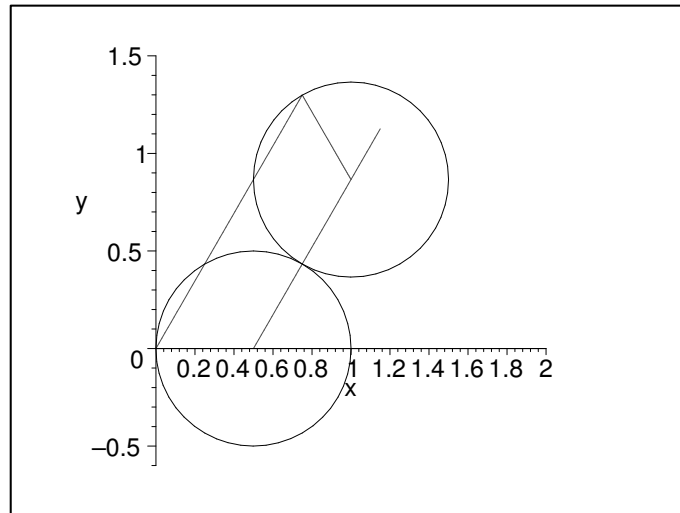
et leur isobarycentre a pour coordonnées  $(a/2, 0)$  : il est indépendant de  $\theta_1$ .

5° Pour  $M \neq O$ , on définit  $M' = \xi(M)$ . En polaire, avec  $M(\rho, \theta)$ , on obtient  $M'(\rho', \theta)$  où  $\rho \rho' = 1$ . On a donc  $\rho' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$ . Alors en cartésien,  $M'(x', y')$  avec  $\begin{cases} 2x' = \frac{1}{a} \left( 2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) = \frac{1}{a} (1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}) \\ y' = \frac{1}{a} \tan \frac{\theta}{2} \end{cases}$

Alors  $y'$  prend toute valeur réelle et  $y'^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} x'$  : l'image de  $\mathcal{C}$  par  $\xi$  est une parabole.



6°  $\mathcal{C}$  le cercle fixe de rayon  $a/2$  et de centre  $\Omega(a/2, 0)$ . Le cercle  $\Gamma$ , de rayon  $a/2$ , de centre  $P$ , roule sans glisser sur  $\mathcal{C}$ . Le point de contact est aligné avec  $\Omega$  et  $P$ . Soit  $M$  le point de  $\Gamma$  en contact en  $O$  avec  $\mathcal{C}$ . Alors, pour tout  $\theta$ , si  $(\vec{r}, \vec{\Omega P})$  mesure  $\theta$ , alors  $(\vec{\Omega P}, \vec{PM})$  mesure aussi  $\theta$ . Les coordonnées cartésiennes de  $P$  sont alors  $(a/2 + a \cos \theta, a \sin \theta)$  donc celles de  $M$  sont  $(a/2 + a \cos \theta + a/2 \cos(2\theta), a \sin \theta + a/2 \sin(2\theta))$ . La trajectoire de  $M$  est donc  $\mathcal{C}_3$ .

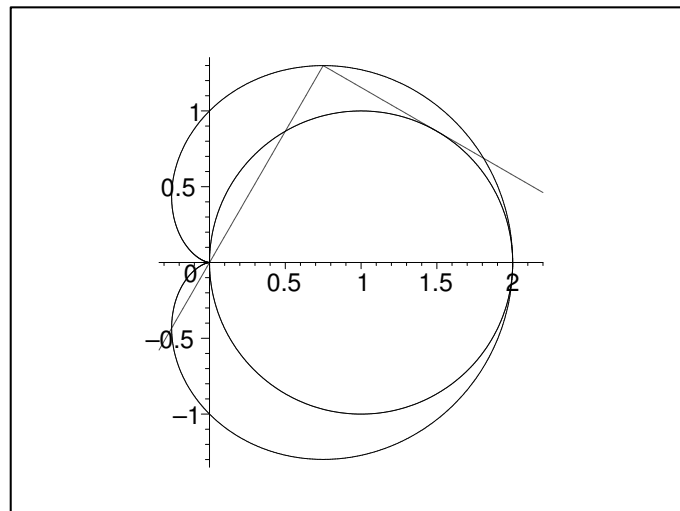


7° Soit  $(C)$  le cercle de rayon  $a$  et de centre  $A(a, 0)$ . Soit  $M$  le point de  $\mathcal{C}$  distinct de  $O$  tel que  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$  mesure  $\theta$ . Les coordonnées cartésiennes de  $M$  sont  $(a(1 + \cos \theta) \cos \theta, a(1 + \cos \theta) \sin \theta)$ . L'orthogonale à  $(OM)$  passant par  $M$  a pour équation

$$(x - a(1 + \cos \theta) \cos \theta) \cdot \cos \theta + (y - a(1 + \cos \theta) \sin \theta) \sin \theta = 0$$

et donc le point  $A$  en est à la distance  $|(a - a(1 + \cos \theta) \cos \theta) + (-a(1 + \cos \theta) \sin \theta) \sin \theta| = a$ . Cette orthogonale à  $(OM)$  par  $M$  est donc tangente à  $(C)$ .

Ainsi, de tout point  $M$  de  $\mathcal{C}$  on peut mener une tangente à  $(C)$  orthogonale à  $(OM)$  :  $\mathcal{C}$  est donc bien une podaire de  $(C)$  par rapport à son point  $O$ .



F I N