

DEVOIR D'ANALYSE

1 FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

CORRIGÉ

On pose $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ et $D' = D \setminus \{0\}$. On définit f sur D par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{1}{\ln x} \text{ si } x \in D' \end{cases}$

1° \ln est \mathcal{C}^∞ sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et ne s'annule pas sur ces intervalles. Donc f est de classe \mathcal{C}^∞ sur D' .

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc f est continue en 0. f est donc continue sur D et à ce titre y admet des primitives.

2° a) On sait f de classe \mathcal{C}^∞ sur D' . Pour $x \in D'$, $f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$.

b) Pour $0 < x < 1$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x \ln x}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$ donc f non dérivable en 0.

c) On a $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty$ donc le tableau des variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	0	$-\infty$	0

On définit φ par : $\varphi(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$.

3° a) Pour $x \in [0, 1[$, on a $x^2 \in [0, 1[$, et pour $x \in]1, +\infty[$ on a $x^2 \in]1, +\infty[$. Puisque f admet des primitives sur D , choisissons F l'une d'elles et alors $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$. Ainsi $\mathcal{D}_\varphi = D$.

f négative sur $]0, 1[$ donc F décroissante sur $]0, 1[$. Pour $0 \leq x < 1$, on a $x^2 \leq x$ donc $\varphi(x) \geq 0$.

f positive sur $]1, +\infty[$ donc F croissante sur $]1, +\infty[$. Pour $x > 1$, on a $x^2 > x$ donc $\varphi(x) > 0$.

b) F dérivable sur D donc, par composition et somme évidente, φ est continue et dérivable sur D .

4° a) On sait φ dérivable sur D . Pour $x \in D'$, $\varphi'(x) = 2x F'(x^2) - F'(x) = 2x f(x^2) - f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.

b) D'où les variations de φ :

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	+
φ	0		

c) φ dérivable en 0 puisque F dérivable en 0. De $F'(0) = f(0) = 0$ on tire $\varphi'(0) = 0$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{\ln x} = 0$ donc φ' est continue en 0. φ est de classe \mathcal{C}^1 sur D .

On définit ψ par : $\psi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$.

5° a) Pour $x \in D'$, $\varphi(x) - \psi(x) = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \int_x^{x^2} \frac{t-1-\ln t}{(t-1)\ln t} dt$. Avec le changement de variable $u = t-1$ on a $\varphi(x) - \psi(x) = \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{u - \ln(1+u)}{u \ln(1+u)} du$. On pose $g(u) = \frac{u - \ln(1+u)}{u \ln(1+u)}$ pour $u \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

b) $\ln(1+u) = u - u^2/2 + o(u^2)$ au voisinage de 0, donc $g(u) \underset{0}{\sim} \frac{u^2/2}{u u}$; donc $\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = \frac{1}{2}$. g est ainsi prolongeable par continuité en 0 par la fonction γ définie sur $] -1, +\infty[$ par $\gamma(0) = \frac{1}{2}$ et $\gamma(u) = g(u)$ pour $u \neq 0$.

c) La fonction γ , continue sur $] -1, +\infty[$ admet G pour primitive sur cet intervalle.

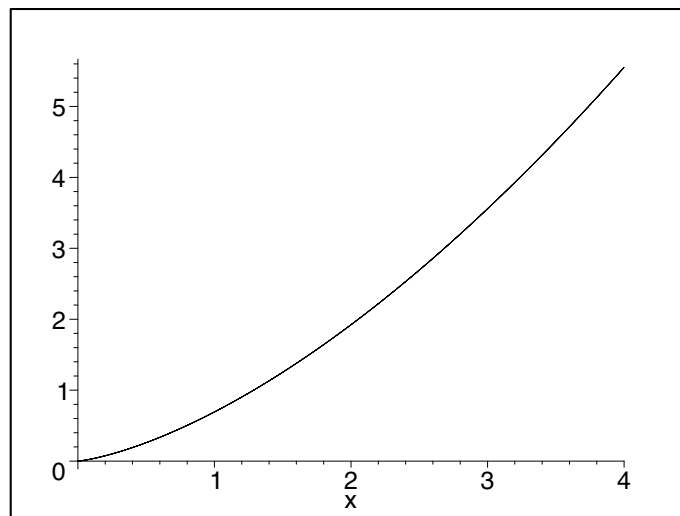
On a alors $\varphi(x) - \psi(x) = G(x^2 - 1) - G(x - 1)$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1} [\varphi(x) - \psi(x)] = G(0) - G(0) = 0$.

De plus, pour $x \in D'$, $\psi(x) = (\ln |x^2 - 1| - \ln |x - 1|) = \ln(x + 1)$. De $\lim_{x \rightarrow 1} \psi(x) = \ln 2$ on tire l'existence d'une limite en 1 pour φ et $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \ln 2$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ donc φ' admet 1 pour limite en 1.

La courbe représentative de φ admet donc une tangente au point asymptote de coordonnées $(1, \ln 2)$.

6° \ln négligeable devant toute puissance positive au voisinage de $+\infty$. Donc pour t "suffisamment grand" (i.e. $t \geq k$), on a $\ln t < \sqrt[3]{t}$; donc pour $x > k$ on a $\varphi(x) > \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}}$ donc $\frac{\varphi(x)}{x} > \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$: la courbe de φ admet une branche parabolique verticale.



DEVOIR D'ALGÈBRE

2 MATRICES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

CORRIGÉ

1° a) $\det \tilde{A} = [A_2 \wedge A_3, A_3 \wedge A_1, A_1 \wedge A_2] = ((A_2 \wedge A_3) \wedge (A_3 \wedge A_1) | A_1 \wedge A_2) = ((A_2 \wedge A_3) | A_1) \cdot (A_3 | (A_1 \wedge A_2)) = [A_1, A_2, A_3]^2 = (\det A)^2$. Donc A et \tilde{A} sont toutes deux inversibles si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

b) Pour $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, on a $\tilde{A} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ c_2a_3 - c_3a_2 & c_3a_1 - c_1a_3 & c_1a_2 - c_2a_1 \\ a_2b_3 - a_3b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$. Ainsi \tilde{A} est la comatrice de A . On

a donc $A {}^t\tilde{A} = \det(A).I_3$. D'où, pour A inversible, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\tilde{A}$.

2° On suppose A non inversible. A peut être de rang nul, i.e. $A = 0$, et alors $\tilde{A} = 0$, de même rang nul.

A peut être de rang 1, et alors deux colonnes quelconques de la famille (A_1, A_2, A_3) sont colinéaires et les produits vectoriels sont tous nuls. On a encore $\tilde{A} = 0$, de rang nul.

Enfin A peut être de rang 2 : (A_1, A_2, A_3) est de rang 2. Considérons par exemple (A_1, A_2) libre et $A_3 = b_1A_1 + b_2A_2$. Puisque $A_1 \wedge A_2 \neq 0$, la famille $(A_2 \wedge A_3, A_3 \wedge A_1, A_1 \wedge A_2) = (-b_1A_1 \wedge A_2, -b_2A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2)$ est de rang 1 et donc \tilde{A} aussi.

3 TROUVER LA BONNE BASE

CORRIGÉ

$\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi \neq O$. On pose $\psi = \varphi^2 + \varphi + id_E$ et $\varphi^3 + \varphi^2 + \varphi = O$ i.e. $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = O$. On note $F = \text{Ker } \varphi$, et $G = \text{Ker } \psi$.

1° a) Soit $x \in F \cap G$. $\varphi(x) = 0_E$ et $\varphi(\varphi(x)) + \varphi(x) + x = 0_E$ donc $x = 0_E$. Ainsi $F \cap G = \{0_E\}$.

$G = \{0_E\}$ donnerait ψ injective, donc bijective puisque E est de dimension finie ; $\psi \circ \varphi = O$ donnerait alors $\varphi = O$, contradiction. Ainsi $G \neq \{0_E\}$.

b) Soit $x \in E$; $\psi \circ \varphi = O$ donc $\psi(\varphi(x)) = 0_E$ et $\varphi(x) \in G$ dans tous les cas.

Avec $x \neq 0_E$ dans G , $(x, \varphi(x))$ liée donnerait $\varphi(x) = k.x$, $k \in \mathbb{R}$. Alors $\psi(x) = \varphi^2(x) + \varphi(x) + x = (k^2 + k + 1).x = 0_E$ donc $k^2 + k + 1 = 0$, contradiction. Ainsi la famille $(x, \varphi(x))$ est libre.

2° a) $G \neq \{0_E\}$, on prend $e \in G$, $e \neq 0_E$. On a alors $(e, \varphi(e))$ libre. Le théorème de la base incomplète donne l'existence de e' non nul tel que $\mathcal{B} = (e, \varphi(e), e')$ base de E .

$\varphi(e) = \varphi(e)$ donne la première colonne de la matrice dans cette base. On a $\varphi(\varphi(e)) = \varphi^2(e) = -\varphi(e) - e$ puisque $\psi(e) = 0_E$, et donc la deuxième colonne. On a donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la matrice de φ dans \mathcal{B} soit $\begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

b) $(\varphi^3 + \varphi^2 + \varphi) = O$ et a pour matrice dans \mathcal{B} : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac - bc + ac^2 \\ 0 & 0 & ac + bc^2 \\ 0 & 0 & c + c^2 + c^3 \end{pmatrix}$. Donc $c + c^2 + c^3 = 0$ donc $c = 0$.

3° $F \cap G = \{0_E\}$ donc F et G sont en somme directe. Puisque $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\text{rg}(\varphi) = 2$ donc $\dim F = 1$

(théorème du rang). De plus $(e, \varphi(e))$ famille libre de G donc $\dim G \geq 2$. Ainsi $E = F \oplus G$ et $\dim G = 2$: F et G sont supplémentaires.

4° F et G sont supplémentaires et on peut choisir e'' non nul de F . Alors $\mathcal{B}' = (e, \varphi(e), e'')$ est une base de E . Dans cette base la matrice de φ est : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 POLYNÔMES RÉELS SCINDÉS ?

CORRIGÉ

1° Soient $A = \sum_{j=0}^n a_j X^j$, et $B = \sum_{i=0}^p b_i X^i$. On pose $AB = C = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k$. On a donc, pour tout k , $c_k = \sum_{m=0}^k a_m b_{k-m}$ donc $\overline{c_k} = \sum_{m=0}^k \overline{a_m b_{k-m}}$. Ceci garantit $\overline{C} = \overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$.

2° La question précédente et une récurrence évidente donne, pour $A = \lambda \prod_{k=1}^n (X - z_k)$, $\overline{A} = \overline{\lambda} \prod_{k=1}^n (X - \overline{z_k})$.

3° Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ dont les racines ont toutes une partie imaginaire négative. $P = Q + iR$ avec Q et R dans $\mathbb{R}[X]$.

a) Bien sûr $\overline{P} = Q - iR$ donc $Q = \frac{1}{2}(P + \overline{P})$ et $R = \frac{1}{2i}(P - \overline{P})$.

b) P est scindé. Les racines de P sont z_1, \dots, z_n ; elles sont toutes dans le demi-plan inférieur des complexes de parties imaginaires négatives. Pour $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| = |\lambda| \left| \prod_{k=1}^n (z - z_k) \right|$ et $|\overline{P}(z)| = |\overline{\lambda}| \left| \prod_{k=1}^n (z - \overline{z_k}) \right|$.

Or pour $1 \leq k \leq n$, $|z - z_k| < |z - \overline{z_k}|$, $|z - z_k| = |z - \overline{z_k}|$ ou $|z - z_k| > |z - \overline{z_k}|$ suivant que z a une partie imaginaire négative, nulle ou positive. Ces distances sont toutes de réels positifs ou nuls, donc $|P(z)| < |\overline{P}(z)|$, $|P(z)| = |\overline{P}(z)|$ ou $|P(z)| > |\overline{P}(z)|$ suivant que z a une partie imaginaire négative, nulle ou positive.

Q et R sont scindés comme polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Soit a une racine complexe de Q . On a $Q(a) = 0$ donc $|P(a)| = |\overline{P}(a)| = |R(a)|$ et donc $a \in \mathbb{R}$. De même avec une racine complexe de R . Ainsi les racines de Q et R sont toutes réelles et Q et R sont scindés sur \mathbb{R} .

F I N
