

remarques: Les notations de l'énoncé sont impératives.

L'exercice et le problème sont indépendants. Il convient de bien répartir son temps entre eux, et à l'intérieur de chacun.

La présentation et la rédaction de la copie seront largement prises en compte. En particulier, aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera accepté.

Importance relative: exercice sur 8 points, problème sur 12 points environ.

## Exercice

E désignera  $\mathbf{R}^4$  comme  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Soit  $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  sa base canonique. ( $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ ).

$F = \{(x, y-x, z, y) \mid x, y, z \text{ réels}\}$  est un sous-ensemble de E.

u est l'endomorphisme de E défini par:  $u(x, y, z, t) = (-3y-z+t, -2x+2t, 2x+2y+3z-t, -5x-6y-z+6t)$ .

- 1)
  - a) Donner M, la matrice de u dans la base B.
  - b) Calculer  $\det(u)$ , le déterminant de u.
  - c) Donner  $\text{tr}(M)$ , la trace de M.
- 2)
  - a) Montrer que 3 est valeur propre de u.
  - b) Quelle est la dimension du sous-espace propre associé ? Donner  $\lambda, \mu$  pour que  $e_4' = (\lambda, \mu, \mu, \lambda)$  soit dans cet espace.
- 3)
  - a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
  - b) Donner une base C de F, puis la dimension de F.
  - c) Montrer  $V_2(F) = F$ , où  $V_2 = u - 2 \cdot \text{id}_E$ .
- 4)
  - a) Donner la matrice dans la base C de  $W_2$ , la restriction de  $V_2$  à F.
  - b) Calculer  $\det(W_2)$  et déduire que 2 est valeur propre de u.
  - c) Démontrer que  $W_2^3 = 0$ .
- 5)
 

On pose  $e_1' = (2, -1, -1, 1)$ ,  $e_2' = V_2(e_1')$ ,  $e_3' = V_2(e_2')$ .

  - a) Démontrer que  $(e_1', e_2', e_3')$  est une base de F.
  - b) Démontrer que  $B' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$  est une base de E.
- 6)
  - a) Donner la matrice A de u dans la base B'.
  - b) Montrer que A peut s'écrire  $A = N + D$  où

D diagonale

$N^3 = 0$

$N \times D = D \times N$
  - c) En déduire  $A^n$  pour n entier naturel.
- 7) Donner l'expression de  $u^n(x, y, z, t)$  pour x, y, z et t réels.

## Problème

1 Soit, pour  $n \geq 1$  donné, la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbf{R}$  par:  $f_n(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{n} & \text{si } x \geq -n \\ 0 & \text{si } x < -n \end{cases}$

1) Étudier continuité et dérivabilité de  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ .

Représenter graphiquement ces trois fonctions dans un même repère orthonormal.

2) Jusqu'à quel ordre  $f_n$  est-elle dérivable sur  $\mathbf{R}$  ?

3) Donner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  pour  $x$  quelconque.

$(a_n)_n$  étant une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$ , trouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-a_n} f_n(a_n)$ .

2 Soit, pour  $x \geq 0$  donné, la fonction  $g$  définie sur  $I = ]-\infty, 0] \cup ]x, +\infty[$  par:  $g(t) = 1 + \frac{x}{t} e^{-t}$

1) Étudier avec soin les limites de  $g$  aux bornes de  $I$ .

2) Étudier la dérivabilité de  $g$  et définir  $g'$  telle que  $\forall t \in I, g'(t) = \frac{g(t)}{t}$ .

3) De l'étude des variations de  $g$ , déduire les variations de  $g'$ .

4) En déduire la comparaison

a) de  $f_n(x)$  et de  $f_{n+1}(x)$  pour  $x$  réel

b) de  $e^x$  et  $f_n(x)$  pour  $x \geq -n$  et  $x \leq 0$

c) de  $e^{-x}$  et  $f_n(-x)$  pour  $x \geq n$  et  $x \leq 0$

4 Pour  $n \geq 3$ , on pose  $I_n = \int_0^{n^2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n dx$  et  $J_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^{-n} dx$

0) Rappeler pour quelles valeurs de  $n$  l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^{-n} dx$  converge.

a) Donner les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $J_n$  converge.

b) Donner  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 e^{-t}$  et en déduire, sans calcul de primitive, la convergence de  $K = \int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}) dx$

c) Comparer, dans  $\mathbf{R}$ , les nombres  $I_n$ ,  $J_n$  et  $K$ .

d) Par changement de variable, montrer  $I_n = 2n^2 \int_0^1 u(1-u)^n du$  et  $J_n = 2n^2 \int_0^{+\infty} u(1+u)^{-n} du$

e) Établir  $\frac{2n^2}{(n+1)(n+2)} \leq K \leq \frac{2n^2}{(n-1)(n-2)}$

f) En déduire la valeur de  $K$ . Confirmer ce résultat par un calcul de  $K$  à l'aide de primitives.