

## 1 deux matrices "anticommutantes"

CORRIGÉ

Soit  $m \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  ; on note  $a = {}^t m \overline{m}$  (pris comme un réel positif ou nul).

1° On pose  $M = {}^t m \overline{m}.I_n - 2 m {}^t \overline{m} = a.I_n - 2 m {}^t \overline{m}$ .

a )  $M^2 = (a.I_n - 2 m {}^t \overline{m})^2 = a^2.I_n - 4a.m {}^t \overline{m} + 4(m {}^t \overline{m})^2 = a^2.I_n$  puisque  $(m {}^t \overline{m})^2 = m({}^t \overline{m} m) {}^t \overline{m} = m(\overline{a}. {}^t \overline{m}) = a.m {}^t \overline{m}$ . ( $a$  est réel)

b ) On pose  $A$  et  $B$  deux matrices réelles telles que  $M = A + i.B$ . Alors  $M^2 = (A^2 - B^2) + i.(AB + BA)$ , les matrices  $(A^2 - B^2)$  et  $(AB + BA)$  sont réelles.

c ) Puisque  $M^2$  est une matrice réelle, on a  $AB = -BA$ .

2° application : soit  ${}^t m = \begin{pmatrix} i & -2 & 2 & -i & 1 & +i \end{pmatrix}$  ; on calcule  $a = 12$ ,

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 4i & 2-4i & -2-2i \\ -4i & 4 & 8+4i & 4-4i \\ 2+4i & 8-4i & 2 & -2+6i \\ -2+2i & 4+4i & -2-6i & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{puis } A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et on vérifie enfin } AB = -BA.$$

## 2 matrices et bases remarquables

CORRIGÉ

$E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3. On considère  $\psi \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\psi^3 = id_E$  et  $\psi \neq id_E$ .

a ) On a  $\psi^3 - id_E = O$  or  $\psi^3 - id_E = (\psi - id_E) \circ (\psi^2 + \psi + id_E) = (\psi^2 + \psi + id_E) \circ (\psi - id_E)$ .

Ainsi  $(\psi - id_E) \circ (\psi^2 + \psi + id_E) = O$  qui donne  $\text{Im}(\psi^2 + \psi + id_E) \subset \text{Ker}(\psi - id_E)$  et  $(\psi^2 + \psi + id_E) \circ (\psi - id_E) = O$  qui donne  $\text{Im}(\psi - id_E) \subset \text{Ker}(\psi^2 + \psi + id_E)$ .

b ) Soit  $x \in \text{Im}(\psi - id_E) \cap \text{Ker}(\psi - id_E)$ .

On a ainsi  $x = \psi(y) - y$  et  $\psi(x) - x = 0_E$ . Donc  $\psi^2(y) - 2\psi(y) + y = 0_E$ , et en appliquant  $\psi^2$ ,  $\psi^2(y) - 2\psi(y) + y = 0_E$ . La différence donne  $\psi(y) - y = 0_E$  i.e.  $x = 0_E$ . La somme de  $\text{Im}(\psi - id_E)$  et  $\text{Ker}(\psi - id_E)$  est directe.

Cette somme directe a pour dimension  $\dim(\text{Im}(\psi - id_E)) + \dim(\text{Ker}(\psi - id_E)) = 3$  d'après le théorème du rang.

On a ainsi  $\text{Im}(\psi - id_E)$  et  $\text{Ker}(\psi - id_E)$  supplémentaires.

c ) Pour  $x \in E$ ,  $x$  non nul,  $(x, \psi(x))$  liée impose  $\psi(x) = k.x$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , donc  $x = \psi^3(x) = k^3.x$ , soit  $k = 1$  :  $\psi(x) = x$  i.e.  $x \in \text{Ker}(\psi - id_E)$ . Puisque  $\psi \neq id_E$ , on a  $E \neq \text{Ker}(\psi - id_E)$ , donc  $\text{Im}(\psi - id_E) \neq \{0_E\}$ .

En prenant  $x \in \text{Im}(\psi - id_E)$ ,  $x \neq 0_E$ , on a  $(x, \psi(x))$  libre. Ayant  $x = \psi(y) - y$ , on a  $\psi(x) = (\psi - id_E)(\psi(y))$  et donc  $\psi(x) \in \text{Im}(\psi - id_E)$ .

**d )** Nous avons vu  $\text{rg}(\psi - id_E) \geq 2$  puisqu'une famille libre de deux vecteurs existe. Or  $\psi$  a au moins une valeur propre et celle-ci ne peut être que 1. Donc  $\text{rg}(\psi - id_E) \leq 2$ .

Le rang de  $(\psi - id_E)$  est 2.

**e )** On choisit un vecteur  $x$  tel que  $(x, \psi(x))$  soit libre et dans  $\text{Im}(\psi - id_E)$  puisqu'il en existe. On choisit un vecteur  $v$  non nul dans  $\text{Ker}(\psi - id_E)$  et ainsi  $(x, \psi(x), v)$  est libre puisque  $\text{Im}(\psi - id_E)$  et  $\text{Ker}(\psi - id_E)$  sont supplémentaires. Cette famille de trois vecteur est une base de  $E$  puisque  $E$  est de dimension 3.

Dans cette base la matrice de  $\psi$  est  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  pour matrice.

### 3 alignement sur une strophoïde

CORRIGÉ

Soit la strophoïde  $\mathcal{S}$  d'équation cartésienne  $y^2(1+x) = x^2(1-x)$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**1° a )** Bien sûr,  $O \in \mathcal{S}$ . C'est même le seul point de  $\mathcal{S}$  d'abscisse 0.

**b )** Pour  $t$  donné, le système  $\begin{cases} y = tx \\ y^2(1+x) = x^2(1-x) \end{cases}$  admet pour solutions les deux couples  $(0, 0)$  et  $(\frac{1-t^2}{1+t^2}, t \frac{1-t^2}{1+t^2})$ .

Ainsi pour tout réel  $t$ , la droite passant par  $O$  de coefficient directeur  $t$  recoupe  $\mathcal{S}$  en un point unique.

**c )** Alors  $\mathcal{S}$  admet le paramétrage :  $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$  qui récupère le point  $O$  pour  $t = 1$ , puisque  $O$  est le seul point de  $\mathcal{S}$  sur l'axe des ordonnées.

**2°** Les fonctions  $\left[ t \mapsto x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \right]$  (qui est paire) et  $\left[ t \mapsto y(t) = t \frac{1-t^2}{1+t^2} \right]$  (qui est impaire) sont  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et de variations :

$t$	0	$\alpha = \sqrt{\sqrt{5}-2}$	$+\infty$
$x'(t)$	0	—	—
$x$	1	$x(\alpha)$	—1
$y'(t)$	+	0	—
$y$	0	$y(\alpha)$	$-\infty$

Le point  $O$  correspond ici aux paramétrages 1 (et  $\mathcal{S}$  a une tangente de pente 1) et -1 (et  $\mathcal{S}$  a une tangente de pente -1).

Les branches infinies de  $\mathcal{S}$  sont asymptotes à la droite d'équation  $x = -1$ .

**3° a )**  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $ax + by + c = 0$ . Le point  $M$  de  $\mathcal{S}$  de paramètre  $t$ , est sur  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $t$  est solution de l'équation

$$bt^3 + (a-c)t^2 - bt - (a+c) = 0$$

**b )** Trois points  $M_1, M_2$  et  $M_3$  (de paramètres  $t_1, t_2$  et  $t_3$ ) de  $\mathcal{S}$  sont alignés si et seulement si une droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $ax + by + c = 0$  les contient, i.e. si et seulement si il existe  $a, b$  et  $c$  tels que  $t_1, t_2$  et  $t_3$  sont les solutions de l'équation  $bt^3 + (a-c)t^2 - bt - (a+c) = 0$ . Ceci est équivalent à  $b\sigma_1(t_1, t_2, t_3) = a-c, b\sigma_2(t_1, t_2, t_3) = -b$  et  $b\sigma_3(t_1, t_2, t_3) = -a-c$ .

Il existe de tels  $a, b$  et  $c$  si et seulement si  $\sigma_2(t_1, t_2, t_3) = -1$ .

**4°** Soit  $M$  de  $S$  de paramètre  $t$  ( $t \neq 0$ ). Le point  $M'$  de  $S$  de paramètre  $t'$  est celui en lequel la tangente  $\mathcal{T}$  à  $S$  en  $M$  recoupe  $S$ .

**a )**  $\mathcal{T}$  coupe  $S$  en  $M$  (qui compte double) et  $M'$ , donc  $\sigma_2(t, t, t') = -1$  i.e.  $t^2 + 2tt' = -1$ . Ainsi  $t' = \frac{-1-t^2}{2t}$ .

**b )** Trois points  $M_1, M_2$  et  $M_3$  (de paramètres  $t_1, t_2$  et  $t_3$ ) de  $S$  sont alignés. Leurs tangentiels sont  $M'_1, M'_2$  et  $M'_3$  (de paramètres  $t'_1, t'_2$  et  $t'_3$ ).

On a  $\sigma_2(t_1, t_2, t_3) = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$ . Alors

$$\sigma_2(t'_1, t'_2, t'_3) = \frac{-1-t_1^2}{2t_1} \frac{-1-t_2^2}{2t_2} + \frac{-1-t_2^2}{2t_2} \frac{-1-t_3^2}{2t_3} + \frac{-1-t_3^2}{2t_3} \frac{-1-t_1^2}{2t_1} = -1$$

donc  $M'_1, M'_2$  et  $M'_3$  sont alignés.

## 4 courbe de Bézier de degré 3

CORRIGÉ

Soit  $P \in \mathbb{C}[X] : P = c_1(1-X)^3 + 3c_3X(1-X)^2 + 3c_4X^2(1-X) + c_2X^3$ , et  $\mathcal{C} = \{P(t) / t \in [0, 1]\}$ .

**a )**  $c_1$  et  $c_2$  sont dans  $\mathcal{C}$  (de paramètres 0 et 1). La tangente à  $\mathcal{C}$  en  $c_1$  est dirigée par  $P'(0) = -3c_1 + 3c_3$  et donc passe par  $c_3$  ( $c_3 = c_1 + \frac{1}{3}(-3c_1 + 3c_3)$ ).

De même pour la tangente en  $c_2$  qui passe par  $c_4$ .

**b )** Le milieu de  $[c_{134}, c_{342}]$  est  $\frac{c_1+c_2+3c_3+3c_4}{8}$  : c'est le point de  $\mathcal{C}$  de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

La tangente  $\mathcal{U}$  à  $\mathcal{C}$  en ce point est dirigée par  $P'(\frac{1}{2})$  donc par  $c_1 - c_2 + c_3 - c_4$ .

$$\frac{c_1+2c_3+c_4}{4} = \frac{c_1+c_2+3c_3+3c_4}{8} + \frac{1}{8}(c_1 - c_2 + c_3 - c_4) \text{ donne } \mathcal{U} \text{ passe par } c_{134}.$$

$$\frac{c_2+c_3+2c_4}{4} = \frac{c_1+c_2+3c_3+3c_4}{8} - \frac{1}{8}(c_1 - c_2 + c_3 - c_4) \text{ donne } \mathcal{U} \text{ passe par } c_{342}.$$

F I N