

remarques :

- Les notations de l'énoncé sont impératives.
- La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte.
- En particulier, aucun résultat non justifié, aucun raisonnement vague ou insuffisant, ne sera accepté.
- Tout résultat utilisé qui ne serait pas établi doit être *explicitement* déclaré admis.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

E est l'ensemble des fonctions numériques réelles, définies sur \mathbb{R} et continues sur \mathbb{R} .

Pour un réel $a > 0$ et une fonction continue sur \mathbb{R} f , on définit comme la moyenne spatiale de paramètre a de f l'application

$$m_a(f) : \left[x \mapsto \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f \right]. a \text{ est choisi et fixé pour tout le problème}^1.$$

étude analytique de $m_a(f)$

1° Soit $f \in E$ quelconque.

a) Justifier $m_a(f) \in E$.

b) Justifier que $m_a(f)$ est dérivable sur \mathbb{R} . En expliciter la fonction dérivée.

c) Justifier que $m_a(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

2° Soit $f \in E$ quelconque.

a) Montrer que si f est $2a$ -périodique, alors $m_a(f)$ est constante.

b) La réciproque est-elle vraie ?

3° Soit $f \in E$ quelconque.

a) Montrer que si f est paire, alors $m_a(f)$ est paire.

b) Que dire de la parité de $m_a(f)$ si f est impaire ?

4° Etudier la monotonie de $m_a(f)$ lorsque $f \in E$ est monotone.

5° $f \in E$ est supposée à support borné i.e. il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tout x tel que $|x| > A$. Un tel A est choisi pour f .

a) Montrer que $m_a(f)$ est aussi à support borné.

b) Montrer $\int_{-A-a}^{A+a} m_a(f)(t) dt = \int_{-A}^A f(t) dt$. (on pourra utiliser une intégration par parties).

¹Ce problème a une certaine cohérence mais tel quel paraît un peu long. Il ne faut pas forcément considérer que sa totalité doit être traitée dans le temps imparti.

1° On regarde m_a comme une application de E dans E .

a) Montrer que m_a est un endomorphisme du groupe E i.e. que pour deux éléments f et g quelconques de E , on a $m_a(f + g) = m_a(f) + m_a(g)$.

b) Pour $f : \left[x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]$, donner explicitement $m_a(f)$.

c) Donner $\text{Ker}(m_a)$; m_a est-il injectif ?

d) m_a est-il surjectif ?

2° Montrer que si f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n , alors $m_a(f)$ est aussi une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n .

moyenne spatiale des polynômes de Tchébychev

On notera indifféremment P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et sa fonction polynomiale associée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On définit dans $\mathbb{R}[X]$ la suite de polynômes (dits polynômes de Tchébychev) $(T_n)_n$ par

$$T_0 = 1 \quad T_1 = \frac{1}{a} X \quad \forall p \quad T_{p+2} = \frac{2}{a} X T_{p+1} - T_p$$

1° a) Donner explicitement les polynômes T_2 et T_3 .

b) Donner le degré de T_p et son coefficient dominant.

c) x est un réel fixé : établir $\forall p \quad T_p(a \cos x) = \cos(px)$.

d) Calculer $T_p(0)$ et $T_p(a)$.

e) Etablir que la fonction polynomiale T_p a la même parité que p .

2° On note g_p la fonction $[x \mapsto T_p(a \cos x)]$.

a) Ecrire de deux manières différentes la fonction dérivée g'_p .

b) En déduire $T'_p(a \cos x) = \frac{p \sin px}{a \sin x}$ pour $x \in]0, \pi[$.

c) Utiliser la continuité de T'_p pour trouver la valeur de $T'_p(a)$.

3° a) Donner la valeur de $m_a(T_p)(0)$ pour p impair.

b) Etablir $\frac{1}{a} \int_0^a T_{2k}(t) dt = \frac{1}{a} \int_{\pi/2}^0 T_{2k}(a \cos u) (-a \sin u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\sin(2k+1)u - \sin(2k-1)u] du$.

c) En déduire $m_a(T_p)(0) = \frac{1}{1-p^2}$ pour p pair.

4° a) Calculer $[m_a(T_p)]'(0)$ et $[m_a(T_p)]''(0)$ en fonction de p .

b) En déduire un $DL_2(0)$ de la fonction $m_a(T_p)$.

c) Donner un équivalent simple de $m_a(T_p)(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

F I N